



N. Inn. 4187.

Fluorwasser

Die haben ihr Recht sammt den Kassen und 4

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10
 11
 12
 13
 14
 15
 16
 17
 18
 19
 20
 21
 22
 23
 24
 25
 26
 27
 28
 29
 30
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37
 38
 39
 40
 41
 42
 43
 44
 45
 46
 47
 48
 49
 50
 51
 52
 53
 54
 55
 56
 57
 58
 59
 60
 61
 62
 63
 64
 65
 66
 67
 68
 69
 70
 71
 72
 73
 74
 75
 76
 77
 78
 79
 80
 81
 82
 83
 84
 85
 86
 87
 88
 89
 90
 91
 92
 93
 94
 95
 96
 97
 98
 99
 100
 101
 102
 103
 104
 105
 106
 107
 108
 109
 110
 111
 112
 113
 114
 115
 116
 117
 118
 119
 120
 121
 122
 123
 124
 125
 126
 127
 128
 129
 130
 131
 132
 133
 134
 135
 136
 137
 138
 139
 140
 141
 142
 143
 144
 145
 146
 147
 148
 149
 150
 151
 152
 153
 154
 155
 156
 157
 158
 159
 160
 161
 162
 163
 164
 165
 166
 167
 168
 169
 170
 171
 172
 173
 174
 175
 176
 177
 178
 179
 180
 181
 182
 183
 184
 185
 186
 187
 188
 189
 190
 191
 192
 193
 194
 195
 196
 197
 198
 199
 200
 201
 202
 203
 204
 205
 206
 207
 208
 209
 210
 211
 212
 213
 214
 215
 216
 217
 218
 219
 220
 221
 222
 223
 224
 225
 226
 227
 228
 229
 230
 231
 232
 233
 234
 235
 236
 237
 238
 239
 240
 241
 242
 243
 244
 245
 246
 247
 248
 249
 250
 251
 252
 253
 254
 255
 256
 257
 258
 259
 260
 261
 262
 263
 264
 265
 266
 267
 268
 269
 270
 271
 272
 273
 274
 275
 276
 277
 278
 279
 280
 281
 282
 283
 284
 285
 286
 287
 288
 289
 290
 291
 292
 293
 294
 295
 296
 297
 298
 299
 300
 301
 302
 303
 304
 305
 306
 307
 308
 309
 310
 311
 312
 313
 314
 315
 316
 317
 318
 319
 320
 321
 322
 323
 324
 325
 326
 327
 328
 329
 330
 331
 332
 333
 334
 335
 336
 337
 338
 339
 340
 341
 342
 343
 344
 345
 346
 347
 348
 349
 350
 351
 352
 353
 354
 355
 356
 357
 358
 359
 360
 361
 362
 363
 364
 365
 366
 367
 368
 369
 370
 371
 372
 373
 374
 375
 376
 377
 378
 379
 380
 381
 382
 383
 384
 385
 386
 387
 388
 389
 390
 391
 392
 393
 394
 395
 396
 397
 398
 399
 400
 401
 402
 403
 404
 405
 406
 407
 408
 409
 410
 411
 412
 413
 414
 415
 416
 417
 418
 419
 420
 421
 422
 423
 424
 425
 426
 427
 428
 429
 430
 431
 432
 433
 434
 435
 436
 437
 438
 439
 440
 441
 442
 443
 444
 445
 446
 447
 448
 449
 450
 451
 452
 453
 454
 455
 456
 457
 458
 459
 460
 461
 462
 463
 464
 465
 466
 467
 468
 469
 470
 471
 472
 473
 474
 475
 476
 477
 478
 479
 480
 481
 482
 483
 484
 485
 486
 487
 488
 489
 490
 491
 492
 493
 494
 495
 496
 497
 498
 499
 500
 501
 502
 503
 504
 505
 506
 507
 508
 509
 510
 511
 512
 513
 514
 515
 516
 517
 518
 519
 520
 521
 522
 523
 524
 525

Astronomia

Caput I.

Astronomia est scientia astrorum, eorumque motuum; omnibus igitur observationibus et calculis. Sed theoria et observationes nunquam separari possunt, et semper conjunctae incidere debent, ut finis propositus rite deducatur. — Notissimum hodie temporibus, in quibus Astronomia tantum fecit progressus, et per instrumenta admodum perfecta, et per analytici proventus, quilibet qui Astronomiae studium adgrederetur, in omnibus partibus Analyticis et Mechanicis, versatus esse debet. Ergo quoque hic supponitur intima cognitio calculi differentialis et integralis et Geometriae Analyticae, quae nunc in omnes partes Astronomiae propter simplicitatem, quam ratione formulis gaudent, influunt; praeterea hic non sermo est tantum de Astronomia sic dicta populari, sed de theoretica et practica, hinc namque res nec attingitur quae non strikte demonstrari possit, omnia quoque debent justis exemplis ad exercitationem calculi Astronomici et ad cognitionem tabularum, imo quantum fieri potest, per observationes ipsas, veritates propositas comprobabuntur. Hinc quoque accidi debet rectificatio et usus instrumentorum Astronomicorum.

Caelum nobis apparet quae superficies sphaerae in qua nos omnia phaenomena considerare credimus. — Directio gravitatis in terra nostra in loco in quo observator supponitur, prolongata, dabit nobis duo puncta in caelo quorum nobis visibile Zenith, alterum Nadix nuncupatur; et circulus maximus 90° distans ab his punctis qui ergo per centrum terra transit, est Horizon non verus, Horizon apparens huius est parallelus et per observationis situm transit.

Motus diurnus corporum coelestium cuilibet statim apparet, in circulis inter se parallelis quorum centra sunt omnia in linea quae axis mundi vocatur. Extrema puncta huius rectae in caelo sunt poli mundi, quorum visibile est septentrionalis, invisibilis meridionalis. — Inter hos circulos ille qui aequi distat a polis, vocatur Aequator, qui dividit coelum in duas aequal

aequalis partes, in Hemisphaerium boreale et australe. Inter se hinc appa-
rent cum Horizonte in parte ubi astra in motu suo diurno se eleuant
supra Horizontem est Oriens et opposita pars Occidens. Ortus et Occasus
est momentum quo astrum per Horizontem transit, et distantia ab his pun-
tis vocatur Amplitudo Ortiva et Occasiva. —

Circuli maximi qui per polos et Zenith transeunt, vocantur Meridiani
et inter se hinc pascunt cum Horizonte est linea meridiana, cuius extre-
ma puncta sunt Meridies (Sud) et Septentriones (Nord). Quum quodlibet
punctum terrae nostrae habet Zenith et Nadir, quilibet locus quoque habet
suum proprium Meridianum Culminatio. — Circuli maximi per polos
mundi et astrum quodlibet transeunt, sunt circuli declinationis vel
horarii; et circuli maximi per Zenith et astrum, sunt circuli altitudinis.
Hinc primi sunt ad Aequatorem allati ad Horizontem perpendiculari.

Angulus qui verticem habet in polo mundi et interceptus est inter
Meridianum et circulum declinationis alicuius astri est angulus horarius
et angulus ad Zenith inter meridianum et circulum verticalem alicuius
astri est Azimuth. Pars circuli declinationis inter astrum et aequa-
torem est declinatio et complementum, distantia a polo astri; Altitudo
astri est pars circuli verticalis intercepta inter astrum et Horizontem, et
complementum, distantia a Zenith. Altitudo poli est distantia poli
mundi ab horizonte, quae quoque aequatur latitudini geographicae loci.
Longitudo geographica est angulus duorum meridianorum, quorum
unus primus assumitur. —

Inter corpora caelestia maximum sol est, cuius motus diversus
certis primis omnibus se statim obstat. Quilibet enim animadvertit ma-
ter diurnum motum ab ortu occasum versus, aliquem motum propri-
um ab occasu ortum versus in circulo qui Aequatorem bisariam secat.
Hic circulus maximus apparens orbita solis, est Ecliptica, cuius axis
determinat per sua extrema puncta in caelo, borealem et meridionalem
polum Eclipticae. Circulus maximus per hos polos et astrum est circulus
latitudinis et arcus interceptus, latitudo astri. — Puncta intersectionis
Eclipticae cum aequatore sunt puncta equinoctialia, quorum unum
est

est vernalis, alterum autumnale. Arcus aequatoris inter punctum vernalis et circulum declinationis aëtri, est Ascensio recta, et arcus Eclipticæ inter punctum vernalis et circulum latitudinis aëtri, est longitudo. Ascensio obliqua aëtri, vocatur Declinatio obliqua aëtri, quod eodem modo dicitur, quod dicitur aëtri, idem quod dicitur aëtri.

Circuli paralleli per polos ellipticos, sunt circuli polares. Circuli paralleli qui et in Hemisphaerio boreali et meridionali ita distant ab æquatore uti circuli polares a polis mundi, vocantur Tropici. Colurus æquinoctiorum et solstitialium, sunt circuli declinationis qui per puncta dicta transeunt.

Angulus positionis est angulus circuli latitudinis et declinationis. Angulus parallacticus est angulus circuli altitudinis et latitudinis. Variatio est angulus circuli declinationis et verticalis.

Longitudo est Ascensio recta a puncto vernali usque ad 360° et quidem in directione motus diurni opposita, igitur ab occidente ortum versus numeratur. Azimuthum et anguli horarii numerantur in directione motus diurni et quidem a meridie occiduum versus usque ad 360°, vel etiam tantum ad 180° in quo casu Azimuthum et anguli horarii in parte orientali meridiani, negativi asseruntur. Declinationis quoque et latitudinis australis sunt negativi. Obliquitas Eclipticæ est digressio plani elliptici a plano aequatoris.

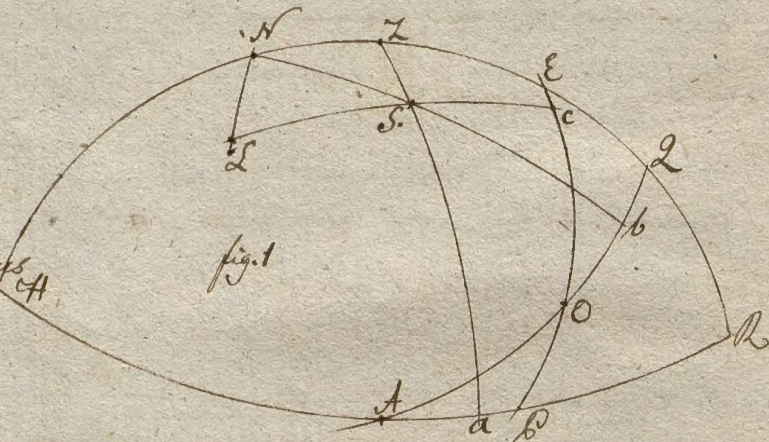
Præter divisionem horum circulorum in gradus minuta prima et secunda datur Eclipticæ aliqua divisio propria: Eclipticam nimirum, inchoando a puncto æquinoctiali verno seu primo puncto Arietis et progrediendo in directione motus annui solis ab occasu in ortum, dividunt in duodecim partes æquales, quarum quævis idcirco æque 30° æquatur, per hæc hæc totidem signa Eclipticæ quæ hic sequuntur: 1° Arietis ♈, 2° Tauri ♉, 3° Gemini ♊, 4° Cancer ♋, 5° Leo ♌, 6° Virgo ♍, 7° Libra ♎, 8° Scorpius ♏, 9° Sagittarius ♐, 10° Capricornus ♑, 11° Aquarius ♒, 12° Pisces ♓.

Hinc quoque denominatio Tropicus Canceri, Tropicus Capricorni. Hodiæ est zona in superficie celestis, inter duos circulos ad eclipticam parallelos at ab hac utrinque 10° distantes comprehensa. Sic Ecliptica medium inter hos hodiæ limites horum tenet, hodiæ quoque in duas minores zonas æquales dividit. Assumpta priori divisione ellipticæ, ubi directio aliqua, ab occasu in

in ortum, vel ab ortu in occasum indecanda fuerit, licet priorem sub
 directione contra ordinem signorum intelligere. Omnia haec signa edigiti,
 ea, dividuntur in duas ~~partes~~ clases: scilicet priora signa vocantur signa
borealia, altera australia alia quoque divisio est: in signa ascendentia
 et descendentia; ad illa pertinent. γ , δ , Π , ζ , μ , χ et ad haec reliqua.

Priora magis innotescunt ope considerationis globi, vel ope ~~globi~~ vel
 ope figurae. Sit Z polus horizonlis HA , N polus aequatoris AQ ,
 L polus eclipticae EB , S astrum et A , H , meridies, occasus et septen-
 trio; dein est HLH , et si per S ducantur arcus LSa , NSb , LSc per-
 pendiculares ad HA , AQ , EB , erit:

Sa Altitudo astri
 SZ distantia a zenith
 Sb Declinatio
 SN distantia a polo
 Sc Latitudo
 ANb vel Ab ascensio recta
 OLc vel Oc longitudo
 ENb vel Ob Angulus horarius
 HLA vel La Azimuthum
 NHL positio
 NSL variatio
 LSZ parallaxis



Optimum est inspicere globum aliquem in quo omnes isti circuli
 si sunt depicti. Quum ope globorum varia quoque possint resolvi problemata,
 aliqua de iis dicam.

Globus celestis est machina destinata ad representationem constel-
 lationum, motus diurni nimirum eclipticae, aequatoris etc. — Primum est
orientare globum pro determinato loco terrae et pro determinato die, quod
 sit si polus aequatoris positus in altitudine supra horizontem globi
 quae aequalis est latitudini geographicae loci; primum enim eclipticae quod
 obtinet sol hoc die, adducatur ad meridianum orientalem, et in hoc situ
 index ponatur ad O horam. Si polus globi debet revera respicere polum
 mundi quod ope acus magneticae obtineatur. Haec ratione rite orien-
 tato globo, plura problemata resolvi possunt, quorum tantum aliquot
 adferam.

1.^a Invenire horam, qua sol aliquo die in determinato loco occidit vel oritur.
Ad ducto puncto ellipticæ ad meridianum rotatur globus orientem
et occidentem versus, inde rose mibi indicabit horam ortus et oc-
casus. Etiam hac ratione locus ortus et occasus determinari potest.
Eodem quoque modo pro stellis fixis, ubi quoque culminatio seu transitus
per meridianum inveniri potest. Loco istius rose, æquator in horas
et minuta divinus adhiberi potest.

2.^a Quibus diebus anni sol data latitudine loci, dato tempore occidit? v. c. si
ponatur globus ad datam latitudinem loci, condatur aliquis in-
culus declinationis globi ad meridianum et index ad 0. Si dein globus
rotetur occasum versus, donec index sit ad 5.^h, notetur punctum cir-
culi declinationis, quod hoc momento est in Horizonte. — Si sol decli-
nationem huius puncti habet, hora hæc definit occidit, adductus igitur
idem punctum ad meridianum aurichalcium, et legatur de-
clinationis huius puncti etc.

3.^a Quis est ascensio recta Zenith pro dato tempore in dato loco?
Orientetur globus, rotetur donec ^{index} ~~globus~~ indicet datam horam; pun-
ctum æquatoris quod nunc est in Meridiano, dabit queritum Zenith et s. p.
Si rotetur globus videre quoque possumus quæ stellas transiunt per Zenith da-
ti loci, inquiruntur etiam illæ, cuius declinatio æqualis latitudini loci; eadem
ratione inveniri possunt stellas, quæ pro dato loco nunquam occidunt, nimirum
illæ, quarum distantia a polo minor est quam altitudo poli v. c. pro
Lacovia quarum declinatio maior est 46°.

4.^a Invenire horam qua stella aliqua transit Meridianum?
Rotetur locus solis et stellæ in globo, adductus sol ad Meridianum et po-
natus index ad 8.^h adductus dein quoque locus stellæ ad Meridianum et in-
de notabitur hora transitus.

Dein globus celestis est optimum medium ad cognitionem stellarum.
Ad hunc finem orientatur globus, rotetur donec index monstrat datam
horam; in hac situ nunc concordant omnes partes globi cum cælo, et

d

et ad cognoscendam quamlibet stellam quam videmus in globo, tantum mo-
do imaginari volens debemus per centrum globi et per stellam in globo li-
neam rectam, quae prolongata dabit nobis stellam in caelo. Aliques
hora, ferens, noctis ad sufficientem ad cognitionem praecipuarum stellarum
et constellationum. Sed ad hunc usum pertinent quoque servunt ope-
res celestes. —

Globus terrestris est machina destinata ad representationem terrae
nostrae. —

Quia tali globo etiam omnes isti circuli sunt delineati, hinc quoque
cum hac instrumento complura problemata resolvi possunt; quorum
tantum aliqua adferam.

- 1^o Invenire horam quae est in aliquo loco si data est hora v. c. Cracoviae.
Adducatur Cracovia ad Meridianum et index ad horam Cracoviae, dein
rotatus globus donec alter locus perveniret ad Meridianum et index in-
dicabit horam. —
- 2^o Inveniri quoque potest pro quolibet die, quae loca habeant solem in zenith.
Adducto enim loco solis ad Meridianum videbimus declinationem so-
lis; omnia loca quorum ^{latitudo} declinatio equalis est huius declinationi, ha-
beant solem hac die in zenith.
- 3^o Invenire loca pro quolibet dato die, pro quibus sol non occidit h. e.
pro quibus sol media nocte est in Horizonte.
Subtra hatur declinatio solis a 90° ; in numerum differentia coïncidet
cum aliqua data elevatione poli, loca quorum latitudo haec est, so-
lem habebant his diebus, media quoque nocte in Horizonte; et hac
ratione quoque inveniri possunt dies pro quolibet loco nonne frigide
quibus sol semper visibilis; nimirum ponatur globus ad datam la-
titudinem loci et solemus, posito aliquo stile in puncto septentrio-
nali Horizontis. Huius stili describit in globo circulum aequatori para-
lclum, qui eclipticam in duobus punctis, hinc in duas partes se-
cat. Minor harum partium notabit arcum eclipticae in quo sol ve-
satur eo tempore, quo huius loco non occidit. Si autem stilius tenetur
in

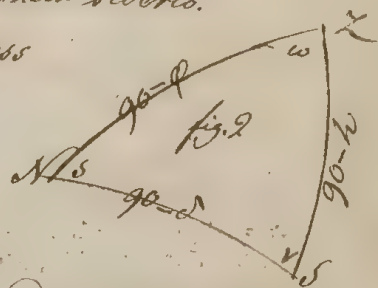
in Meridien Horisantis, minor arcus eclipticæ dabitur tempus quo
sol in dato loco non oritur. etc.

Emendatis omnibus circulis sphaerae terrestres, vidimus, com-
binatione plurimum talium circulorum eorumque arcuum varia oriri
triangula, quorum resolutio igitur quoque est resolutio plurimum
problematum Astronomicis, quorum aliqua adferamus. — Deno-
minationes per decursum omnium sectionum adhibitas sunt se-
quentes: α . Alt. sideris, δ . longitudo, ϵ . declinatio, β . latitudo, h . alti-
tudo, ω . Azimuthum, θ . angulus horarius, π . positio, χ . variatio, ξ . pa-
rallaxis, ϕ . altitudo poli et ϵ . inclinatio eclipticae

Instrumentorum potissimum usitata sunt, quae altitudinem
et Azimuthum dant, igitur primum problema erit: Datis ω, h et χ
invenire angulum horarium, declinationem et variationem sideris.

In triangulo NPS secundum formulae albertini Gauss
habebimus:

$$\begin{aligned}\sin 90^\circ - \delta \sin \frac{s-\chi}{2} &= \sin \frac{\omega}{2} \sin \frac{\phi-\frac{1}{2}}{2} \\ \sin 90^\circ - \delta \cos \frac{s-\chi}{2} &= \cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{\phi-\frac{1}{2}}{2} \\ \cos 90^\circ - \delta \sin \frac{s+\chi}{2} &= \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\phi+\frac{1}{2}}{2} \\ \cos 90^\circ - \delta \cos \frac{s+\chi}{2} &= \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{\phi+\frac{1}{2}}{2}\end{aligned}$$



Duae primae equationes per divisionem dant $\tan \frac{s-\chi}{2}$; Duae ultimae $\tan \frac{s+\chi}{2}$
ergo quoque inoleseant v et s ; invenitis hac ratione v et s , ea qualibet istarum
equationum fuit valor ipsius δ , quod quoque servit ad confirmationem.

Si autem non respicere velimus quantitatem v , quando s et δ prodibunt
quoque ex sequentibus:

$$\begin{aligned}\cotang s &= \frac{\tan h \cos \phi + \sin \phi \cos \omega}{\sin \omega} \\ \sin \delta &= \sin h \sin \phi - \cos h \cos \phi \cos \omega \text{ vel} \\ \cos \delta &= \frac{\cos h \cos \omega}{\sin s}\end{aligned}$$

Invenio declinationem δ , adhuc silus scioris observati ad aequatorem non est de-
terminatus, accedere debet etiam ascensio recta α . Si M meridie t. h. e. an-
gulus horarius puncti veris notus esset diu haberemus ϕ per fig. preb.

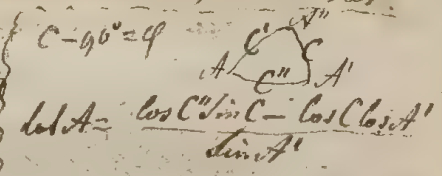
$t = t_{NO} = t_{NS} + s_{NO} = s + \alpha$; ergo $\alpha = t - s$. M meridie autem est nota, si an-
gulus horarius solis T , seu tempus observationis, et praeterea M solis A
pro eodem tempore nota est; est nimirum $t = A + T$ et substituto valore
erit,

x polus $\phi x = \cos \phi \sin \delta$

erit $\alpha = A + T - S$ ergo Δ nota

Si data est altitudo poli, declinatio et angulus horarius, invenitur altitudo sideris ex sequenti formula

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \omega \\ \text{et proinde } \tan \omega &= \frac{\sin S}{\sin \phi \cos \delta - \tan \delta \cos \phi} \\ \tan \xi &= \frac{\sin S}{\tan \phi \cos \delta - \sin \delta \cos \phi} \quad (\text{angulus parallacticus}) \end{aligned}$$



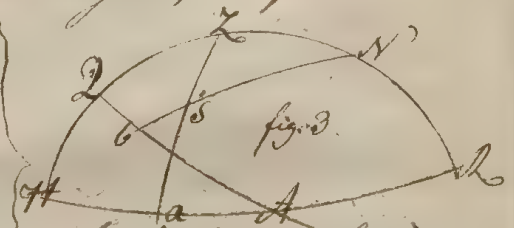
ergo hic ex altitudine poli, angulo horario et declinatione omnia reliqua sunt inventa.

2. Ex altitudine poli, altitudine et Azimutho reliqua inveniantur:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \phi \sin h - \cos \phi \cos h \cos \omega \\ \tan \delta &= \frac{\sin \omega}{\tan h \cos \phi + \cos \omega \sin \phi} \\ \tan \xi &= \frac{\sin \omega}{\tan \phi \cos h + \cos \omega \sin h} \end{aligned}$$

3. Ex altitudine poli, declinatione et altitudine astri, reliqua:

$$\begin{aligned} \cos S &= \frac{\sin h - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta} \\ \cos \omega &= \frac{\sin \phi \sin h - \sin \delta}{\cos \phi \cos h} \\ \cos \xi &= \frac{\sin \phi - \sin \delta \sin h}{\cos \delta \cos h} \end{aligned}$$



4. Ex altitudine poli, altitudine et angulo horario

$$\begin{aligned} \sin \xi &= \frac{\cos \phi \sin \delta}{\cos h} \\ \tan \delta &= \frac{\sin h \cot \xi - \sin \phi \cot \omega}{\cos h \cot \xi - \cos \phi \cot \omega} \\ \tan \omega &= \frac{\sin S \sec \phi - \sin \xi \sec h}{\cos S \tan \phi - \cos \xi \tan h} \end{aligned}$$

$Sa = h, ALa = \omega, Lb = \delta$
 $QNb = S, NR = \phi$
 In triangulo NLS $\angle NLS = 90^\circ - \phi$
 $\angle NSL = 90^\circ - \delta, \angle LNS = 90^\circ - h$
 $\angle NLS = 180^\circ - \omega, \angle NLS = S, \angle NLS = \xi$

5. Ex altitudine, angulo horario, et Azimutho reliqua:

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{\sin \phi \tan \omega \cos S - \sin S}{\cos \phi \tan \omega} \\ \tan h &= \frac{\sin \omega - \sin \phi \cos \omega \tan \delta}{\cos \phi \tan \delta} \\ \cos \xi &= \cos S \cos \omega + \sin S \sin \omega \sin \phi \end{aligned}$$

6. Ex declinatione, angulo horario et altitudine

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \frac{\cos \delta \sin S}{\cos h} \\ \tan \phi &= \frac{\sin \delta \cot \phi S + \sin h \cot \phi \omega}{\cos \delta \cot \phi S - \cos h \cot \phi \omega} \\ \tan \xi &= \frac{\sin \omega \sec h - \sin S \sec \delta}{\cos S \tan \phi + \cos \omega \tan h} \end{aligned}$$

7. Ex altitudine, Azimutho et angulo horario:

$$\cos d = \frac{\cos h \sin \delta}{\sin \phi} \quad \text{tang } \phi \text{ et tang } \xi \text{ ut in prop. 6}$$

et s. p.

Ex his allatis formulis facile praecipuum motus diurni derivari possunt. V. C. ex 1. formula sequitur altitudinem pro eodem loco et stella, eo maiorem esse, quo minor est δ . Altitudo erit maxima pro $\delta = 0$ seu stella est in sua culminatione; dein erit $\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta = \cos(\phi - \delta)$ ergo altitudo meridionalis $= 90^\circ - (\phi - \delta)$ et distantia a Zenith $= \phi - \delta$. Si $\delta > \phi$, dein distantia a Zenith erit inter polum et verticem. Altitudo erit minima, si $\delta = 180^\circ$ ergo in septentrionali parte Meridiani (inferior culmination) dein est $\sin h = \sin \phi \sin \delta - \cos \phi \cos \delta = \cos(\phi + \delta)$ vel $-h = 90^\circ - (\phi + \delta)$, quod indicat depressionem infra Horizontem $\kappa = 90^\circ - h = 180^\circ - \phi - \delta$ generationem pro inferiori culminatione $\kappa = 180^\circ - \phi - \delta$, pro superiori $\kappa = \phi - \delta$ ubi declinationes australes sunt negativae.

Ex hac quoque patet, stellam nunquam occidere, si $\phi + \delta > 90^\circ$ vel $\delta > 90^\circ - \phi$ et stellam nunquam oriri, si $\phi - \delta > 90^\circ$ vel $\phi > 90^\circ + \delta$, et quoniam ϕ minus quam major evadere potest quam 90° , δ debet esse negativa quantitas, hoc est declinatio australis. — Si $\delta = \phi$ dein est $\sin h = \sin^2 \delta + \cos^2 \delta$ hoc est $h = 90^\circ$ pro $\delta = 180^\circ$ et stella in sua culminatione est in vertice.

Si $\delta = 90^\circ$ dein est $\sin h = \sin \phi \sin \delta$ et stella est in suo primo verticali; et si ponatur stella in equatore seu $\delta = 0$ erit quoque $h = 0$ seu stella in Horizonte. — In eadem equatione h habebit eundem valorem et pro $\delta = +c$ et pro $\delta = -c$ quia cosinus amborum angulorum sunt positivi.

igitur altitudo stellarum erit eadem in utraque parte Meridiani, si anguli horarii sunt aequales; et vice versa anguli horarii sunt aequales, si altitudines sunt aequales quod quoque fluit ex equatione prima, secunda et tertia. — Hoc igitur quoque locum

habet, si $h = 0$, dein est $0 = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta$ seu $\cos \delta = -\tan \phi \tan \delta$ h. e. pars circuli paralleli supra horizontem, seu arcus diurnus, cuius

cuiuslibet stellæ, per Meridianum in duas æquales partes dividitur, quod
 ergo valet et de parte infra Horizontem, seu de arcu nocturno. Hoc quoque
 nobis dat medium ad disquisitionem, an celeritas stellarum in occiden-
 tali parte Meridiani æqualis sit celeritati in orientali vel, an motus
 diurnus sit æqualis. Cum stellæ his æsequitur eandem altitudinem,
 sumentur igitur in utraq. parte Meridiani semper binæ et binæ dies,
 æq. altitudines et notetur accurate tempus horologii. Si nunc
 semper tempora inter duas altitudines in orientali et correspondentes
 altitudines in occidentali parte æquales sunt, dein stellæ semper per
 eorundem æqualibus temporibus æquales angulos horarios, vel motus
 circa polum est uniformis. — Si altitudo poli et declinatio stel-
 læ nota sunt, hæc uniformitas, quæ pro Astronomia maxime
 est momenti, etiam ex prima æquatione n.º 3. demonstrari potest.
 Invenitur ibi ex qualibet observata altitudine h , angulus horarius s .
 Si ergo bis altitudo alicuius stellæ in eandem partem Meridiani una
 eorundem temporis intervalla observata est, invenitur tempus totius diei,
 cuius T . Observantibus hæc ratione plures alie diverse altitudines
 cum intervallis et sint h, h', h'' observatæ altitudines, s, s', s'' angu-
 li horarii ex altitudinibus calculati, t, t' tempora numerata in-
 ter altitudines h, h' et h, h'' dein motus erit uniformis si est
 $h - h' : h' - h'' : 360^\circ = t : t' : T$. — Innumera jam ab Astronomis in-
 stituta observationes, comprobant satis hanc uniformitatem
 motus diurni.

Predictus arcus diurnus nobis supponit quoque medium calculandi,
 si tempus ortus et occasus alicuius stellæ, nimirum, si t' est tem-
 pus quo indiget stellæ ad perveniendum arcum diurnum diurnum,
 quod tempus invenitur ex proportionem $360^\circ : \frac{1}{2} \text{ arc. diurn.} = \text{tempus to-}$
 tius revolutionis : t' , hoc ita inventum tempus tantum a tempo-
 re t culminationis stellæ subtrahi aut addi debet et habeatur tem-
 pus ortus et occasus. Hoc quoque ad terminos analyticos adduci pos-
 sunt, nimirum: si T est tempus inter duas subsequentes observa-
 tiones culminationes erit $t' = \frac{s \cdot T}{360}$. Ad inveniendum tempus

culminationis

culminationis, sicut A et a ascensiones rectae solis et stellae pro me-
ridie dati diei in tempore expressae, dA et da , differentias inter duas
sequentes culminationes, dicitur esse tempus inter duas subsequentes cul-
minationes aperi $\theta = \frac{24^h \cdot 3600''}{24 + dA + da}$ et tempus culminationis

$$t = \frac{24(a - A)}{24 + dA + da}$$

ubi da est quantitas negativa aut rerus, prout A sideris aut de cre-
scit aut constans est. — Tempus ortus et occasus, culminationis fa-
cillime invenitur, si supponitur aliquod horologium, quod tempore culmi-
nationis puncti verum 0^h , et inter duas subsequentes culminationes
 24^h dat. Tale horologium est sidericum et tempus est tempus sidericum.
Quum tempus sidericum aliquis stella simul sit ascensio recta & hujus
stellae, $\alpha + s$ erit tempus ortus et occasus si s est arcus semi diurnus.
Hic non respicimus ad refractionem neq. ad Parallaxin Horizontis
neq. variabilitatem declinationis. —

Præterea æquationes quoq. ad solem referri possunt, nimirum: nos
habuimus $\cos s = -\tan \phi \tan \delta$, tempus hæc æquatione inventum erit
 $\frac{s}{15}$ quod tempus quoq. erit tempus occasus solis; ad inveniendum ortum
hoc tempus 24^h subtrahi debet. — Præterea quum declinatio solis nun-
quam maior evadere potest quam obliquitas eclipticæ, vel 23° nun-
quam 27° , sol initio æstatis omnibus locis non oritur, quorum arc-
us australis altitudo poli major $90 - \epsilon$ est, et illis non occidit quorum sep-
tentrionalis altitudo poli major $90 - \epsilon$ est. — Ceteris partibus anni,
ubi $\epsilon < \delta$ est, locus, cui sol non oritur vel non occidit, habebit decli-
nationem australem aut borealem, quæ major quam $90 - \delta$ est, hinc
semper major quam $90 - \epsilon$; et sol tunc diu alicui loci non oritur neq.
occidit, donec evadat declinationem minus quam $90 - \phi$. —

Omnes regiones igitur quibus sol semel in anno non oritur et non
occidit, sunt continetæ inter polum et circulum parallelum terre
cujus altitudo poli $= 90 - \epsilon$, vel qui a polo distat quantitate, quæ
æquatur obliquitati eclipticæ. — Fati circuli sunt jam dicti cir-
culi

circuli polares et regiones istae sunt regiones polares. Maxima ibi erit altitudo meridiana, si $\delta = \varepsilon$. tum est $\sin h = \cos(\varphi - \varepsilon)$ vel $h = 90 - \varphi + \varepsilon$; ergo quum $\varphi > 90 - \varepsilon$, altitudo meridiana in illis regionibus non major quam 2ε excedere potest. —

Ex aequatione $\cos \delta = -\tan \varphi \tan \delta$, sequitur quoque, si est 90° , vel solum longiori tempore supra quam infra Horizontum esse, si φ et δ sunt ejusdem generis, si autem sunt diversi generis, diem arcus nocturnus major est quam diurnus.

Si nominemus pro hoc casu angulum horarium per δ' , diem erit:

$\cos \delta' = \cos \delta$, ergo $\delta + \delta' = 180^\circ$. Cum autem diem diem arcus diurnus et nocturnus quoque efficiant 180° , δ' erit idem cum dimidio arcu nocturno primi casus, h. e. arcus nocturni et diurni pro data declinatione sunt in, versa arcibus diurnis et nocturnis pro eadem esse in versa declinatione aequales, vel qualibet loco longitudinis diei aestatis tempore, semper aequatur longitudini noctis similis diei hiemis tempore. — Ergo quoque ex longitudine longitudini noctis similis diei hiemis tempore. — Ergo quoque ex longitudine

diei ad longitudines nocturnas hiemis tempore concludi potest. Proterea si φ et δ sunt diversi generis et φ vel δ crescit, δ' decrescit, δ crescit, h. e. quo major altitudo poli, eo breviores dies hiemis tempore, et eo longiores dies aestatis tempore. Deinde quoque sequitur, omnia loca terrae, nostraeque habere longissimam diem et brevissimam noctem, si sol est in tropico seu est contraria. Pro regionibus sub iis dicta Linea $\varphi = 0$, ergo $\delta = 90$, quaecumque sit declinatio solis, h. e. sub aequatore omnes noctes aequantur diebus, si sol est in aequatore δ erit nullus, ergo quoque $\delta = 90$ quaecumque sit altitudo poli, h. e. initio veris et autumnii in tota terra dies et noctes sunt aequales et ab hac proprietate probabili et aequator et puncta aequinoctialia nomen suum habent. — Sub polo $\varphi = 90^\circ$, ergo semper $\varphi + \delta > 90^\circ$ quandiu φ et δ sunt ejusdem generis, ex quo sequitur, ibi esse per diem diem annum diem et per dimidium noctem. —

Nunc ostensum est quanta sit vis linguae analyticae, nam una formula nobis suppeditavit omnia haec computaria. —

Nunc quoque videndum est, quae polissimum altitudines sint sumendae.

Optimum generatum erit tates feligere altitudines, et ex conispa in fumen, ubi altitudines
 da altitudine errore, ipse tamen minimum habeat influxum in angulum quam celerrime
 horarium, igitur valor $\frac{\partial h}{\partial \xi}$ debet esse quam maximus. Differentiando
 igitur primam aequationem erit $\frac{\partial h}{\partial \xi} \cos h = -\frac{\partial \sin \xi \cos \phi \cos \delta}{\partial \xi}$; substituendo
 hinc valorem $\sin \xi$ pro $\frac{\cos \phi \sin \delta}{\cos h}$ ex prima aequatione n. 4. erit:

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = -\cos \delta \sin \xi, \text{ quod acquirat maximum valorem pro } \sin \xi = 1.$$

praeterea quum sit $\cos \xi = \frac{\sin \phi - \sin h \sin \delta}{\cos \delta \cos h}$ erit differentiando

$$\frac{\partial \xi}{\partial h} = \frac{\partial h (\sin \delta - \sin h \sin \phi)}{\cos^2 h \cos \delta \sin \xi}.$$

posito nunc pro Maximo quantitates ξ , $\frac{\partial \xi}{\partial h} = 0$

erit $\sin h = \frac{\sin \delta}{\sin \phi}$ et ex hoc, si hic valor substituat in aequatione
 prima et secunda n. 3 erit

$$\cos \delta = \tan \phi \cotang h$$

$$\cos w = 0 \text{ ergo } w = \pm 90^\circ$$

ergo optimum erit observationes altitudinum instituere, quantum fieri
 potest, vicinas circulo verticali, qui transit vel per punctum ortus aut oc-
 casus; suppositum hic fuit $\delta < \phi$

Si stella est in ipso aequatore, optimum erit in puncto ortus aut occasus
 observare. Si autem declinatio septentrionalis stella, esset equalis alti-
 tudini poli ergo $\delta = \phi$, diu stella transit per verticem, et diu erit.

$$\frac{\partial \cos \xi}{\partial h} = \frac{\tan \phi (1 - \sin h)}{\cos^2 h} = \frac{\tan \phi}{1 + \sin h} \text{ qui terminus nunquam evanescit,}$$

scit, quemcumque valorem δ etiam h habeat.

In eodem hoc casu est aequatio 3. n. 3.

$\cos \xi = \frac{\tan \phi (1 - \sin h)}{\cos h}$ qui terminus pro $h = 90^\circ$ manet indeter-
 minatus. Differentiando igitur numeratore et denominatore, erit

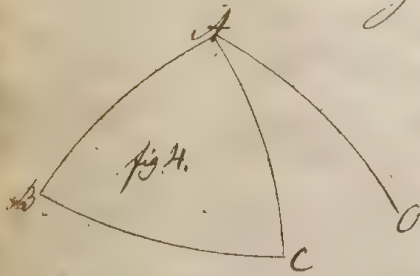
$\cos \xi = \tan \phi \cotang h = 0$, hinc $\sin \xi = 1$ qui valor est ma-
 ximus pro priori aequatione, hinc talis stella in vertice ipso observari
 debet. Si autem $\delta > \phi$ ergo stella inter verticem et polum
 per Meridianum transiens, ergo ξ usq. ad 180° incrementum potest. In
 hoc casu quoq. $\frac{\partial h}{\partial \xi}$ habebit maximum valorem si $\sin \xi = 1$ et $\cos \xi = 0$
 ergo $\sin h = \frac{\sin \phi}{\sin \delta}$ ex aequ. 3. n. 3. diu est 1. et 2. aequ. n. 3.

$$\cos \delta = \frac{\tan \phi}{\tan \delta} = \tan \phi \cotang \delta$$

$$\begin{aligned}\sin w &= \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} \\ \cos w &= \frac{\sin \varphi \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} - \sin \delta}{\cos \varphi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \delta}{\cos^2 \varphi}}} = \frac{\sin \varphi \sin \delta - \sin^2 \delta}{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta}} = \frac{\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi}{-\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta}} \\ &= \frac{\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi}{-\cos \varphi} = \sqrt{1 - \sin^2 \delta} \\ \frac{\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} &= 1 - \sin^2 w \\ \sin^2 w &= 1 - \frac{\sin^2 \delta - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta}{\cos^2 \varphi} \\ &= \frac{1 - \sin^2 \delta}{\cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \delta}{\cos^2 \varphi} \quad \text{ergo hinc angulus horizonis est} \\ &\quad \text{autus acutus et obtusus.}\end{aligned}$$

Ergo declinationes australes quantum fieri potest, evitare debemus; optimum erit, stellam in vicinia primi circuli verticalis ubi $w = 90 = 270$ observare; in vicinia poli semper minus accurate sunt altitudines observatae quia illi non multum variant stellae in altitudine.

Vide recitimus ad resolutionem plurimum problematum principalium. Datis A et declinatione fibris, invenire longitudinem et latitudinem et vice versa. — Semper supponitur obliquitas elliptica nota.



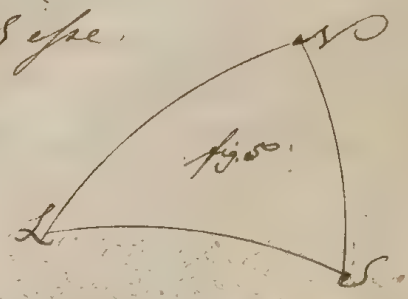
Hoc problema refertur ad triangulum ABC de quo jam prius fuit sermo; ut autem accurate resolvi possit hoc problema, procedere debent notiones omnium partium huius trianguli. — Generaliter si habemus triangulum sphaericum ABC et ex puncto A ducimus arcus AO perpendicularis ad datum BC et angulum OAC vocamus n angulum A trianguli erit $90 - n$ quando n minor est quam 90 vel quando n punctum C est in primo quadrante ang. n , quando erit expressio pro tertio quadrante, pro quarto $A = 360 - n + 90$ et hic ultimus valor aequatur primo quia differunt 360 . — Ut autem inveniamus aliquam generalem expressionem anguli A pro omnibus quadrantibus n , notandum est, inter tria puncta superficiei sphaericae semper existere duo triangula, nimirum, primo triangulum quod semper considerari consuevit, et alterum et cuius superficies superficiem primi complet ad totam superficiem sphaerae. Nominemus hoc secundum triangulum complementum. — Ambro

triang
2

Ambo triangu- la habent eadem latera & anguli unus, sunt complementa
 angulorum alterius ad quatuor rectos. — Expressiones trigonometricae autem
 sunt semper eadem, si ponitis lateribus iisdem α, β, γ pro angulis A, B, C
 ponentibus complementa $360-A, 360-B, 360-C$. S. propterea notatur hec
 A triangu- la pro quatuor quadratibus an oriri per rotationem lateris AC
 circa punctum fixum A, clarum est semper comparari debere eadem ~~linea~~
 partes linearum LA, BA inter se ad definiendos angulos quos format
 in hac rotatione LA cum BA. — Ex hoc sequitur si in parte de LA
 ubi AS p[er]tinet, pars de LA ad determinationem anguli LAS electum
 fuerit, quae abversa est versus BA, in altera parte de BA contrariam
 ipsi ^{BA} partem lineae LA eligi debere ad determinationem ejusdem anguli
 quia nunc contraria pars arcus AL eadem est cum priori. —
 Si autem in aliquo triangulo considerentur anguli, quos oppositae
 partes arcuum faciunt, non hoc triangulum ipsum, sed complementum
 consideratur. — Si ergo in triangulo in quo unus arcus est firmus
 reliqui duo autem mobiles in una parte arcus firmi triangulum
 uti solet fieri consideratur, in altera parte arcus firmi complementum
 considerari debet, ut revera semper idem triangulum, uti hoc unifor-
 mitas postulet, retineatur. —
 Secundum has considerationes sunt igitur anguli A in primo et
 ultimo quadrante anguli n aequales $90-n$, in secundo et tertio
 $360-(n-90)=90-n$ vel generatim $90-n$ est expressio universalis
 Anguli A pro omnibus quadrantibus.

His praemissis quilibet videt in triangulo NLS ipse.

- LN = e inclinatio eclipticae
- NS = $90-\epsilon$
- LS = $90-\beta$
- LSN = $90+\alpha$
- NLS = $90-\lambda$
- NL = π



Si ergo α, ϵ et e sunt cognita, habebimus

$$\begin{aligned} \tan \lambda &= \frac{\sin \alpha \cos e + \tan \epsilon \sin e}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad \tan \beta = \frac{(\tan \epsilon \cos e - \sin \alpha \sin e) \cos \lambda}{\cos \alpha} \\ \sin \beta &= \sin \epsilon \cos e - \sin \alpha \cos e \sin e \end{aligned}$$

Summa
 3

et inverse, si λ, β et e sunt noles erit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \lambda \cos e - \operatorname{tg} \beta \sin e}{\cos \lambda}$$

$$\sin \delta = \sin \lambda \cos \beta \sin e + \sin \beta \cos e \text{ et}$$

$$\operatorname{tg} \delta = (\sin \lambda \sin e + \operatorname{tg} \beta \cos e) \frac{\cos \alpha}{\cos \lambda}$$

et ad instituendum examen erit

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \beta \cos \lambda$$

Ad calculum optiorem formam his aequationibus dare possumus, introducendo angulo auxilario nimirum posito $\operatorname{tg} m = \operatorname{ctg} \delta \sin \alpha$ erit

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \alpha \cdot \cos m}{\sin m} \text{ erit}$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \alpha \cos e + \sin \alpha \cos m \sin e}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin m} (\sin m \cos e + \cos m \sin e)$$

ex quo

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin m} \sin(m+e) \text{ et eodem modo}$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \delta \cos e - \sin \alpha \sin e \cdot \frac{\sin \delta \sin m}{\sin \alpha \cos m} = \text{quia } \cos \delta = \frac{\sin \delta \sin m}{\sin \alpha \cos m} \\ &= \frac{\sin \delta}{\cos m} (\cos e \cos m - \sin e \sin m) = \frac{\sin \delta}{\cos m} \cos(m+e) \end{aligned}$$

et pro inverso problemate indicatur $\operatorname{tg} n = \sin \lambda \operatorname{ctg} \beta$ et erit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\sin n} \sin(n-e)$$

$$\sin \delta = \frac{\sin \beta}{\cos n} \cos(n-e)$$

pro determinatione anguli positionis erit:

$$\sin \pi = \frac{\cos \delta \sin e}{\cos \beta} = \frac{\cos \lambda \operatorname{tg} e}{\cos \delta} \text{ vel}$$

$$\operatorname{ctg} \pi = \frac{\operatorname{ctg} e \cos \delta \sin e \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} e \cos \beta - \sin \beta \sin \lambda}{\cos \lambda}$$

Si adhibentur equationes celeb. Gauss, et ponitur $90 - \pi = p$, $45 - \frac{1}{2} \delta = d$ et $45 + \frac{1}{2} \lambda = l$, erit:

$$\sin d \sin \frac{p+\alpha}{2} = \sin l \sin(45 - \frac{1}{2}(e+\beta))$$

$$\sin d \cos \frac{p+\alpha}{2} = \cos l \cos(45 - \frac{1}{2}(e-\beta))$$

$$\cos d \sin \frac{p-\alpha}{2} = \cos l \sin(45 - \frac{1}{2}(e-\beta))$$

$$\cos d \cos \frac{p-\alpha}{2} = \sin l \cos(45 - \frac{1}{2}(e+\beta))$$

ex quibus aequationibus δ, α et π inveniri possunt et vice versa pro λ, β .

Alia

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1 - \sin^2 e - \sin^2 \delta \cos^2 e + 2 \sin \alpha \sin \delta \sin e \cos e \cos \delta + \sin^2 \alpha \sin^2 e (1 - \cos^2 \delta)} = \\
&= \sqrt{\cos^2 e - \sin^2 \delta \cos^2 e + 2 \sin \alpha \sin \delta \sin e \cos e \cos \delta + \sin^2 \alpha \sin^2 e \sin^2 \delta} = \\
&= \sqrt{\cos^2 e \cos^2 \delta + 2 \sin \alpha \sin \delta \sin e \cos e \cos \delta + \sin^2 \alpha \sin^2 e \sin^2 \delta} = \\
&= \cos e \cos \delta + \sin \alpha \sin e \sin \delta
\end{aligned}$$

$$\text{ergo } \partial \beta \cos \beta = \partial \delta \cos \pi \cos \beta - \partial e \sin \lambda \cos \beta - \partial \alpha \sin \pi \cos \delta \cos \beta$$

$$\text{et } \partial \beta = \partial \delta \cos \pi - \partial e \sin \lambda - \partial \alpha \sin \pi \cos \delta$$

eodem modo invenitur

$$\partial \lambda \cos \beta = \partial \delta \sin \pi + \partial \alpha \cos \pi \cos \delta + \partial e \sin \beta \cos \delta$$

$$\text{et } \partial \delta = \partial \lambda \sin \pi \cos \beta + \partial \beta \cos \pi + \partial e \sin \alpha$$

$$\partial \alpha \cos \delta = \partial \lambda \cos \pi \cos \beta - \partial \beta \sin \pi - \partial e \sin \delta \cos \alpha$$

ex quibus expressionibus errores longitudinis et latitudinis ex datis erroribus Δ et δ determinationis inveniri possunt.

Si priores aequationes applicemus ad aliquod fixas in ecliptica v. e. ad solem, priores expressiones evadent simpliciores, quia $\beta = 0$. prae, eique sunt:

1. Ex e et λ reliqua

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \lambda \cos e$$

$$\sin \delta = \sin \lambda \sin e$$

$$\text{tg } \pi = \text{tg } e \cos \lambda$$

etiam ex triangulo flunt istae formulae

2. Ex e et α

$$\text{tg } \lambda = \frac{\text{tg } \alpha}{\cos e} = \text{tg } \delta \sec e$$

$$\text{tg } \delta = \text{tg } e \sin \alpha$$

$$\sin \pi = \sin e \cos \alpha$$

3. Ex e et δ

$$\sin \lambda = \frac{\sin \delta}{\sin e}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{tg } \delta}{\text{tg } e}$$

$$\cos \pi = \frac{\cos e}{\cos \delta}$$

4. Ex α et δ

$$\text{tg } e = \frac{\text{tg } \delta}{\sin \alpha}$$

$$\cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$$

$$\text{tg } \pi = \frac{\sin \delta}{\text{tg } \alpha}$$

Ex prima aequatione n. 1. sequitur, α et λ semper esse ejusdem generis; quatuor

quod

quadrantes eclipticæ et æquatoris simul inveniunt, h. e. momento, quo longitudo solis major 90° evadit; idem fit cum ascensione recta. —

Ex secunda equatione n. 1 sequitur: declinatio est vel septentrionalis vel australis, quout longitudo vel minor vel major est 180° , declinatio igitur est in primo et secundo quadrante, h. e. tempore veris et æstatis septentrionalis, tempore autumnus et hiemis australis. — In utroque casu declinatio erit maxima si $\sin \lambda = \pm 1$ h. e. si $\lambda = 90^\circ$ aut $\lambda = 270^\circ$, in hoc casu declinatio erit æqualis obliquitati eclipticæ, et deinde iterum decrevit, vel sol devertit ad æquatorem. — Hæc quoque est ratio, cur ista puncta, ubi longitudo solis est vel 90° vel 270° et declinatio maxima, nominantur puncta solstitia. —

Ex tertia equatione n. 3. sequitur: angulus positionis evanescit, si longitudo solis est vel 90° vel 270° , si autem sol est in punctis æquinoctialibus, iste angulus erit maximus, minimum æqualis obliquitati eclipticæ. etc.

Prioribus expressiones etiam in notas series resolvere possunt.

Tempora

Basia præcipua totius Astronomiæ est doctrina de temporibus Astronomicis, et illorum mensura. Fundamentum vero in illa debet supersistere, est uniformitas motus diurni apparentis æstheris circa axem mundi. — Motus diurnus ejuslibet puncti celi in 24 horas, vel etiam in 360 gradus dividitur. Mutatio angularum in tempus, vel inverso, temporis in angulos, tantummodo est mutatio modi dividendi, ut quemque motum æstri alicujus assumamus ad representationem temporis, semper 24 horas hujus æstri æquantur 360° ergo 1 hora = 15° etc.

Ita potissimum dantur diversa tempora.

Tempus verum est angulus horarius solis in tempus mutatus. Mensura anguli horarii est arcus æquatoris; sed sol non movetur in æquatore, sed in ecliptica, et etiam in hac, difforsim celeritate. Ex hac ratione quoque tempus verum ipsum est, aliquando difforsim, et tunc ad generalem mensuram immediate non aptum. —

Ut autem tamen per solis uniformem mensuram temporis acquiramus, ima-
ginemur nobis. aliquem solem medium, qui motu uniformi in ecliptica ita mo-
vetur, ut cum sole vero simul transiat per duo puncta, ubi sol verus maxi-
mam suam et minimam habet celeritatem. - Hic sol, cuius rotatio circa
terram igitur idem est cum illa solis veri, servit ad correctionem vera-
rum habentium diffinitionum motus solis veri. Ut autem quoque
illa apparentes diffinitiones huius medii solis, quae oriuntur ab
inclinatione orbis versus aequatorem, removeamus, imaginemur nobis
aliud medium solem, qui motu uniformi in aequatore ita movetur,
ut cum primo medio sole simul per puncta aequinoctialia transiat. -
Tempora revolutionum horum trium solium igitur inter se sunt
aequalia. -

Tempus medium igitur erit angulus horarius in tempus mutatus, hu-
ius solis secundum medium. -

Tempus sidericum est angulus horarius in tempus mutatus medi
puncti vernalis. -

Diei verus, medius et sidericus incipiunt, quando sol verus, medius et punctum
vernum per Meridianum transit. Duratio talis diei est intervallum
inter duos subsequentes transitus.

Diei solaris civilis a media nocte ad subsequentem numeratur.

Prode effemur.

De illis.

Diei primi mobilis
quod punctum aequinoctiale
vernum

Diei solaris Astronomicus ab uno Meridie ad alterum

Sit in diei solaris medius, s. sidericus; describat sol medius in aliquo tem-
pore arcum μ et punctum aequinoctiale vernum eodem tempore arcum σ ,
Dein est, quia pro aequalibus temporibus arcus se habent in versis uti tempora
revolutionum

$$\frac{\mu}{\sigma} = \frac{S}{m} \quad \text{--- (I)}$$

Si ergo ratio $\frac{\mu}{m}$ est nota, opae huius aequationis, et tempus sidericum in medium
et inverse mutari potest.

Sit nunc VBAV aequator, AC meridianus, B sol medius, V punctum
aequinoctiale vernum (medium); $S = VA$ sit tempus sidericum
vernum pro dato momento, $M = PA$ correspondens tempus
medium, et $a = VB$, A. medius solis, vel quod idem est, longitu-
do medi solis primi, erit est

$$S = a + M$$

Si ergo pro aliquo momento a est notum, pro hoc momento



tempus siderum inveniri potest, si medium tempus est datum, et inverse.
 Ad inveniendum quovis momento quantitatem a , sit A & M medi solis pro
 momento medi meridiani dati diei, quae quantitas ex ephemeridibus sumi potest,
 alii semper 15 divisa seu in tempus mutata occurrat, b sit constans augmen-
 tum huius quantitatis intra 24 horas temporis medi, dein augmentum inter
 24 horas temporis medi erit $\frac{b}{24} M$

ergo $a = A + \frac{b}{24} M$

ex quo fit prior aequatio

$M = S - a = S - A - \frac{b}{24} M$ et quo
 $(24+b)M = (S-A)24$ et $M = \frac{24}{24+b}(S-A)$
 et $S = A + \frac{24+b}{24} M$

his aequationibus quoque sequentibus possumus dare formam:

$M = S - A - \frac{b}{24+b}(S-A)$
 $S = A + M + \frac{b}{24} M$ } II

Quum autem A ex ephemeridibus quae notum supponi potest, ex his aequa-
 tionibus pro quolibet dato tempore sideris absolute, correspondens tempus
 medium et inverse inveniri potest, si b est notum. Sed motus primi
 medi solis intra 24 horas temporis medi est $0^{\circ} 59' 8'' 33$ ergo

$b = \frac{0^{\circ} 59' 8'' 33}{15} = 0.06571$

et quum sit $S:m = 24:24+b$ erit

$\frac{S}{m} = \frac{24}{24+b} = 0.9972695$ et
 $\frac{m-S}{m} = \frac{b}{24+b}$ et $\frac{m-S}{S} = \frac{b}{24} = 0.0027305$
 $= 0.0027305$

aequatio pri I ergo quoque erit

$\mu = S - \frac{(m-S).S}{m}$
 $S = \mu + \frac{(m-S).S}{S}$

hoc est

$M = S - 0.0027305.S$ } I'
 $S = \mu + 0.002738.\mu$ }

et aequationes II erunt

$M = S - A - 0.0027305(S-A)$ } II'
 $S = A + M + 0.002738.M$ }

Li hab.

$$\frac{m-s}{s} = \frac{1}{1-c} - 1 = c + c^2 + c^3 + c^4 + \dots$$
$$\sigma = \mu + c\mu + c^2\mu + c^3\mu - \dots$$

сн сн н

----- *Arctia c. c. p. cum c. p.*

Exempla 1. pro equationibus I'

14^h laut 2^a 17.61

3' - - - - - 0.49

$$\begin{array}{r} 32'' \\ \hline 21 \quad 10'' 12 \end{array} \quad 0.69$$

2^a 18". 19 quæ quantitas quæ vocatur acceleratio fixarum

$\sigma = 143 \quad 32.00$

$\mu = 14$ 13.81 temps median

alt inverse $\mu = 100^h$ 24' 0.415 quadratus σ

4.24^h Jan 15' 43.63

4 - - - - - 39. 32

24' 0.415 - 3.93

$Cu = 10' \quad 20' 88$

16' ant - 2" 62

26"883 - - - 0.04

$C_M = 2.06g$

2" dent - 0.005

0.69 - - - - 0.002

$$C^3 M = 0.007$$

hence $c\mu + c^2\mu + c^3\mu = 16' 20'' 54''$

$$\mu = 100^h \quad 24^i \quad 0.415$$
$$\sigma = 100^h 40' 29''.992$$

Pro equationibus (II^a)

Sit a. 1811. 13 Septembris est pro Meridiano

$$A = 11^h 25' 45'' 696$$

Si pro hac die tempus sidericum datum

$$S = 8^h 2' 30'' 426$$

dimittit

$$S = 8^h 2' 30'' 426$$

$$A = 11^h 25' 45'' 696$$

$$15^h 36' 44'' 730$$

$$M = 15^h 34' 11'' 269$$

et hoc sufficit ad conversionem temporis meridii in sidericum et vice versa.

Aequatio temporis est differentia temporis veri et meridii per differentiam aperi-
sonum rectarum veri et secundum meridii Solis in tempore per $dt = \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$

Aequatio temporis cum suis signis applicata ad tempus verum, dat tempus
meridii, nimirum: $M = V \pm E$, et e converso. Aequatio temporis ex

tabulis vel ephemeridibus potest calculari. Nos redibimus adhuc ad hanc
materiam. — Adnotari hic debet, omnes numeros ephemeridum pro aliquo

determinato loco esse calculatos v. c. pro Berolins Meridiano. Sed facile
pro alio Meridiano adhiberi possunt, si nota est differentia Meridianorum;

nimirum: assumptis v. c. numeris in ephemeridibus Berolinensibus uniper-
miles crescentibus et decrepentes, et posito α aequali differentia duorum
subsequentium numerorum in ephemeridibus, habebis

$$x = \frac{\text{Differ. Merid.}}{24} \cdot \alpha$$

que quantitas a numeris Berolinensibus vel subtrahatur, si isti numeri
crescant, vel inverse, ut inveniantur iidem numeri pro alio Meridiano
et quidem orientatori. —

Tantum pro luna, qui situm suum in coelo celerrime mutat, isti nume-
ri subsequentium dierum non amplius quam uniformiter crescentes et
decrepentes assumi possunt; ergo in tali casu nota methodi in longitudo
adhiberi debent. Quum applicatio harum methodorum saepius occurrit, in-
dicabo hic aliquas prosequarum.

1. Si habuerimus seriem quantitatum

$$y, y', y'', y''' \text{ etc.}$$

quos ad analogos valores quantitatum

$$x, x+\Delta x, x+2\Delta x \text{ etc.} \text{ pertinent,}$$

erit valor quantitatis y , qui pertinet ad $x+n\Delta x$

$$y^n = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)\Delta^2 y}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 y}{1.2.3} + \dots$$

supposito $\Delta y = y' - y, \Delta^2 y = y'' - 2y' + y, \Delta^3 y = y''' - 3y'' + 3y' - y$

et generatim $\Delta^m y = y^{(m)} - m y^{(m-1)} + \frac{m(m-1)}{1.2} y^{(m-2)} - \dots$

Tabula, quae valores $n, \frac{n(n-1)}{1.2}$ etc. continet est in ephemeridibus Berol. 1789
(vid. q. connaissance de l'ans 1820 Mathkina)
construit une table de correction de secondes differences)

Ex. Queri l'us longitudo Lunae pro 24 Jun. 1810. hora 6
Et ephemeridibus habetur

x	$y = \text{longitudo lunae}$
Junii 24	$y = 15^\circ 5' 21'' 0$
24	$y' = 24 57 22$
25	$y'' = 40 38 11$
26	$y''' = 52 56 13$
27	
28	$y^{(4)} = 65 9 19$

ergo $\Delta y = + 12^\circ 57' 1''$
 $\Delta^2 y = - 16' 12''$
 $\Delta^3 y = + 8' 25''$
 $\Delta^4 y = - 34''$

$\Delta x = 24^h$ ergo $n = \frac{6}{14} = \frac{1}{4}$

$$y^n = y + n\Delta y + \frac{1}{2}n(n-1)\Delta^2 y + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\Delta^3 y + \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4 y$$

$$y^n = 15^\circ 5' 21'' 0 + 0.25(12^\circ 57' 1'') + 0.13(-16' 12'') + 0.01(8' 25'') + 0.0004(-34'')$$

$$y^n = 18^\circ 20' 4'' 9 \text{ quae sit longitudo lunae}$$

2. sit y aliqua functio quantitatis x . Sine cognitione huius functionis, sit
tamen aliqui singuli valores huius quantitatis dati ita, ut d. c.

$$y = A, B, C, D \text{ etc. pro } x = w, a, b, c \dots$$

nota sunt. Quae values nunc pro quolibet alio valore quantitatis x correspon-
dens valor quantitatis y .

Assumi potest quassita expressio inter y et x qua aequalis aliusque curvae
cujus abscissae w, a, b, c ordinatae A, B, C, \dots

Aequalis huius curvae generaliter habebit formam

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots$$

Ut autem satis sit datis conditionibus, erit

$$A = \alpha + \beta w + \gamma w^2 + \dots$$

$$B = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \dots$$

$$C = \alpha + \beta b + \gamma b^2 + \dots$$

Quoniam autem y per x ita exprimeri debet, ut y fiat aequale A, B, C, \dots si
 x aequatur w, a, b, c, \dots , assumi potest

$$y = A'X + B'X' + C'X'' + \dots$$

ubi autem X, X', X'' ita eligi debent, ut pro $x = w$, sit $X = 1, X' = 0, X'' = 0$

pro $x = a$, $X = 0, X' = 1, X'' = 0$ pro $x = b$, $X = 0, X' = 0, X'' = 1$ etc.

his equationibus autem satisfiet si sumimus

$$X = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}{(w-a)(w-b)(w-c)(w-d)}$$

$$X' = \frac{(x-w)(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-w)(a-b)(a-c)(a-d)}$$

$$X'' = \frac{(x-w)(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-w)(b-a)(b-c)(b-d)}$$

Substitutis his valoribus in ultima expressione pro y erit

$$y = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}{(w-a)(w-b)(w-c)(w-d)} \dots X A + \frac{(x-w)(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-w)(a-b)(a-c)(a-d)} \dots X' B + \frac{(x-w)(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-w)(b-a)(b-c)(b-d)} \dots X'' C \text{ etc.}$$

Sunt quoque aliae methodi sed hic fit satis, tantum has duas enu-
meratas esse.

Dracopus

Precessio et Nutatio

Jam Hipparchus primus Astronomus praeis temporibus, qui vixit circa annum 140 ante Christum Alexandria, observavit, quum suas observationes comparavit cum illis 160 annis prius a Timochari institutis, longitudinem omnium fixarum iniformiter progrediente tempore, crescere, quin latitudo aliquam mutationem habeat. - Ptolemaeus, qui circa annum 130 post Christum in eadem urbe observationes instituit, assumpsit hanc mutationem longitudinis aequalem uni gradui pro centum annis. Quum ista variatio longitudinis pro omnibus stellis sit eadem et latitudo immutata maneat, hoc phenomenon per assumptionem, puncta aequinoctialia retro moveri in invariabili plano elliptico in 100 annis uno gradu, explicari potest, vel in directione qua motui annuo solis opposita est. - Obliquitas elliptica quoque subiecta est alicui variationi, licet sit centies minor, ut etiam observationes novissimis temporibus cum prioribus comparatae comprobant.

Tandem Bradley ^{invenit} priores enarratas uniformes variationes quoque notabilibus perturbationibus esse obnoxias, quae autem in semper redeuntes periodos circa 18 annorum sunt inclusae. - Prius regularis motus retrogradus, vocatur Precessio aequinoctiorum, dein regularis motus, variatio anguli plani aequatoris cum illo elliptico, Secularis imminutio obliquitatis ellipticae, et tandem perturbationes periodicae horum motuum Nutatio.

Ego hic tantummodo propter brevitate temporis praescripti, notabilia et ea adferam, quae necessaria sunt ad calculandas observationes. Terra nostra assumitur quae corpus orbis ex rotatione alicuius Ellipseos circa adin minorum. - Si terra esset perfecta sphaera, dein attractio, uti facile comprobari potest, ceterorum corporum coelestium in eam esset eadem, ac si tota massa in centro esset concentrata. - Quum autem sit in potius compressa sphaerica v. c.

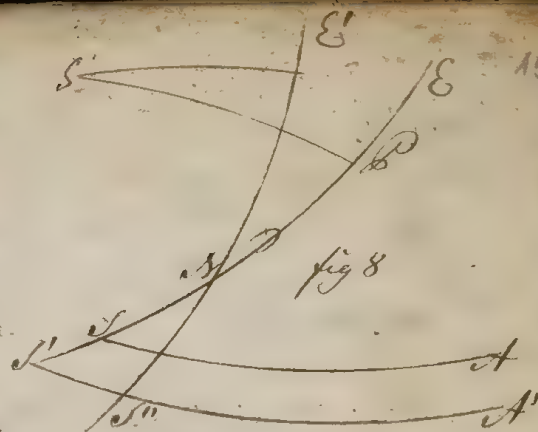
actio solis in terram in aequatore debet producere motum, qui, cum aequator in sua intersectione cum ecliptica movetur, planum aequatoris plane eclipticae semper appropinquaret, sine mutatione ipsius intersectionis ipsius. - Inclinatione aequatoris ad eclipticam igitur per ipsam medianam actionem solis decrederet et amborum linea in intersectionis esset firma, si Terra nullam rotationem circa axem haberet. Quum autem haec locum habeat, haec revolutio retinet aequatoris inclinationem, non versus eclipticam constantem et transmutat actionem solis in motum retrogradum lineae intersectionis vel aquatoris equinoctiorum; ipsa rotatio hinc adducit his equinoctiis mutationem, quae sine rotatione terrae, tantum apud inclinationem locum haberet, et ipsa, huius mutationis loco, dat inclinationi stabilitatem, quae sine rotatione in nodis locum haberet. Hic motus retrogradus equinoctiorum, nimirum praecepsio dependit igitur a compressione telluris et non mutat obliquitatem eclipticae. - Quod dictum est de actione solis, valet quoque de actionibus ceterorum corporum coelestium, de quibus autem tantum Luna, propter suam viciniam, aliquam notabilem influxum habet. Etiam Luna facit equinoctia aequatoris terrestris in plano orbis, per recedens et ambae actiones simul vocantur Praecepsio Lunisolaris, quae secundum novissimas determinationes, quotannis $50'' 34$ afficit.

Quum autem situs plani orbitae Lunae et inclinatio versus aequatorem mutabiles sint, actio Lunae quoque, quae alias, uti illa solis, constans esset, est variabilis. Pars constans huius actionis Lunae in terram est praedicta Praecepsio Lunisolaris, variabilis pars autem huius actionis, quae a vario situs orbitae Lunae versus aequatorem dependet, et in redeuntibus periodis 18-6 annorum et in motum equinoctiorum et in Mutationem obliquitatis eclipticae suum exercit influxum, vocatur Mutatio. Si vocemus BC longitudinem puncti in quo orbita Lunae eclipticam facit, et a quo puncto Luna se supra eclipticam elevat, h. e. si vocemus BC nodum ascendentem orbitae Lunae in ecliptica, celestis

celeberrimus Bradley invenit ex suis observationibus, Mutationem ef-
 ficere motum directum aequinoctiorum, qui Sinus δA proportionalis
 est, et immutatio nem obliquitatis eclipticae, quae Cosinus ejusdem
 anguli δA proportionalis est. Si ergo Sol et Luna tantum in terram
 agerent, inclinatio eclipticae versus aequatorem media (a periodica re,
 scilicet Mutatione independens) esset constans. Sed utraque corpora no-
 stri systematis solaris, quorum influxus in formam terrae quidem
 evanescit, habent tamen notabilem influxum in situm orbitae terrae,
 quem planum eclipticae plano aequatoris semper adpropinquare nitun-
 tur, et hoc est prius dicta secularis immutatio obliquitatis eclipticae.
 Ex hoc autem mutato situ orbitae terrae sequitur autem necessaria mu-
 tatio aequinoctiorum, et quidem motus directus circa $0^{\circ} 10'$ quotannis,
 qua quantitate ipsius Praecessio lunisolaris, quem habeat cum hoc
 motu directum contrariam, immitti debet. Si ergo est per actio-
 nem Solis et lunae effecta Praecessio lunisolaris secundum priora
 $50^{\circ} 34'$, universalis Praecessio, vel quae revera locum habet, erit $50^{\circ} 18'$.
 Haec duae actiones in fluxus planetarum sunt igitur a compressione
 terrae seu ab actione Solis et lunae in terram generatione independentes;
 sed cum actio Solis et lunae, mutato per actionem planetarum situ
 eclipticae quoque mutari debeat, sequitur, ex hac oriri motum aequa-
 toris terrestris Mutationi simili, cujus valor autem multo minor,
 et cujus periodus multo major erit, quam apud prius consideratam
 Mutationem lunae. Mutatione situs eclipticae per planchas producit
 igitur, conjunctim cum actione Solis et lunae in terram, in obliqui-
 tate aliquam parvam variationem, quae autem a prius considerata
 seculari immutatione diversa est.

Ut emulcantes omnes isti motus, adducemus aequatorem et hanc ecli-
 pticam mediam seu mobilem (denominatio vera eclipticae retinetur pro
 ecliptica fixata per periodicam mutationem, a qua mutatione hic abstra-
 himus) ad aliquod planum firmum, pro quo assumamus eclipticam.

anno 1750. Sit ergo SE haec firma ecliptica
 SA situs aequatoris pro anno 1750, uti et S'E'
 et S'S'A situs novae eclipticae et aequatoris
 pro 1750+t, ubi t est expressum in annis ejusq.
 partibus.



Propter solam attractionem solis et lunae in
 terram compressam secundum priora in hypothesis
 planorum A et E in S' recedit, quo obliquitas eclipticae non muta-
 tur. Hic motus retrogradus ab anno 1750 ad 1750+t vel praecessio
 lunisolaris sit ψ ergo $\psi = S'S'$. Quum autem quoq. planae centrum
 terrae attrahant, oritur motus plani E', et ex hac ratione A ab E' semper
 in aliis punctis et in aliis angulis secatur quam ab E. Hac ratione
 productus motus retrogradus intersectionis planorum A et E' in plano
 E' sui praecessio universalis, sit ψ_1 ergo ψ_1 erit aequale differen-
 tia arcuum NS' et NS. Si π sit longitudo nodi ascendantis plani
 E' in E, a fixo aequinoctio anni 1750 numerata deinde est:

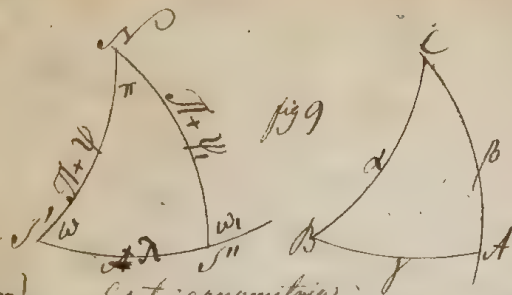
$$\pi = NS \text{ et } \pi + \psi = NS' \text{ et } \pi + \psi_1 = NS''$$

Per hanc universalem praecessum quoq. obliquitas eclipticae mu-
 tatur, et haec mutatio situs eclipticae, etiam mutabit attractionem
 quam habent Sol et Luna in terram compressam, ex quo oritur mo-
 tus plani A qui motus generabit aliquam speciem mutationis admo-
 dum longae periodi.

Sit quoq. π angulus plani E et E' ergo $\pi = S'NS''$ et angulus plani
 A et E pro tempore 1750 ergo $\omega = NS'S''$ et angulus planorum A et E'
 pro 1750+t ergo $\omega_1 = NS'S'A$, et deinde arcus $S'S'' = \lambda$, ergo S' aequi-
 noctium medium tempore 1750; S'' aequinoctium medium tempore
 1750+t, ω media obliquitas eodem tempore 1750+t.

Ex observationibus Bradley, conjunctim cum illis celeberrimi Ricci,
 invenit Bessel (fundamenta Astronomiae) pro ψ et ψ_1 ω et ω_1 sequentes valores
 pro anno 1750+t

$$\begin{aligned}\psi &= 50''.43099t - 0''.0001217945t^2 \\ \psi_1 &= 50''.176688t + 0''.0001221488t^2 \\ \omega &= 23^\circ 28' 18''.0 + 0''.00000984238t^2 \\ \omega_1 &= 23^\circ 28' 18''.0 - 0''.48368t - 0''.00000272295t^2\end{aligned}$$



Analog
regra

Ex trigonometria

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sin \frac{A+B}{2} &= \sin \frac{A-B}{2} \cotg \frac{A+B}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cos \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{A-B}{2} \cotg \frac{A+B}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sin \frac{A+B}{2} &= \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+B}{2} \end{aligned}$$

In his formulis ponatur

$$A = 180 - \omega, \quad B = \omega, \quad C = \pi, \quad \alpha = \pi + \psi$$

$\beta = \pi + \psi, \quad \gamma = \lambda$, prodibunt aequatio-
nes in contestu

$$\pi = 171^\circ 36' 10'' - 5'' 18t$$

$$\pi = 0'' 488926t - 0.0000030419t^2$$

$$\lambda = 0'' 17926t - 0.0002660394t^2$$

Indicabo breuiter rationem inueniendi has quantitates ex prioribus aequationibus.

Ultima priorum aequationum dat

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi - \psi_1}{2} \frac{\cos \frac{\omega_1 - \omega}{2}}{\cos \frac{\omega + \omega_1}{2}}$$

$$\text{Sed } \psi - \psi_1 = 0.082t - 0.000122t^2, \quad \omega_1 - \omega = -0.2418t - 0.00000628t^2$$

$$\frac{\omega_1 + \omega}{2} = 23^\circ 28' 18'' - 0.2418t + 0.00000356t^2$$

Si autem amittatur tertia et aliores potentiae quantitates t, prior aequa-
tio erit $\frac{\lambda}{2} = \frac{0.082t - 0.000122t^2}{\cos 23^\circ 28' 18''} = 0.2418t - 0.0000628t^2 + 0.0894t - 0.000133t$

$$\text{ergo } \lambda = 0.179t - 0.000266t^2$$

Valores quantitatums π et π quoque facile ex aequationibus sequentibus
inueniri possunt, (noto λ jam cognito)

$$\cos \pi = \sin \omega_1 \sin \omega \cos \lambda + \cos \omega_1 \cos \omega \text{ et}$$

$$\sin(\pi + \psi) = \frac{\sin \omega \sin \lambda}{\sin \pi} \text{ ubi pro } \omega, \lambda, \pi \text{ et } \psi \text{ valores de-}$$

bent substitui. - Prima harum aequationum dat quoque

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\omega_1 - \omega}{2} + \sin \omega_1 \sin \omega \sin^2 \frac{\lambda}{2} \text{ nimirum}$$

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2} &= (\sin \omega_1 \sin \omega)(1 - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}) + \cos \omega_1 \cos \omega = \cos(\omega_1 - \omega) - 2 \sin \omega_1 \sin \omega \sin^2 \frac{\lambda}{2} \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\omega_1 - \omega}{2} - 2 \sin \omega_1 \sin \omega \sin^2 \frac{\lambda}{2} \text{ ex quo etc} \end{aligned}$$

Ex his quantitatibus π et λ facile derivari
possunt. - In triangulo $AS'S''$ nimirum est

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \sin(\pi + \psi + \psi_1) &= \sin \frac{\psi - \psi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega_1 + \omega}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cos(\pi + \psi + \psi_1) &= \cos \frac{\psi - \psi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega_1 - \omega}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\omega_1 + \omega}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\psi - \psi_1}{2} \cos \frac{\omega_1 - \omega}{2} \end{aligned} \right\} (1)$$

ubi π semper debet ita sumi, ut π maneat
quantitas positiva.

Ex his aequationibus facile expressio appo-
proximantis pro valoribus quantitatums

π, π et λ ex priorum expressionum inue-
niri possunt, nimirum

$$\sin^2 \frac{\lambda}{2} = \sin^2 \frac{\omega_1 - \omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega_1 + \omega}{2}$$

Quum autem $\sin^2 \alpha = \alpha^2 \sin^2 1'' - \frac{\alpha^4}{2} \sin^4 1'' + \dots$ erit

$\pi^2 = (\omega_1 - \omega)^2 + \sin \omega_1 \sin \omega (\lambda^2 - \frac{\lambda^4}{1.2} \sin^2 1'' + \dots)$, et si negligamus tertias et altiores potencias quantitas λ^4 jam λ^4 erit aequalis zero, hinc

$$\pi^2 = (\omega_1 - \omega)^2 \left[1 + \frac{\lambda^2 \sin \omega_1 \sin \omega}{(\omega_1 - \omega)^2} \right] \text{ ex quo}$$

$$\pm \pi = (\omega_1 - \omega) \cdot \left[1 + \frac{\lambda^2 \sin \omega_1 \sin \omega}{2(\omega_1 - \omega)^2} \right]$$

$$\text{Sed } \omega_1 - \omega = -0.4836t - 0.00001266t^2, \lambda^2 = 0.09215t^2 - 0.000095388t^2$$

$$\sin \omega_1 \sin \omega = 0.15863 - 0.000000856t \text{ ergo}$$

$$\pm \pi = -0.4836t - 0.00001266t^2 - t \left[\frac{0.005100 - 0.000015159t}{0.9672 + 0.00002612t} \right]$$

$$\text{vel } \pm \pi = -0.4836t - 0.00001266t^2 - t(0.005100 - 0.000015159t) \left(\frac{1}{0.9672} - \frac{0.00002612t}{(0.9672)^2} \right) =$$

$$= -0.4836t - 0.00001266t^2 - t(0.0052729 - 0.0000158t)$$

vel tandem $\pm \pi = -0.4889t + 0.0000032t^2$ et hic debet signum superius adhibere, quum π cum t crescat, ergo

$$\pi = 0.4889t - 0.0000032t^2 \text{ uti prius fuit indicatum}$$

2. cum invento valore $\lambda = 0.17926t - 0.0002660394t^2$ et $\pi = 0.4889t - 0.0000036719t^2$

erit ex $\sin(\pi + \psi) = \frac{\sin \omega \sin \lambda}{\sin \pi} = \frac{\lambda}{\pi} \sin \omega$ si altiores potencias negligamus

$$\sin(\pi + \psi) = \frac{0.17926 - 0.0002660394t}{0.48892 - 0.0000036719t} \cdot \sin \omega = (0.17926 - 0.0002660394t) \left(\frac{1}{0.48892} + \frac{0.0000036719t}{(0.48892)^2} \right) \sin \omega =$$

$$= (0.17926 - 0.0002660394t)(2.045324 + 0.0000128508t) \sin \omega =$$

$$= (0.3666447 - 0.0005418330t) \sin \omega.$$

Quum jam t^2 neglectum est, hic pro $\sin \omega$ simpliciter poni potest

$$\omega = 23^\circ 28' 18'', \text{ ex quo fit}$$

$$\sin(\pi + \psi) = 0.14603295 - 0.0002188096t.$$

Notemus hic pro $t=0$ $\psi=0$, ergo $\sin \pi = 0.14603295$ ergo

$\pi =$ vel $8^\circ 23' 49'' 55$ vel $= 171^\circ 36' 10'' 45$. Sed hic secundus valor jam debet, quia tangens anguli π est negativa, uti sequitur ex aequatione

$$\operatorname{tg}(\pi + \psi) = \frac{\sin \lambda}{\cos \omega \cos \lambda - \sin \omega \cot \psi} \text{ quae aequatio quoque ita scribi potest}$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \psi) = \frac{\sin \lambda}{\cos \omega (\cos \lambda - 1)} = - \frac{\sin \lambda}{2 \cos \omega \sin^2 \frac{\lambda}{2}} \text{ et quum igitur hanc}$$

tangens

tangens sit negativa, Π jacet in secundo quadrante:)

Nunc sit $a = 0.14603295$, $b = 0.0002158096$, ergo

$$\sin(\Pi + \Psi) = a - bt$$

$$\sin(\Pi + \Psi) \sin 1'' = \sin(\Pi + \Psi) + \frac{1}{6} \sin^3(\Pi + \Psi) + \frac{3}{40} \sin^5(\Pi + \Psi) \\ = (a + \frac{a^3}{6} + \frac{3a^5}{40} + \frac{5a^7}{112} \dots) - (1 + \frac{a^2}{2} + \frac{3a^4}{8} + \frac{5a^6}{16} \dots) bt$$

$$= 0.1465570 - 1.01083636t \text{ sine}$$

$$\Pi + \Psi = \frac{0.1465570 - 0.0002181482t}{\sin 1''} \text{ et } \Pi + \Psi = 8^\circ 23' 49''.5 - 44''.9963t$$

et quum secundum priora complementum hujus anguli sumi debeat,

$$\Pi + \Psi = 171^\circ 36' 10''.5 + 44''.9963t, \text{ sed } \Psi = 50''.1761t, \text{ ergo}$$

$$\Pi = 171^\circ 36' 10''.5 - 5''.1798t$$

Si vellentus quadrare nunc mutationes, quae in longitudine et latitudine alicujus stellae per praecessionem producantur, erit, posita tantum obliquitate ecliptica variabili

$$\partial \Delta = \partial \epsilon \tan \beta \cos \Delta, \quad \partial \beta = -\partial \epsilon \sin \Delta$$

Sint nunc L et B longitudo et latitudo alicujus stellae respectu lineae eclipticae pro 1750. l et b pro variabili pro 1750+t, dicitur sequitur ex prioribus aequationibus differentia lib. us immediate

$$l = L + \pi \tan \beta \cos(L - \Pi), \quad b = B - \pi \sin(L - \Pi)$$

quae aequationes longitudinem et latitudinem in variabili ecliptica pro 1750+t exprimerent, si tantum obliquitas ecliptica esset variabilis. Quum autem inclinatio eclipticae cum aequatore in tempore t se quoque mutavit et a S ad S'' recedebat, omnes longitudes stellarum quantitate SS'' $NS = \Psi$ creverunt, ergo erit

$$l = L + \Psi + \pi \tan \beta \cos(L - \Pi)$$

$$b = B - \pi \sin(L - \Pi)$$

Sit etiam l' , b' longitudo et latitudo pro ecliptica variabili pro 1750+t,

$$\text{dicitur} \quad l' = L + \Psi' + \pi \tan \beta \cos(L - \Pi')$$

$$b' = B - \pi \sin(L - \Pi') \text{ et differentia harum aequationum}$$

dabit, si ponatur $\Delta = L - \frac{1}{2}(\Pi - \Pi')$

$$l' = l + (\Psi' - \Psi) + (\pi - \pi) \tan \beta \cos \Delta, \quad b' = b - (\pi - \pi) \sin \Delta$$

et per has aequationes longitudo et latitudo l , b pro 1750+t ad longitudes l' et latitudinem pro 1750+t reduci possunt.

Nunc

Nunc sint α & δ ascensio recta et Declinatio observata al' ejus alt' et si vocetur ascensio recta numerata ab intersectione planorum A et E $\alpha + \lambda$ dein invenietur longitudo et latitudo L, B pro ecliptica fixa et pro Epocha 1750 per sequentes expressiones:

$$\begin{aligned} \cos B \cos(L + \psi) &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) \\ (A) - \cos B \sin(L + \psi) &= \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) \cos w + \sin \delta \sin w \\ \sin B &= -\cos \delta \sin(\alpha + \lambda) \sin w + \sin \delta \cos w \end{aligned} \quad (L = l - \psi \text{ approximati})$$

et si inverse ex longitudine et latitudine L, B, pro aliqua Epocha et pro ecliptica fixa, ascensio recta et declinatio pro qualibet alio tempore querenda esset, est, si pro secunda Epocha omnes quantitates cum superioribus applicate signo notentur:

$$\begin{aligned} \cos \delta' \cos(\alpha' + \lambda') &= \cos B \cos(L + \psi') \\ \cos \delta' \sin(\alpha' + \lambda') &= \cos B \sin(L + \psi') \cos w' - \sin B \sin w' \\ \sin \delta' &= \cos B \sin(L + \psi') \sin w' + \sin B \cos w' \end{aligned}$$

Si ex his et prioribus aequationibus eliminantur L et B, dein oriantur expressiones, per quas ascensio recta et declinatio pro 1750 + t' inveniantur, si eadem quantitates sunt datae pro 1750 + t. Si revera eliminantur istae quantitates, erit, proinde $u = \psi' - \psi$

$$\begin{aligned} \cos \delta' \cos(\alpha' + \lambda') &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) \cos u - \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) (\cos w \sin u - \sin \delta \sin w \sin u) \\ \cos \delta' \sin(\alpha' + \lambda') &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) \cos w \sin u + \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) [\cos w \cos w \cos u + \sin w \sin w] + \sin \delta \sin w \cos w (\cos u - \cos w \sin w) \\ \sin \delta' &= \cos \delta \cos(\alpha + \lambda) \sin w \sin u + \cos \delta \sin(\alpha + \lambda) [\cos w \sin w \cos u - \sin w \cos w] + \sin \delta (\sin w \sin w \cos u + \cos w \cos w) \end{aligned}$$

Si nimirum brevitatis causa ponantur priores aequationes (A) ita

$$\begin{aligned} \cos B \cos(L + \psi) &= M, \\ \cos B \sin(L + \psi) &= N, \\ \sin B &= P \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ubi } M, N, P \text{ quantitates notae ab} \\ \alpha, \delta, \lambda \text{ dependentes sunt} \end{array} \right.$$

Dein est, ubi quilibet facile videbit

$$\begin{aligned} \cos B \cos L &= M \cos \psi + N \sin \psi \\ \cos B \sin L &= N \cos \psi - M \sin \psi \\ \sin B &= P \end{aligned}$$

haec quantitates rite substitutas dabunt aequationes adductas

Sint nunc ψ, ψ' et w, w' valores quantitatum ψ et w pro temporibus 1750 + t et 1750 + t', dein nota sunt in triangulo sphaerico quod formatur ab arcu $\psi' - \psi$, in fixa ecliptica existente, pro arcuum angulorum in primis et in secunda Epocha, arcus $\psi' - \psi$ et anguli adjacentes w' et $180 - w$. Sit nunc latus ad w' aequale $90 + z$, et ad $180 - w$ aequale $90 - z$ et tertius angulus

aequalis

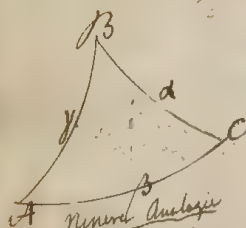
aequalis θ diu inuenitur α α' et θ et sequentibus aequationibus

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{\cos \frac{w' + w}{2}}{\cos \frac{w' - w}{2}} \operatorname{tg} \frac{\psi' - \psi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \frac{\sin \frac{w' - w}{2}}{\sin \frac{w' + w}{2}} \operatorname{cog} \frac{\psi' - \psi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = \frac{\sin \frac{\alpha' + \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \operatorname{tg} \frac{w' + w}{2}$$

Ego adducam hic figuram ut qualibet facilius perspiciat proceden-
tis aequationes.



Reputa Analogie
 $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{A - B}{2}}{\cos \frac{A + B}{2}} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$
 $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{A - B}{2}}{\sin \frac{A + B}{2}} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$
 $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \operatorname{cog} \frac{A - B}{2}$

propositis hic

$$A = w', B = 180 - w$$

$$C = \theta, \alpha = 90 - z$$

$$\beta = 90 + z$$

$$\gamma = \psi' - \psi$$

orientur pro,
res aequatio-
nes



In triangulo $S' \Sigma' D$ est $S'D = 90 - z$, $\Sigma'D = 90 + z$, $S'\Sigma' = \psi' - \psi$
 $N\Sigma'D = w$, $N\Sigma'D = w'$, $S'D\Sigma' = \theta$

Notis hac ratione α , α' et θ inuenitur ascensio recta et declinatio
 α' α' pro $1750 + t'$ ex ascensione recta et declinatione α , α pro $1750 + t$
per sequentes prioribus analogas expressiones:

$$\cos \alpha' \sin(\alpha' + \lambda - z') = \cos \alpha \sin(\alpha + \lambda + z)$$

$$\cos \alpha' \cos(\alpha' + \lambda - z') = \cos \alpha \cos(\alpha + \lambda + z) \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$$

$$\sin \alpha' = \cos \alpha \cos(\alpha + \lambda + z) \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta$$

(quod ex figura). Vid. Refut. fund. Astron. et Annalen. Rohnenburger, des Wien St. S. B.

Si $t' - t$ non est magnam, aequationes $\operatorname{tg} \frac{\alpha' - \alpha}{2}$ etc. simplicius ita exprimi possunt

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \cos w \operatorname{tg} \frac{\psi' - \psi}{2}$$

$$\alpha' - \alpha = \frac{w' - w}{\sin w \operatorname{tg} \frac{\psi' - \psi}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha' + \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \operatorname{tg} w$$

et aequationes quoque $\cos \alpha \sin(\alpha' + \lambda - z')$ alio modo exprimi possunt:

$$\text{sit } \operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\cos(\alpha + \lambda + z)}, \text{ sin est}$$

$$\cos \alpha' \sin(\alpha' + \lambda - z') = \cos \alpha \sin(\alpha + \lambda + z)$$

$$\cos \alpha' \cos(\alpha' + \lambda - z') = \sin m \cos(m + \theta)$$

$$\sin \alpha' = \frac{\sin m \sin(m + \theta)}{\sin m} \text{ et s. p.}$$

Ad inveniendas mutationes in Ascensione recta et declinatione erit:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\lambda \cos \pi \cos \beta}{\cos \delta} - d \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ex prioribus.} \end{array} \right.$$

$$d\delta = d\lambda \sin \pi \cos \beta + d \sin \alpha$$

vel

$$\frac{d\alpha}{dt} = d\lambda (\cos \pi + \sin \pi \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) - d \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si pro } \cos \pi \text{ et } \sin \pi \text{ ponantur} \\ \text{valores; etiam jam habuimus} \end{array} \right.$$

$$d\delta = d\lambda \sin \pi \cos \alpha + d \sin \alpha$$

ergo quoque est

$$\frac{d\alpha}{dt} = d\psi (\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) - d \operatorname{tg} \delta \cos \alpha$$

$$d\delta = d\psi \sin \omega \cos \alpha + d \sin \alpha$$

et haec erunt mutationes in ascensione recta et declinatione, supposito novam ascensionem esse sumptam a puncto S. Quoniam autem debeat poni a puncto S, α debet augeri quantitate λ vel poni aequalis $\alpha + \lambda$. Quam praeterea $d\psi$ respectu $d\psi$ est admodum parvum, erit

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\psi}{dt} (\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tg} \delta \sin \alpha)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \sin \omega \cos \alpha$$

proposito nunc brevitatis causa

$$m = -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \omega$$

$$n = \frac{d\psi}{dt} \sin \omega$$

erit

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha$$

et haec sunt annuae mutationes in ascensione recta et declinatione quae producuntur a profectione.

Si praedictum ex prius datis valoribus quantitatum ψ , ω , et λ coëfficien-
tiales differentiales $\frac{d\psi}{dt}$ etc erit pro anno 1750+t

$$m = 45.99592 + 0.0003086450t \quad \text{et}$$

$$n = 20.05039 - 0.0000970204t$$

Secundum novissimas observationes et calculos celeb. Bessel erit pro epocha anni 1800

$$m = 46.01135 + 0.0003086450t$$

$$n = 20.04534 - 0.0000970204t$$

Priorum expressiones pro $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d\delta}{dt}$ sufficient pro omni casu, ubi differentia temporum non est admodum magna.

J. d. omph

Exempl. Aldebaran (α Tauri) dat pro anno 1800

$$\alpha = 66^{\circ} 7' \quad \delta = 16^{\circ} 6' \quad t = 50$$

$$m = 46.011 \quad n = 20.045$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 51.30 \quad \frac{\partial \delta}{\partial t} = 8.11$$

Si vellemus in determinatione praecessioni respicere quoque membra, quae dependent a quadrato temporis, sint α , δ & δ' pro tempore T , et α' , δ' pro tempore $T+t$.

His suppositis erit

$$\alpha' = \alpha + t \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \dots$$

$$\delta' = \delta + t \cdot \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \dots$$

ubi secundum procedentia est:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = m + n \log \sin \alpha$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = n \cos \alpha$$

ergo est, si has expressiones differentiantur

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial m}{\partial t} + \sin \alpha \log \frac{\partial \alpha}{\partial t} + m n \cos \alpha \log \frac{\partial \alpha}{\partial t} + n \sin 2\alpha \log \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} n^2 \sin 2\alpha$$

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \cos \alpha \frac{\partial n}{\partial t} - m n \sin \alpha - n^2 \sin^2 \alpha \log \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

$$\text{ubi} \quad \frac{\partial m}{\partial t} = 0.0003086450$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -0.0000970204$$

Nunc transiamus ad Mutationem

Hi hucusque considerati, cum tempore progredientes, vel factum in admodum longas periodos inclusi motus puncti nequi nocturni et obli, quilibet elliptici, sunt adhuc alii perturbationi, mutationi subiecti, quae in tempore 18.6 annorum ^{circiter} iterant. Quoniam autem nodi orbitae lunae in ecliptica in hoc plano habent peripheriam in eadem periodo percur, rant, iam prioribus temporibus auspiciantur, has perturbationes de, pendere aliqua rotatione a situ horum nodorum. Ex magno numero ad hunc finem factarum observationum invenit Bradley, per Mutationem punctum verum progredi, ergo longitudinem stellarum deesse, scere quantitate, quae sinu longitudinis nodi ascendentis orbitae lunae in ecliptica proportionalis est, et in suo maximo aequatur 18" et obliqui

tabula

et obliquitas eclipticæ quoque variationis subire, quæ locum huius anguli æqualis est, et in suo maximo $9^{\circ} 6'$ æquatur, latitudinemq. stellæ hanc immutatam manere. Ex hac sequitur Mutationem habere secundum damentum in variatione æquatoris circa hanc fixam assumptam eclipticam, vel ascensum terre, describere in periodo 18.6 annorum in superiorem redeuntem lineam in superficie coeli, quanquam, uti constantia altitudinum poli omnium locorum indicat, illa semper idem punctum superficiæ terre occupat. Per sequentem hypothesin hic motus enunciiari potest. — Imaginamur nobis per polos æquatoris circulum circa polos eclipticæ, cuius distantia a polo igitur obliquitas eclipticæ erit æqualis. — In hac circulo movetur poles æquatoris quantitate quotannis $50'$ ab ortu occipitum versis. Per hanc assumptionem ergo longitudo astrorum quavis annis hac quantitate crescit, latitudo autem vel locus polorum eclipticæ manet immutata. Et hoc est præcipuum, quod, uti prius dictum fuit, præstatim ex actione solis et Lunæ in terram compressam oritur. —

Alia ratio, actio planetarum in orbitam terre, centro huius circuli nimirum polo eclipticæ, dat aliquem parvum motum circa polum æquatoris, per quod ipse circulus semper immittitur, ergo potissimum latitudo astrorum mutatur et declinatio constans manet. —

Hæc hypothesi explicat prius consideratam facularum immixtionem eclipticæ, quæ igitur ex aliquo motu polorum eclipticæ circa quiescentes polos æquatoris oritur. —

Longitudo et latitudo, aspectus recta et declinatio, quæ referuntur ad constanter tantum per præcessionem pugnantem verum, et ad tantum per facularum immixtionem ^{conspicuum} obliquitatem eclipticæ referuntur, vocantur medie.

Quam Mutationem, uti prius dictum est, latitudinem stellarum non mutat, ea oritur ex aliquo motu æquatoris circa qua fixam assumptam eclipticam, uti præcessio. Imaginamur nobis punctum superius considerati circuli (cuius poles quiescens, poles eclipticæ est:),

ubi est polus aequatoris qua centrum alicujus ellipsos, ejus axis
 major $2h = 19^{\circ} 30'$ circulum latitudinis tangit, et axis minor $2g = 14^{\circ} 36'$
 ad hunc circulum latitudinis perpendicularis est. Centrum ellipsos
 est medius polus aequatoris, et longitudo veri poli, qui est in peripheria
 hujus ellipsos determinatur sequenti ratione. Describitur in plano
 ellipsos, circulus, cujus centrum est centrum ellipsos, et cujus ra-
 dius est semiaxis major h ellipsos, et supponatur radius hujus cir-
 culi moveri motu uniformi circa suum centrum in directione, qua contra-
 ria est anno motui solis, ita, ut hic radius cum dimidia axis majori
 quae maxime propinqua est eclipticae, tum coincidit, si nodus ascendens
 orbitae lunae in ecliptica cum puncto verno coincidit. Si deinde ex
 puncto extremo hujus radii ad axem majorem ellipsos demittatur per-
 pendiculum, punctum intersectionis hujus perpendiculari cum periphe-
 ria ellipsos, erit locus veri poli aequatoris, et hic motus veri poli
 in sua ellipsi circa medium polum, declarat Nutationem. —

Quum secundum hanc hypothesein, axis major ellipsos in coluro
 solstitionum jaceat, angulus quem radius mobilis cum linea nodi-
 rum orbitae lunae eo tempore facit, ubi ipse radius cum axi majori
 ellipsos coincidit, erit rectus, et quum et motus istius radii et
 motus medi nocti lunae sit uniformis, et in eadem directione progre-
 ditur, clarum est, hunc angulum in tota revolutione radii manere ac-
 quatum rectum, h. e. radium cum semiaxi majori quae maxime vicina
 est eclipticae, formare angulum, qui aequalis $\angle BC$ vel aequalis longi-
 tudini Nodi ascendens orbitae lunae in ecliptica est. — Sit ergo Z hoc
 perpendiculum ab extremo puncto radii ad axem majorem, et Y pars
 hujus perpendiculari inter axem majorem et arcum, et tandem pars axis
 majoris inter perpendiculum et centrum ellipsos, erit

$$\frac{Z}{Y} = \tan \angle BC$$

et si A est angulus, quem radius ellipsos, h. e. linea quae verum polum
 aequatoris cum medio conjungit, cum axi majori format, dicitur est.

$$\tan A = \frac{Z}{Y} \text{ ergo quoque } \tan A = \frac{Z}{Y} \tan \angle BC$$

et quum $\frac{Z}{Y} = \frac{g}{h}$, erit $\tan A = \frac{g}{h} \tan \angle BC$, hinc

$$x = h \cos \delta \alpha \quad \text{et} \quad y = x \operatorname{tg} A = g \sin \delta \alpha$$

Si nunc conjungamus extrema puncta lineae y cum polo
eclipticae, erit triangulum sphaericum, in quo duae li-
neae sunt y et $x+e$, si e est media obliquitas eclipticae.
In hoc triangulo est hypotenusa aequalis verae obliqui-
tatis eclipticae $e+de$ et hypotenusae adiacens angulus
aequalis quaresimali mutationi puncti aequinoctialis $d\lambda$.

$$\text{Erit igitur} \quad \cos(e+de) = \cos y \cos(x+e) \quad \text{et}$$

$$\operatorname{tg} d\lambda = \frac{\operatorname{tg} y}{\sin(x+e)}$$

Quia autem x, y et de tantummodo parvos habeant va-
lores, pro prioribus aequationibus poni potest

$$de = x$$

$$d\lambda = -\frac{y}{\sin e}$$

ergo est, si priores valores

quantitatum x et y substituamus

$$de = h \cos \delta \alpha = g \sin \delta \alpha, \quad d\lambda = -g \frac{\sin \delta \alpha}{\sin e} = -18.03 \sin \delta \alpha$$

$$\text{si } e = 23^\circ 28' \text{ est,}$$

ut ex his inventis quantitatibus $d\lambda, de$, inveniat quae muta-
tio in ascensione recta et declinatione $d\alpha$ et $d\delta$, recte illarum
debemus ad priores aequationes differentiales, in quibus autem
 $d\beta = 0$ poni debet, invenitur hac ratione, si quoque pro $d\lambda$ et de po-
nuntur valores.

$$d\alpha = -g \frac{\sin \delta \alpha}{\sin e} \cdot \frac{\cos \pi \cos \beta}{\cos \delta} - h \cos \delta \alpha \cdot \frac{\sin \delta \cos \alpha}{\cos \delta}$$

$$d\delta = -g \frac{\sin \delta \alpha}{\sin e} \cdot \sin \pi \cos \beta$$

sed secundum priora quoque est

$$\cos \pi \cos \beta = \cos e \cos \delta + \sin e \sin \delta \sin \alpha$$

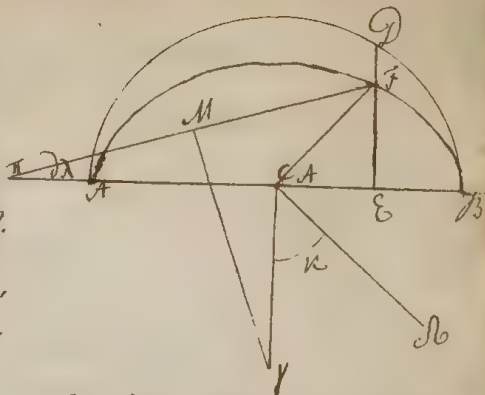
$$\sin \pi \cos \beta = \sin e \cos \alpha \quad \text{ergo}$$

$$d\alpha = -g \sin \delta \alpha \operatorname{ctg} e - (h \cos \delta \cos \delta \alpha + g \sin \delta \sin \delta \alpha) \operatorname{tg} \delta$$

$$d\delta = -g \sin \delta \alpha \cos \alpha + h \cos \delta \alpha \sin \alpha$$

et haec ultimae aequationes continent mutationem ascensionis rectae et decli-
nationis vel quantitates $d\alpha$ et $d\delta$, quae cum suis signis ad medias ascensio-
nis rectae et declinationis addi debent ut verae, seu ut vocantur, appa-
rentes ascensionis rectae et declinationes obtineantur. Haec expressiones
plures admittunt transformationes quarum hic duas adferam

$$1. \text{ Si ponatur } Q = g \sin \delta \operatorname{tg} \delta + g \operatorname{ctg} e, \quad Q' = -g \cos \delta, \quad q = h \cos \delta \operatorname{tg} \delta \quad q' = h \sin \delta$$



In F est polus aequatoris, π polus eclip-
ticae, $DE = x, EF = y, CE = e, \operatorname{tg} K = \frac{y}{x}$.

$$\operatorname{tg} A = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{y}{x} \operatorname{tg} K$$

$$x = a \cos K, \quad y = x \operatorname{tg} K = g \sin K$$

Nunc non amplius $\pi A C B$ est colu-
rus, sed πF .

$$e+de = \pi F, \quad F \pi C = d\lambda$$

$$\cos(e+de) = \cos(e+x) \cos y$$

$$\operatorname{tg} d\lambda = \frac{\operatorname{tg} y}{\sin(x+e)}$$

$$\cos e - de \sin e = (\cos e - x \sin e) \cos y$$

$$\text{sed } \cos y = 1 \text{ ergo } de = x$$

$$d\lambda = \frac{\operatorname{tg} y}{\sin(x+e)} = \frac{y}{\sin e}$$

$d\lambda$ debet esse cum signo

— quia longitudo δ et λ et

π quadrante per mutationem
inimur.

et quocirca $\lg B = \frac{g}{2}$ $\lg B' = \frac{g'}{2}$ $b = -\frac{2}{\cos B}$ $b' = \frac{2}{\cos B'}$

erit
$$\begin{aligned} d\alpha &= b \sin(B + \delta\delta) \\ d\delta &= b' \sin(B' + \delta\delta) \end{aligned}$$

nimirum

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{h \cos \alpha \lg d}{g \sin \alpha \lg d + g \lg e}, \quad \cos B = -\frac{2}{g}$$

$$\cos B = -\frac{g \sin \alpha \lg d + g \lg e}{2} \quad b \sin B = -h \cos \alpha \lg d \quad \text{hinc}$$

$$\begin{aligned} d\alpha &= -g \sin \alpha \lg d + b \sin B \cos \delta\delta - g \sin \alpha \sin \delta\delta \lg d = \\ &= \sin \delta\delta (\sin \alpha \lg d + g \lg e) + b \sin B \cos \delta\delta = \\ &= -\sin \delta\delta \cdot 2 + b \sin B \cos \delta\delta \cdot 2 = b \cos B \sin \delta\delta + b \sin B \cos \delta\delta \cdot 2 \\ &= b \sin(B + \delta\delta) \quad \text{eadem ratione pro } d\delta \end{aligned}$$

Haec formulae sunt admodum simplices, ad omnes hic quae quantitates constan-
tes $\lg g = 0.85612$, $\lg h = 0.98453$ et $g \lg e = 16''.54$
Etiam facile possunt conscribi tabulae.

2. Si ponatur

$$x = g \sqrt{1 + \left(\frac{h^2}{g^2} - 1\right) \cos^2 \delta\delta}$$

$$\lg y = \frac{(1 - \frac{1}{2}) \sin \delta\delta \cos \delta\delta}{1 - (1 - \frac{1}{2}) \cos^2 \delta\delta} \quad \text{et}$$

$$z = -g \lg e \sin \delta\delta$$

erit
$$\begin{aligned} d\alpha &= -x \lg d \cos(\delta\delta + y - \alpha) + z \\ d\delta &= -x \sin(\delta\delta + y - \alpha) \end{aligned}$$

Et haec expressiones sunt potissimum aptae ad construendas tabulas muta-
tionis admodum simplices.

Proprie sunt tuncque dati valores quantitatibus $d\alpha$ et $d\delta$ tantum pro,
eiusque expressiones mutationis longitudinis stellarum et obliquitatis
eclipticae. Theoria ostendit, expressionem totam mutationis dependere
a longitudine solis et lunae, et expressionem proprie esse

$$d\alpha = -18''.03 \sin \delta\delta - 1.13 \sin 2\delta - 0.22 \sin 2\delta$$

$$d\delta = 9.65 \cos \delta\delta + 0.49 \cos 2\delta + 0.09 \cos 2\delta - 0.09 \sin \delta\delta$$

ubi δ et δ' sunt longitudo solis et lunae. Pro usu sunt ex his membris,
exceptis his jam prius consideratis, et a simplici angulo $\delta\delta$ pendens libris,
tantum ea notata digna, quae a duplici longitudine solis dependent. Mutatio
solaris in ascensione recta et declinatione, quae ex terminis

$$d\alpha = -g' \sin 2\delta$$

$$d\delta = -h' \cos 2\delta \quad \text{constat ubi } g' = 1.13, h' = 0.49$$

invenitur

invenitur si in prioribus expressionibus quantitatum α et α' pro g ponatur $g' \sin e$, pro h , h' et pro angulo δ et angulus 20 .

Invenitur hac ratione, si ponatur $R = g' \sin e \sin \delta \tan \alpha + g' \cos e \dots R' = -g' \sin e \cos \delta$
 $r = h' \cos \delta \tan \alpha' \dots r' = -h' \sin \alpha \dots \tan \alpha = \frac{r}{R} \quad \tan \alpha' = \frac{r'}{R'}$
 $c = -\frac{R}{\cos \delta} \quad c' = -\frac{R'}{\cos \delta'}$

Prius jam satis enucleatum est, quomodo ex Mutatione longitudinis et obliquitatis eclipticis, mutatio in ascensione recta et declinatione derivari possit, haec enim aliqua adhuc adferam.

Ex prioribus constat

$$\tan \alpha = \frac{\cos \beta \sin \lambda \cos \omega - \sin \beta \sin \omega}{\cos \beta \cos \lambda}$$

$$\sin \delta = \cos \beta \sin \lambda \sin \omega + \sin \beta \cos \omega$$

ubi ω est obliquitas eclipticis, λ , β , longitudo et latitudo δ . Si nunc λ et ω per mutationem transierint in $\lambda + d\lambda$ et $\omega + d\omega$, transierint in α et δ in $\alpha' = \alpha + d\alpha$, $\delta' = \delta + d\delta$; quaerantur α' et δ'

secundum Mathematicum est in tali casu

$$\alpha' = \alpha + \left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) d\lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right) d\lambda^2 + \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right) d\omega + \left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda d\omega}\right) d\lambda d\omega + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) d\omega^2 \text{ et}$$

$$\delta' = \delta + \left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) d\lambda + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\delta}{d\lambda^2}\right) d\lambda^2 + \left(\frac{d\delta}{d\omega}\right) d\omega + \left(\frac{d^2\delta}{d\lambda d\omega}\right) d\lambda d\omega + \left(\frac{d^2\delta}{d\omega^2}\right) d\omega^2$$

sed, ubi ex aequationibus prioribus facile invenitur, est

$$\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) = \cos \omega + \sin \alpha \tan \delta \sin \omega \quad \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right) = -\cos \alpha \tan \delta$$

$$\left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) \sin \omega \cos \alpha \quad \left(\frac{d\delta}{d\omega}\right) = \sin \alpha$$

propterea

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right) = \left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) \cos \alpha \tan \delta \sin \omega + \left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) \frac{\sin \alpha \sin \omega}{\cos \delta} = \sin \omega \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \tan \omega \cos \alpha \tan \delta + \sin 2\alpha \tan \delta \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda d\omega}\right) &= -\left(\frac{d \cos \omega}{d\omega}\right) + \left(\frac{d \sin \alpha}{d\omega}\right) \tan \delta \sin \omega + \left(\frac{d \tan \delta}{d\omega}\right) \sin \alpha \sin \omega + \left(\frac{d \sin \omega}{d\omega}\right) \frac{\sin \alpha}{\cos \delta} = \\ &= -\sin \omega + \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right) \cos \alpha \tan \delta \sin \omega + \left(\frac{d\delta}{d\omega}\right) \frac{\sin \alpha \sin \omega}{\cos \delta} + \cos \omega \frac{\sin \alpha}{\tan \delta} = \\ &= -\sin \omega (\cos \alpha - \tan \omega \sin \alpha \tan \delta + \cos 2\alpha \tan \delta) \end{aligned}$$

Si ita procedimus, habebimus

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= (\cos \omega + \sin \omega \sin \alpha \tan \delta) d\lambda - \cos \alpha \tan \delta d\omega + \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \tan \omega \cos \alpha \tan \delta + \sin 2\alpha \tan \delta \right) \frac{1}{2} \sin \omega d\lambda^2 \\ &\quad - (\cos \alpha - \tan \omega \sin \alpha \tan \delta + \cos 2\alpha \tan \delta) \sin \omega d\lambda d\omega - \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \tan \delta \right) \frac{1}{2} d\omega^2 \end{aligned}$$

et

et

$$S'' - S' = \sin w \cos \alpha. d\lambda + \sin \alpha dw - \sin \alpha (\cos w + \sin \alpha \cos \delta)^{\frac{1}{2}} d\lambda \sin w \\ + \cos \alpha (\cos w + \sin \alpha \cos \delta)^{\frac{1}{2}} \sin w. d\lambda dw - \cos \alpha \cos \delta^{\frac{1}{2}} dw^2$$

si in his expressionibus pro $d\lambda$ et dw inventi valores substituantur, habebimus quæsitam Mutationem. —

Pro præcessionem æquinoctiorum quoque valent istæ expressiones, si pro $d\lambda$, dw ponantur sequentes approximati valores, nimirum est secundum

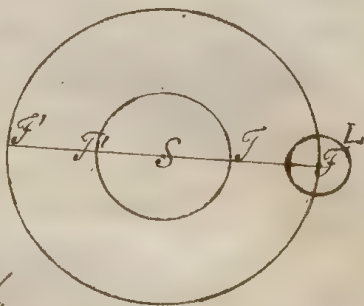
Bessel $d\lambda = 50.3405 - 0.0002436t$, $dw = +0.00001968t$
ubi t numerus annorum. —

Aberratio

Aliud phenomenon non minus notabile dignum est Aberratio; hoc phenomenon consistit in id, ut omnia sidera quotannis describere videantur elliptes parvas plus vel minus excentricas, neque conservare suum respectum locum.

Hoc phenomenon facile explicatur per rotationem terræ circa solem et per intervallum temporis, quod requiritur, ut lumen ab astro perueniat ad oculum nostrum. Per observationes nimirum, quæ cuilibet notæ sunt, invenitur est, lumen indigere $8' 18''.2$ ad percurrendum semiam majorem orbis telluris.

Ut autem quilibet rationem intelligat, sit S sol, T orbita terræ, F orbita Jovis. Si terra est in T et Jupiter in F , hic planeta erit in oppositione et multo propinquior terræ quam si esset in conjunctione, h. e. si existeret Jovis in F' terra esset in T' . Si hoc statu circumstantiarum calculatur immersio vel emergens aliusque label.



calculus et comparatus hoc resultatum calculi cum phenomenon hoc observato, manifestat differentiam et quidem apparet hoc phenomenon pendere $16' 26''.4$ tempore conjunctionis quam tempore oppositionis; concluditur igitur, lumen percurrere semiam majorem orbis telluris in $493''.2$. —

Propito hoc, si terra et aliquod astrum succens supponuntur in quiete in
 spatio, nos videlicet hoc astrum secundum directionem radii, qui in aëre
 pugis aëtri nobis aëruit, sed si terra percurreret ellipticam in anno fide,
 sed, et igitur arcum $20^{\circ} 45'$ in $1193^{\circ} 2'$ temporis, hoc sua celeritas compa-
 rari poterit cum illa luminis; igitur quoque, si scilicet lucis alicuius aëtri
 pervenerit ad oculum nostrum, propito astro quiescente, propter motum ter-
 re, astrum jam videlicet in alio loco et oculum habebit sensationem con-
 spicuum, quæ representatur per resultantem harum celeritatum, et quæ
 quoque facit, ut videamus astrum in directione huius resultantis.
 Angulus quem facit resultantis celeritatis terre et luminis cum hac,
 mensurat effectum totalem aberrationis. Placuit huius anguli de scri-
 bere hac ratione quatenus cum perpendiculari totam celeritatem terræ
 jungit terram et astrum; et hoc est ipsum phenomenon peculiare.
 Propitio apparet alicuius aëtri igitur, nihil aliud est, quam sua
 propitio vera affecta aberratione, uti propitio vera nihil aliud quam pro-
 pitio media correctæ per mutationem. — Nunquam confundi debet posi-
 tio apparet producta per parallaxin cum propitio apparet de-
 resultantis aberratione, neque cum illa, in qua Refractio locum habet.
 Ex hoc explicato phenomeno aberrationis lucis astrorum sequitur,
 nos debere sumere ad determinationem graphicam aberrationis, re-
 resultantem ex motu annuo terre sine respectu ad motum proprium
 astrorum, in recta, quam describit particula lucis, duas lineas, quæ
 sunt inter se in ratione celeritatum lucis ad celeritatem terre in or-
 bita, et in his lineis superstruere parallelogrammum, nam diagonalis
 huius parallelogrammi est directio secundum quam oculus videt astrum,
 et angulus quem hæc diagonalis facit cum radio visuali directo due-
 to ad verum locum aëtri, est absoluta aberratio luminis proveni-
 ens ex rotatione terre. Locus apparet alicuius fixæ semper præ-
 cedit vero loco huius stelle.

Propter immensam distantiam in qua nos sumus respectu stellarum
 fixarum, rectæ duæ ex una harum ad omnia puncta terre orbitæ
 possunt assumi quæ lineæ paralleles; consequenter diagonalis paral-

Helogr
 23

parallelogrami aberrationis, describit in quavis anno sideris
superficiem conicam, cuius axis, quæ se movet fit in eadem ipsi paral-
lela directione, est directio primitiva luminis, et basis hujus coni
est curva situata in plano parallelo orbitæ terre. —

Elementum essentielle ad resolvendum problema aberrationis, est
ratio celeritatis luminis ad illam terre. Si nos sumus, lumen
percurrere semiaxem majorem orbitæ terre, seu medianam distantiam
terre a sole in $493''.2$ et terra describit hoc eodem tempore motu
suo medio arcum $20''.25$ et hæc esset sua celeritas si orbita esset
circulus; sed arcus ds quem describit tempore dt habet formam
sequentem $ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (r^2 dv^2 + dr^2)^{\frac{1}{2}}$ (ex mechanica)
ubi r est radius vector et v est angulus, quem facit hic radius
cum axi quantitatis x .

$$\text{Propterea } r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(v-\pi)} = a(1-e^2)[1+e \cos(v-\pi)]^{-1}$$

ubi a est semiaxis major orbitæ telluris $e = 0.0168$ ratio excentri-
citatatis ac hæc rectam et π angulus, quem linea absidium
facit cum axe x . Sic propter parvitatem hujus excentricitatis,
sufficit retinere primam potentiam quantitatis e , vel quæ
revertit ad idem, parvisculum arcum ds considerare quæ cir-
cularem. Ergo erit ratio celeritatis terre ad illam luminis pro-
prie representata per $ds = \frac{r dv}{a} = \frac{r dv}{a}$

Sed sumus quoque (Poisson tom I p. 355)

$$r^2 dv = a b n dt$$

ubi b est semiaxis minor orbitæ terre, et $a n d t$ semis motus
in tempore dt , ergo erit celeritas terre, illa luminis pro unita-
te accepta,

$$\begin{aligned} ds &= \frac{r dv}{a} = \frac{b n dt}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} [1+e \cos(v-\pi)] = \\ &= \frac{a n dt}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} [1+e \cos(v-\pi)] = \\ &= \frac{20''.253}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} (1+e \cos(v-\pi)) = 20''.253 (1+e \cos(v-\pi)) \end{aligned}$$

($b = a\sqrt{1-e^2}$ — arcus $n dt$ est reductus ad minuta secunda, in qua
reductione $T = 365.2563$ annus hic æquatur $\frac{2\pi dt}{T}$ radius quoque
 R in minuta secunda mutatus.)

Si enim distantia terrae a Sole assumatur quae unitas, et distantia alicuius planetae representatur per D , tempus quo indugetur a planeta ad nos, ~~per~~ erit $t = 493.2D$; hic autem semper supponitur motus huius uniformis.

Hoc profecto, fit in motu geocentrico a huius planetae in 1^h . e. arcus, quem describit in longitudine vel latitudine, in Ascensione recta vel declinatione inter unitatem temporis; sius motus igitur in tempore $493.2D$ erit $493.2mD$ et haec est mensura generalis sius Aberrationis. Si denique A sius locus apparens, A' sius locus verus, erit.

$$A' = A - 493.2mD$$

Pro sole, cuius apparens longitudo sit O' et longitudo vera O , facta ab fractione ab eccentricitate orbitae telluris erit

$$O' = O - 20''.25$$

$$\text{quia } D = a = 1 \text{ et } m = \frac{2\pi D''}{24.3600 T}$$

Aberratio solis est fere constans, si ergo necessarius est ad calculum locus verus huius astri, uti hoc locum habet in calculis locorum geocentricorum plan. tarum, tantummodo addidimus $20''.25$ loco solis ex tabulis sui ephemeridibus.

Nunc exprimamus analytice rationem in Ascensione recta et Declinatione, promanantem ex phenomeno Aberrationis.

Radius sphaerae coelestis in quam projiciuntur omnia astra, potest arbitrari assumi; supponamus aequalum radio vectori r terrae. Supponamus praeterea, ipsum radium representare ubi statum huius, in hoc casu parallelogrammum Aberrationis se ex tendit necessarii usque ad regionem stellis, quam consideramus, et extremi las diagonales, quae ibi est fixata, indicabit nobis quolibet epocha anni locum apparentem huius stellae. Cum autem haec diagonalis non multum differat a distantia r , representari potest per $r + dr$.

His positis, adducamus positionem stellae ad tres coordinatas rectangulares x, y, z , quarum x et y sint in plano aequatoris coelestis, in huius coordinatarum sit centrum terrae, et axis x sit linea aequinoctialis, tunc, erit

$$\begin{aligned} x &= r \cos A \cos D \\ y &= r \sin A \cos D \\ z &= r \sin D \end{aligned} \quad \text{ex quo} \quad (2)$$

Transitus nunc ex loco vero ad apparentem fiet, si faciamus variare omnia haec elementa; differentians igitur aequationis (2), erit

$$\lg A = \frac{r}{x}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (3)$$

$$dx A = \frac{x dy - y dx}{x^2} \cos A$$

$$r dr = x dx + y dy + z dz \quad (4)$$

Sit nunc ds arcus parvus, quem terra describit in $493''.2$, et sint α, β, γ anguli quos facit, hoc elementum cum axibus coordinatarum habebimus, transferendo hunc motum in regionem stellae

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma \quad (5)$$

Multiplicando et dividendo per ds membrum secundum primae aequationis differentialis (3) erit

$$dx A = \frac{ds}{x} (\cos \beta - \cos \alpha \lg A) \cos A$$

tandem eliminando quantitatem x , erit aberratio in ascensione recta,

$$dx A = \frac{ds}{r \cos D} (\cos \beta \cos A - \cos \alpha \sin A) \quad (6)$$

Tertia aequatio (2) differentiata, dat, si eodem modo procedimus

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dr}{ds} \sin D + \frac{r}{ds} \cos D dD$$

ex quo

$$dD = \frac{\frac{dz}{ds} - \frac{dr}{ds} \sin D}{\frac{r}{ds} \cos D} = \frac{ds}{r \cos D} (\cos \gamma - \frac{dr}{ds} \sin D)$$

Haec secunda aequatio differentialis (6) potest quoque ita scribi

$$\frac{dr}{ds} = \frac{x dx}{r ds} + \frac{y dy}{r ds} + \frac{z dz}{r ds}$$

hoc est respectu aequationis (2) et (5)

$$\frac{dr}{ds} = \cos \alpha \cos A \cos D + \cos \beta \sin A \cos D + \cos \gamma \sin D$$

tandem

tandem substituendo hunc valorem in expressione pro $\frac{dD}{dt}$, erit pro aberratione in declinatione:

$$dD = \frac{ds}{r} \log \cos D - \frac{ds}{r} \sin D (\cos \alpha \cos A + \log \beta \sin A) \dots (2)$$

Haec formulae (1) et (2) includunt adhuc angulos α, β, γ , quos eliminare debemus. Ad hoc faciendum, fit VCB aequator, VGG' ecliptica, S sol, T terra, V punctum aequinoctiale, GB ad orbitam terrae tangens, ST parallela ad hanc tangentem, w obliquitas TVB eclipticae, X, Y, Z tres axes per centrum solis transiuntis et respective paralleli ad axes x, y, z transiuntis per centrum terrae.

Triangulum sphaericum VBT' , in quo $VT = \alpha$,

$BT' = \beta$, $VB = 90$. dat

$$\cos \beta = \sin \alpha \cos w$$

Triangulum interruptum in T', V et punctum X quo axis Z occurrit superficiem coelestem dat

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin w$$

Substituendo hos valores in formulis (1) et (2) erit

$$dA = \frac{ds}{r \cos D} (\sin \alpha \cos w \cos A - \cos \alpha \sin A) \dots (1')$$

$$dD = - \frac{ds}{r} (\cos \alpha \cos w \sin D + \sin \alpha \cos w \sin A \sin D - \sin \alpha \sin w \cos D) \dots (2')$$

Restat adhuc eliminare angulum α , h. e. angulum quem facit tangens puncti orbitae terrae cum axis quantitate x .

Ad hoc efficiendum, fit θ angulus quem facit tangens, de qua agitur, cum linea Apsidum, seu cum axis maiore orbitae terrestris. In hoc casu erit $\tan A = \frac{dy''}{dx''}$ si x'' et y'' sint coordinatae heliocentricae terrae, relative ad axes orbitae, et

$$x'' = r \cos(v - \pi) \quad y'' = r \sin(v - \pi) \quad \text{ergo}$$

$$\tan \theta = \frac{dy''}{dx''} = \frac{dr \sin(v - \pi) + r \cos(v - \pi)}{dr \cos(v - \pi) - r \sin(v - \pi)}$$

praeterea cum sit

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(v - \pi)}$$

$$\text{erit} \quad dr = \frac{ae(1 - e^2) dr \sin(v - \pi)}{1 + e \cos(v - \pi)^2}$$

$$\text{et} \quad \tan \theta = \frac{e + \cos(v - \pi)}{-\sin(v - \pi)}$$

minimum

$$\text{nimis} \quad \text{tg } \theta = \frac{\sin(v-\pi) + \frac{1}{2}e \cos(v-\pi)}{\cos(v-\pi) - \frac{1}{2}e \sin(v-\pi)}$$

et pro θ ponendo valorem:

Sint nunc quoque δ angulus normalis terre cum radio vectoris, dem

$$\text{erit} \quad \alpha = \theta + \pi, \quad \delta = v + 90 - \alpha = v - \pi + 90 - \theta$$

hinc secundum Trigonometriam $\text{tg } \delta = \text{tg}(v - \pi + 90 - \theta)$

$$\text{tg } \delta = \frac{\text{tg}(v-\pi) \text{tg } \theta + 1}{\text{tg } \theta - \text{tg}(v-\pi)} = \frac{e \sin(v-\pi)}{1 + e \cos(v-\pi)}$$

$$\text{ex quo } \delta = e \sin(v-\pi) - \frac{1}{2} e^2 \sin 2(v-\pi) \dots \dots \dots$$

$$\text{hinc} \quad \alpha = 90 + v - e \sin(v-\pi)$$

Adnotari potest, v esse longitudinem heliocentricam terre, π longitudinem perihelii. — Sit nunc Θ longitudo Solis et Π longitudo perigaei;

$$\text{ergo erit} \quad \Theta = 180 + v, \quad \Pi = 180 + \pi$$

$$\text{hinc} \quad \alpha = \Theta - 90 - e \sin(\Theta - \Pi)$$

$$\text{et} \quad \sin \alpha = -\cos \Theta - e \sin(\Theta - \Pi)$$

$$\cos \alpha = \sin \Theta - e \cos \Theta \sin(\Theta - \Pi)$$

et formulae (1) et (2) transibunt in sequentes:

$$\text{Aberratio in } \mathcal{R} = - \frac{20''.25}{\cos D} (\cos \omega \cos A \cos \Theta + \sin A \sin \Theta + e \cos \omega \cos A \cos \Pi + e \sin A \sin \Pi) \quad (1)$$

$$\text{Aberratio in declinat.} = -20''.25 \sin D (-\cos \omega \sin A \cos \Theta + \cos A \sin \Theta - e \cos \omega \sin A \cos \Pi + e \cos A \sin \Pi) \\ - 20''.25 \sin D (\sin \omega \cos \Theta + e \sin \omega \cos \Pi) \quad (2)$$

Propter parvitatem excentricitatis orbites coelestis, Astronomi in usu reliquunt omnes terminos, qui dependunt ab hac excentricitate. Ita duae formulae datae sunt a Delambre.

Neglectis igitur terminis multiplicatis in e , et ponendo pro ω valorem quem habuit obliquitas anno 1840 erit

$$\text{Aberratio in } \mathcal{R} = -(18''.580 \cos A \cos \Theta + 20''.25 \sin A \sin \Theta) \sec \Theta \quad (1')$$

$$\text{Aberratio in declinat.} = -(20''.25 \cos A \sin \Theta - 18''.580 \sin A \cos \Theta) \sin D - 8''.06 \sin \Theta \cos D \quad (2')$$

et ut apte reddantur ad constructionem tabularum, erit:

$$\text{Aberratio in } \mathcal{R} = - \frac{19''.42 \cos(A-\Theta) - 0''.84 \cos(A+\Theta)}{\cos D}$$

$$\text{Aberratio in declinat.} = [19''.42 \sin(A-\Theta) - 0''.84 \sin(A+\Theta)] \sin D - 8''.07 \cos \Theta \cos D.$$

0.84
19.42
20.26

19.42
0.84
18.58

Li deli
3

Si declinatio est australis, assumi debet negativa; dein sine erit quantitas negativa, cos D positiva, vel si volumus considerare declinationem australem qua positiva, signum secundum terminum aberrationis in declinatione debet emutari, h. e. debet scribi + 8".04 cos D cos D.

Propterea terrae circa axem quoque producit aberrationem diurnam, quam vero hic negligimus propter suam parvitatem. (Delambre)

Isti tabulas generales aberrationis et nutationis magnam habent utilitatem, tamen complures Astronomi construxerunt tabulas particulares pro magno numero stellarum. Delambre in sua Astronomia tom 3 enucleavit principia, secundum quae La Caille, recentibus temporibus autem Gauss et B. Haack construxerunt suas tabulas speciales. Cagnoli publicavit a. 1804 tales tabulas pro 500 stellis. Etiam in opere periodicis Connaissance de tems pro 1812 occurrunt tabulae aberrationis, nutationis et parallaxionis, calculatae per Burckhardt, et adaptatae ad 36 stellas quibus Astronomi potissimum utuntur. Tandem eodem anno publicavit B. Haack tales tabulas pro 1400 stellis. Methodus est expedita in Astronomia celeb. Lalande XVII libro. Nos aliquas adferemus, scribamus formulam aberrationis in R et declinatione ita:

$$dA = -20''.255 \sin A \sin \Theta [1 + \frac{18.580}{20.255} \cot g A \cot g \Theta] \sin D$$

et faciamus $\frac{18.580}{20.255} \cot g A = \cot g \Theta$

$$\text{erit } dA = -20.255 \sin A \sin \Theta \sin D [1 + \cot g \Theta \cot g \Theta] =$$

$$= -20.255 \sin A \sin D \sin(\Theta + \Theta) =$$

$$= + \frac{20.255 \sin A \sin D \sin(180 + \Theta + \Theta)}{\cos \Theta}$$

Ex hoc quoque videmus, factorem $\frac{20.255 \sin A \sin D}{\cos \Theta}$ representare maximam aberrationem in ascensione recta, et ad inveniendam actualium aberrationem nos debere ad argumentum tabularum, nimirum ad $\Theta + \Theta$ addere locum seculi pro dato die, dein multiplicare per sinum huius novi argumenti maximam aberrationem.

Eodem modo decompuncta formula aberrationis in Declinatione, venit

$$dD = -20.255 \cos A \sin \Theta \sin D [1 - \frac{(18.580 \sin A \sin D - 8''.06 \cot g \cos D) \cot g \Theta}{20.255 \cos A \sin D}]$$

Sit iterum $\pm \frac{18.580 \sin A \sin D - 8''.06 \cot g \cos D}{20.255 \cos A \sin D} = \cot g \Theta$

(signum superius habet locum pro declinationibus borealibus, inferius pro australibus.)

$$\text{erit } dD = -20''.255 \cos A \sin \theta \sin D (1 - \lg \theta \lg \theta) = \frac{-20''.255 \cos A \sin D \sin(\theta - \theta')}{\cos \theta'}$$

$$= + \frac{20''.255 \cos A \sin D \sin(180 - \theta + \theta')}{\cos \theta'}$$

ubi iterum factos $\frac{\cos \theta'}{\cos \theta'}$ est maxima aberratio in Declinatione. Si igitur ad argumentum tabularum $6^\circ - \theta'$ celeb. Tabl. addatur longitudo Solis pro die proposito, et sinus hujus novi argumenti multiplicatus per maximam aberrationem, productum erit actualis aberratio in Declinatione, pro ambobus casibus, valit igitur eadem regula; neq. dubium esse potest quoad signum totius resultantis, si tantummodo habetur cura finis argumenti dare signum positivum aut negativum, quod argumentum est vel minus vel majus duobus rectis. —

Aliqua quoad constructionem harum tabularum quoad Mutationem. Nosq. prius additas formulas, possumus quoq. ita scribi, si scilicet, autus valores numerici, et pro θ scribitur A , pro θ' D

$$dA = -9''.648 \cos A \lg D \cos \theta \left[1 + \frac{(16''.5441 + 7''.1822 \sin A \lg D) \lg \theta}{9''.648 \cos A \lg D} \right]$$

$$\text{ponamus nunc } \frac{16''.5441 + 7''.1822 \sin A \lg D}{\pm 9''.648 \cos A \lg D} = \lg \varphi$$

pro declinationibus borealibus signum superius, pro contrariis inferioris, erit

$$dA = \mp 9''.648 \cos A \lg D \cos \theta (1 + \lg \varphi \lg \theta) = \mp \frac{9''.648 \cos A \lg D}{\sin \varphi} \sin(\varphi + \theta);$$

et pro aliqua stella boreali

$$dA = \frac{9''.648 \cos A \lg D}{\sin \varphi} \sin(6^\circ + \varphi + \theta)$$

et pro aliqua stella australi

$$dA = \frac{9''.648 \cos A \lg D}{\sin \varphi} \sin(\varphi + \theta)$$

Ergo multiplicando maximam Mutationem $\frac{9''.648 \cos A \lg D}{\sin \varphi}$ in ascensione recta per signum argumenti tabularum $(6^\circ + \varphi)$ plus longitudo nodorum duodecim pro dato die, productum dabit Mutationem quæsitam. Formula Mutationis in declinatione est

$$dD = \pm 9''.648 \sin A \cos \theta \mp 7''.1822 \cos A \sin \theta$$

Decomponendo hanc expressionem in duos factores, erit

$$dD' = \pm 9''.648 \sin A \cos D \left(1 - \frac{7''.1822 \cos A \sin D}{9''.648 \sin A}\right)$$

$$\text{fit } \frac{9''.648 \sin A}{7''.1822} = \lg \varphi'$$

$$\begin{aligned} \text{erit } dD' &= \pm 9''.648 \sin A \cos D (1 - \cos \varphi' \sin D) = \\ &= \pm \frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(\varphi' - D) = \pm \frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(D - \varphi') \end{aligned}$$

ergo pro borealibus stellis

$$dD' = + \frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(6^\circ - \varphi' + D)$$

et pro australibus

$$dD' = + \frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(12^\circ - \varphi' + D)$$

Regula igitur secundum quam determinatus Mutatio in Declinatione est eadem, uti procedens.

Notandum autem est, quaecumq; sit stella, pro qua tabula particularis sit construenda, semper debemus curare ut argumentum sit positivum. Igitur, quia signum anguli φ' dependet a signo $\lg \varphi'$ semper modificari debet formula: — Hinc generatim erit

$$dD' = + \frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(12^\circ - \varphi' + D) \text{ pro stella australi}$$

si autem angulus φ' esset negativus

$$dD' = - \frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi} \sin(\varphi' + D)$$

et ut sit factor $\frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi'}$ positivus, debemus scribere

$$dD' = + \frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(6^\circ + \varphi' + D)$$

hac ratione et argumentum tabulae $6^\circ + \varphi'$ et logarithmus factoris erunt positivi.

Exemplum formare secundum methodum procedentem, tabulam particulararem Aberrationis et Mutationis pro stella polari, ad initium anni 1825. — Positio media polaris ad initium anni 1825

$$A = 14^\circ 13' 7'' \text{ variatio annua} = 216'' 47''$$

$$D = 88^\circ 20' 55'' = 19^\circ A$$

et ex hoc

et ex hac

$$1825 \quad A = 14^{\circ} 31' 10'' - D = 88^{\circ} 22' 30''$$

$$1836 \quad A = 14^{\circ} 49' 10'' - D = 88^{\circ} 24' 10''$$

Argumentum Aberrationis in A

$$\log \cos A = 9.9625135$$

$$\log \sin A = 0.5867543$$

$$\log \sin \theta = 0.5492478$$

$$\theta = \frac{180}{254^{\circ} 14' 30''} = 8^{\circ} 14' 15''$$

$$\cos \theta = 0.5658777$$

$$\sin A = 0.3891691$$

$$\cos D = 1.52173275$$

$$\log \cos A = 0.1304409$$

$$\log = 1.6428152$$

$$1.64282$$

Pro 3. Urfa minoris calculus est idem, tantum hoc discrimine, quod non addantur anguli θ 180

Argumentum Aberrationis in D

$$\log \cos A = 9.9625131$$

$$\log \sin A = 9.4132657$$

$$\log \text{primi term} = 9.3757788 +$$

$$\log \cos D = 9.6001206$$

$$\cos A = 0.0140966$$

$$\cos D = 8.4528472$$

$$\log \text{secund. term} = 8.0640644$$

$$\text{hinc primus terminus} = + 0.23756$$

$$\text{secundus} = - 0.01167$$

$$\log \theta' = 0.22589$$

$$\log \sin \theta' = 9.553897$$

$$\theta' = \frac{180}{17^{\circ} 43' 15''}$$

$$16^{\circ} 16' 15'' = 5^{\circ} 17' 16''$$

$$\cos \theta' = 0.0108049$$

$$\sin A = 9.98590321$$

$$\sin D = 9.9998253$$

$$\log \cos A = 1.3065322$$

$$\log = 1.3030658$$

$$1.30307$$

Pro 3. Urfae minoris, primus et secundus terminus sunt positivi, sumi debet supplementum ad 360° anguli θ , ad formationem argumenti tabulae.

Argumentum Mutationis in A

$$\log \cos A = 9.8718202$$

$$\log A = 9.4132657$$

$$\log \text{1. term} = 9.2850859$$

$$\log \cos D = 0.2342032$$

$$\cos A = 0.0140966$$

$$\cos D = 8.4528472$$

$$\log \text{2. term} = 8.7011470$$

$$1. \text{terminus} = 0.192796$$

$$2. \text{---} = 0.050251$$

$$\text{et } \log \varphi = 0.243041$$

$$\log \log \varphi = 9.3856778$$

$$\varphi = 76^\circ 20' 25''$$

$$\frac{180}{256^\circ 20' 25''} = 8^\circ 16' 20'$$

$$C. \sin \varphi = 0.0124587$$

$$A. \cos A = 9.9859034$$

$$A. \log D = 1.5441528$$

$$A. \log \varphi = 9.8083460$$

$$\log = 1.3538609$$

$$1.35386$$

Pro β usque minoris secundus terminus est negativus, et non additur
 180° ad angulum φ .

Argumentum Mutationis in D

$$\log \log \varphi = 0.1281798$$

$$\log \log A = 9.4132657$$

$$\log \varphi' = 9.54121455$$

$$\varphi' = -\frac{180}{160^\circ 49' 0''} = 5^\circ 10' 49'$$

$$C. \sin \varphi' = 0.4833431$$

$$\sin A = 9.3991691$$

$$\log \log \varphi' = 0.9844373$$

$$\log = 0.8669495$$

$$0.86695$$

Pro β usque minoris secundus terminus supplementum ad 360° anguli φ' et hac
 ratione constructus sunt. Tabulae. B. Zach.

Catalogus positionis apparentis stellarum et earum transitus
 per Meridianum tempore sideris.

Exemplum Determinare positionem apparentem α Aquilae pro 1. Julii
 1812 pro Merid. Paris

per tabulas particulares L. B. Zach.

Aberratio in A (in temp.)

$$O = 3^\circ 9' 23''$$

$$11^\circ 6' 28'' \log \cos \varphi = 0.1256$$

$$\arg 2^\circ 15' 51'' \log \sin \arg = 9.9868+$$

$$+ 1'' 30$$

$$9.16524$$

Mutatio in A (in temp.)

$$O = 5^\circ 1' 31''$$

$$6^\circ 2' 14'' \log \cos \varphi = 0.0171$$

$$\arg = 10^\circ 3' 45''$$

$$\log \sin \arg = 9.6464-$$

$$- 0'' 46$$

$$9.6638$$

Aberr. in D

$$O = 3^\circ 9' 23''$$

$$8^\circ 23' 5''$$

$$\log \cos \varphi = 10.213$$

$$\arg = 0^\circ 2' 28''$$

$$\log \sin \arg = 8.6454+$$

$$+ 0'' 44'$$

$$9.6667$$

Mutatio in D

$$O = 5^\circ 1' 31''$$

$$8^\circ 10' 32''$$

$$\log \cos \varphi = 0.9658$$

$$1^\circ 12' 3''$$

$$\log \sin \arg = 9.8266$$

$$+ 6'' 20$$

$$0.7924$$

Ascensio mea. 1 st Junii 1842	=	19 ^h 41' 37".85	Declinatio	8° 22' 58".6
Aberratio	=	+ 1.30	Aberratio	+ 0.5
Mutatio	=	- 0.46	Mutatio	+ 6.2
Ascensio apparent	=	19 ^h 41' 38".69	Declinatio app	= 8° 23' 5".3

Enucleato hac ratione usu tabularum particularium, facilis est quoque usus tabularum generalium. Nos quoque in praedictionibus practico subicimus exempla.

Ad transmutandam positionem apparentem in mediam, aberratio et mutatio debet summi signis contrario.

Ascensio recta apparentis quoque exprimit tempus siderale, seu tempus franciae, per Meridianum inferiorem.

Si vellemus deducere quoque Aberrationem in longitudine et latitudine Stellarum, illae sequentes facili ex prioribus formulis, si posuerimus $w=0$ et revera si coincident plana aequatoris et eclipticae, ascensio recta transit in longitudinem λ , et declinatio in latitudinem β erit igitur:

$$\text{Aberratio in longit.} = -\frac{20''.253}{\cos \beta} \cos(\theta - \lambda)$$

$$\text{Aberratio in latitud.} = -20''.253 \sin \beta \sin(\theta - \lambda)$$

Si supponatur

$$X = -\frac{20''.253}{\cos \beta} \cos(\theta - \lambda), \quad Y = -20''.253 \sin \beta \sin(\theta - \lambda)$$

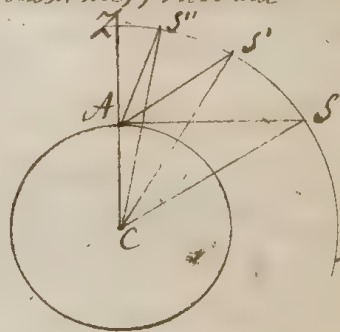
$$\text{ex quo } X^2 \sin^2 \beta + Y^2 = (20''.253 \sin \beta)^2$$

et haec est aequatio ellipsis aberrationis, vel orbitae apparentis stellae, reductae ad axes rectangulares; ubi semiaxis major $20''.253$ et minor $20''.253 \sin \beta$ (Adnotandum quoddam).

Parallaxis.

Diffinitio quae nos separat a stellis, est in magna, ut recte de,
Orbita ex una harum ad centra terre et solis non facturi sint angulos
sensibiles; et hic angulus est, quem Astronomi designant no-
mine parallaxis annuae; stellae fixae, sicut et maximae, nullam
habent parallaxin.

Supponamus observatorem in A , in superficie
sphaerica terre et consideramus Solem S ad hori-
zontem sensibilem AS ; parallaxis horizontalis hu-
ius astri erit angulus ASC ; sed si Sol esset
valde supra horizontem, uti in S' angulus ASC
erit ~~magis~~ ^{parallaxis} altitudinis, quae uti qui libet et videt,



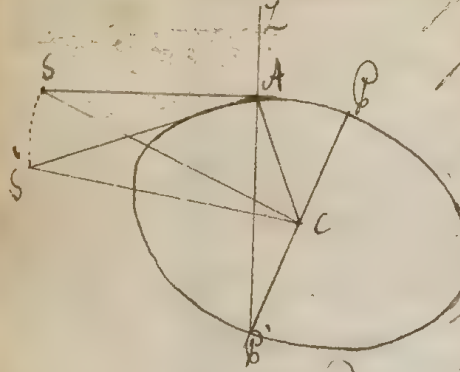
est multo minor quam prior, supposito S' esse par tē arcus di-
urni, vel huius, quem describit sol in sua praesentia supra hori-
zontem. Ergo parallaxis altitudinis de crevit progressive a hori-
zonte, ubi est maxima, usque ad Zenith ubi est aequalis zero.
Eius effectus est in plano verticali et contrarius refractioni;
h. e. nos videbimus astrem minus elevatum quam si nos esse-
mus in centro terre, et quidem quantitate aequali parallaxi.

Terra nostra recedit et accedit continuo Soli, ergo quoque paral-
laxis solaris horizontalis, neque habebit valorum constantem;
valor medius est $8''.5$. Parallaxis lunae est multo maior, est
nimirum saepius maior uno gradu.

In casu terre ellipticae, non debemus semper confunder parallaxin hori-
zontalem, cum maxima parallaxi altitudinis uti hoc in superiori hypothese
permixtum est.

Similiter pro observatione in A ; meridiano elliptico MA , parallaxis
horiz.

Horizontalis astri S est angulus S trianguli obliqui anguli formati
 per horizonalem AS , radium CA terra in puncto
 A , et distantiam CS ; supposito autem astro in S'
 infra horizontem, et in extremitate rectae AC perpen-
 dicularis, angulus S' erit maxima parallaxis alti-
 tudinis relative ad ipsam radium quo nunc agitur;
 Angulus S igitur generatim erit multo minor angu-
 lo S' . — Si locus et observatoris est in aequatore ipso,
 parallaxis horizontalis, quae etiam est maxima parallax-
 is altitudinis, nominatur parallaxis aequatorialis. —



Parallaxis ascensionis rectae, declinationis, longitudinis latitudinis non
 existunt, si maxima parallaxis altitudinis esset aequalis zero. Potum
 dependet ab eo, quod minimum radius terrestis est comparabilis cum
 distantia terra ab astro, vel quod idem est, quia duo observatores,
 unus in centro altis in superficie terra, astrum non referunt ad
 idem punctum coeli. Locus stelle visus ex centro vocatur locus verus,
 ex superficie, locus apparentis. —

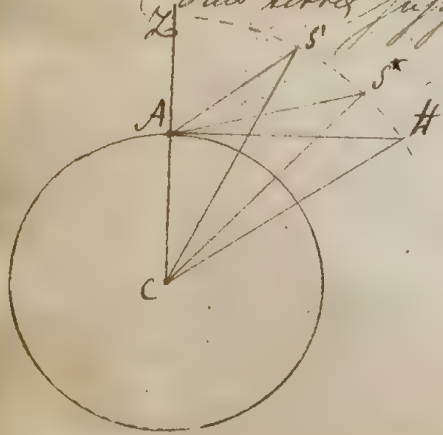
Parallaxis declinationis est igitur differentia inter declinationem
 veram et apparentem, idem de parallasi ascensionis rectae ceterarum.
 Prius diximus, parallasin altitudinis astri esse angulum, sub quo
 nobis apparet ex centro huius astri radius terra, ductus ad locum ob-
 servatoris. — Haec parallaxis est functio distantiae quantitas app-
 parentis et parallaxis horizontalis. —

Sit π haec parallaxis horizontalis, π parallaxis altitudinis, g re-
 ctus terra supposito sphaerico, z distantia Zenithalis z AS astri
 S observata, N distantia Zenithalis z CS geo cen-
 trica, x distantia rectilinea CS . —
 Triangulum ASC dat

$$\frac{\sin \pi}{\sin z} = \frac{g}{x}$$
 Si astrum est in horizonte, $\sin z = \sin 90^\circ$ et

$$\sin \pi = \frac{g}{x}$$
 sine?

$$\sin \pi = \sin \pi \sin z$$



pro Sole vel ea quantitate π non est major $9''$ ergo pro \sin potest poni
arcus, ergo: $\pi = \pi \sin \pi$ (1)

h. e. Parallaxis altitudinis est aequalis parallaxi horizontali, nam,
multiplicata per \sin distantiae Zenithalis apparentis. —

Si vellemus Parallaxin altitudinis in functione distantiae Zenithalis,
debemus in formula (1) substituere pro π suum valorem $N + \pi$, id
in habebimus $\sin \pi = \sin \pi \sin(N + \pi)$

et de componendo secundum membrum

$$\sin \pi = \sin \pi \sin N \cos \pi + \sin \pi \cos N \sin \pi \quad \text{ex quo}$$

$$\text{ergo } \pi = \frac{\sin \pi \sin N}{1 - \sin \pi \cos N}$$

et resolvendo in seriem et in minuta secunda

$$\pi = \pi \sin N + \frac{\pi^2}{2} \sin 1'' \sin 2N + \dots$$

De ostendendo nam quomodo procedendum quoad parallaxin in cal-
culis Astronomicis. Sit S locus verus, S' locus apparentis centri
solis (prior figura) $N = \angle CS$ distantia vera a Zenith, $r = S'S$
refractio vera, π parallaxis ASC astri S , diem est

$$\angle AS' = \angle CS + \angle ASC = N + \pi$$

pro quum refractio elevet objecta, sui quod idem, immineat eorum
distantiam a Zenith, erit:

$$\angle AS' = \angle CS + \angle AS'C = \angle CS + S'CS + \angle AS'C \quad \text{ex quo}$$

$$\angle r = N - r + \pi \quad (\text{ponendo } S = S', S'AS = S'CS)$$

$$\text{et reciprocè } N = \angle r + r - \pi$$

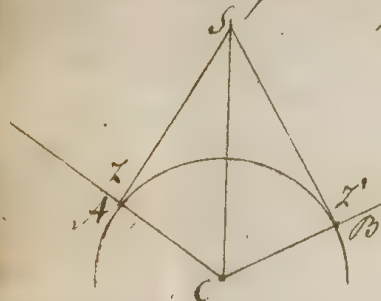
Ergo 1. Distantia apparentis a Zenith, observata in superficie tel-
luris, aequalis est distantiae verae geocentricae, diminuta per refrac-
tionem et aucta per parallaxin. —

2. Distantia vera geocentrica est contrarie aequalis distantiae app-
parenti observatae in superficie, aucta per refractionem et diminuta

per

per parallaxes. Effectus parallaxis, oppositus huius refractionis, hinc est
 delusio astrorum in suis verticalibus respectivis.

Unum ex modis, quos possunt applicari ad determinationem parallaxis
 horizontalis Solis, est sequens: Supponamus duos observato-
 res, quorum quilibet, unus in hemisphaerio boreali, alter in australi, su-
 sub eodem meridiano, eodem die observant distantiam
 Zenithalem Solis meridiana; Z et Z' sint distantias
 observatas H et H' latitudines notas locorum observa-
 tionum A et B ; dixerit secundum priora



$$\pi = \pi \sin Z, \quad \pi' = \pi \sin Z'$$

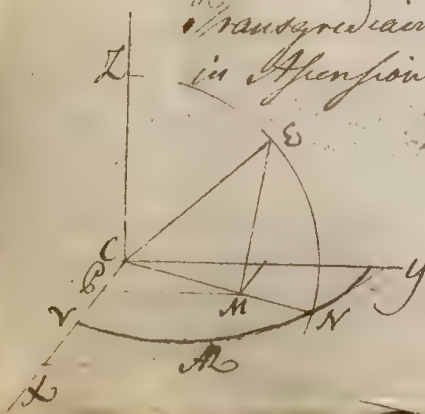
sed in quadrilatero $ACBS$, summa omnium angularum
 aequalis quatuor rectis, habebimus, sub hypothese
 latitudinis esse directas denominationis

$$\pi(\sin Z + \sin Z') + H + H' + 360^\circ - (Z + Z') = 360^\circ$$

ex quo parallaxis horizontalis

$$\pi = \frac{Z + Z' - H - H'}{\sin Z + \sin Z'} = \frac{Z + Z' - H - H'}{2 \sin \frac{Z + Z'}{2} \cos \frac{Z - Z'}{2}}$$

Hae methodo usi sunt Lalande in promontorio Bonae spei et
 Lalande Peropini ad determinationem parallaxis lunae. Sed, aspi-
 ci Astronomi non erant praecise sub eodem Meridiano, uti nos, sup-
 posuimus, hoc tamen non impediebat, quin posset suas observationes
 comparare, quum in calculum ponerent motum lunae in declina-
 tione, pro intervallo temporis correspondente differentiae Meridianorum.
 Dantur quoque aliae methodi determinandi parallaxis horizontalum pla-
 netarum, quas autem hic, propter brevitatem temporis nihil adferre
 possumus. (Tabulae Delambri)



Transgrediamur nunc ad disquisitionem formularum parallaxis
 in Ascensione recta et declinatione, et quidem disquisitionem ana-
 lyticam. Sit centrum terra C origo coor-
 dinatarum axium quart. x, y, z ; x transeat per aequino-
 ctium verum, y in aequatore, et axis z transeat per
 polum borealem aequatoris; positio puncti E in spatio
 erit nota per suas distantias ab his tribus axibus

n.e

h. e. per rectas CE , EM , et ME .

Sint hinc x, y, z rectangulares coördinatae centri E aliujus astri
sitae in hemisphaerio boreali, E distantia a centro terrae aequalis r ,
 A ascensio recta AN , D declinatio ED , habebimus ex triangulari CEM
et ME $x = r \cos A \cos D$, $y = r \sin A \cos D$, $z = r \sin D$ ----- (1)

Sint X, Y, Z analogae coördinatae puncti, ubi est observator in superfi-
cie terrae, g, h ascensio recta GN et declinatio GD puncti centri cae,
tibi, erit propter distantiam a centro g

$$X = g \cos g \cos h, \quad Y = g \sin g \cos h, \quad Z = g \sin h$$
 ----- (2)

Tandem assumto loco observatoris pro origine communem trium aliarum
coördinatarum respectu parallelarum prioribus, sit r' distantia astri
ab observatore et A', D' ascensio recta et declinatio apparentis
hujus astri, et erit.

$$x' = r' \cos A' \cos D', \quad y' = r' \sin A' \cos D', \quad z' = r' \sin D'$$
 ----- (3)

Ubi quilibet videt, existunt inter has coördinatas veri et apparentis
loci astri, sequentes relationes:

$$x' = x - X, \quad y' = y - Y, \quad z' = z - Z$$
 ----- (4)

vel ponendo valores

$$\begin{aligned} r' \cos A' \cos D' &= r \cos A \cos D - g \cos g \cos h \\ r' \sin A' \cos D' &= r \sin A \cos D - g \sin g \cos h \\ r' \sin D' &= r \sin D - g \sin h \end{aligned}$$

et si dividantur successive secunda et tertia aequatio per primam
faciendo $\pi = \sin A$ (i. e. maxima parallaxis altitudinis) erit

$$\cos A' = \frac{\sin A \cos D - \sin \pi \sin g \cos h}{\cos A \cos D - \sin \pi \cos g \cos h}$$

$$\text{et} \quad \cos D' = \frac{\cos A (\sin D - \sin \pi \sin h)}{\cos A \cos D - \sin \pi \cos g \cos h}$$

Haec formulae dant locum apparentem in functione loci veri et ma-
ximae parallaxis altitudinis, vel parallaxis horizontalis; haec formulae
attribuuntur Olbers qui eas obtinuit per methodum analyticam
celeb. Lagrange. Sed multo simplicius est, in usu, deducere parallaxim
ascensionis rectae et declinationis, et cum his tandem statuere
locum.

locum apparentem. Prior parallaxis quae venit quoque sub nomine
parallaxis anguli horarii est $A'-A$, secunda $D'-D$. Methodus
 (directa) has inveniens est sequens:

Ex prima aequatione sequitur
 $\lg(A'-A) = \frac{\sin \pi \cos h \sin(A-g)}{\cos D - \sin \pi \cos h \cos(A-g)} = \frac{\sin \pi \cos h \sin(A-g)}{\cos D} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sin \pi \cos h \cos(A-g)}{\cos D}}$

$\lg(\lambda-\lambda) = \frac{\lg \lambda - \lg \lambda}{1 + \lg \lambda \lg \lambda}$

sed si differentia $A'-A$ erit semper admodum parva, quoque pro luna,
 possumus eadem reducere hanc ex pressione in seriem, retinendo tan-
 tum terminos maxime suspensibiles; habebimus igitur in minutis se-
 cundis arcibus

$$A'-A = \frac{\sin \pi \cos h \sin(A-g)}{\cos D} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \pi \cos h}{\cos D} \right)^2 \frac{\sin 2(A-g)}{\sin \pi} \dots (A)$$

Eadem ratione invenitur

iterum per
 $\lg(A'-g) = \frac{\lg A' - \lg g}{1 + \lg A' \lg g}$
 et pro $\lg g$
 $\frac{\sin g}{\cos g}$

$$\lg(A'-g) = \frac{\sin(A-g) \cos D}{\cos(A-g) \cos D - \sin \pi \cos h} \quad \text{et}$$

$$\lg D' = \frac{\cos(A'-g) (\sin D - \sin \pi \sin h)}{\cos(A'-g) \cos D - \sin \pi \cos h}$$

et si una per alteram dividatur

$$\lg D' = \frac{\sin(A'-g) (\sin D - \sin \pi \sin h)}{\sin(A'-g) (\cos D - \frac{\sin \pi \cos h}{\cos(A'-g)})}$$

et si distantia a polo ^{inter} arcibus, h. e. faciendo $D = 90 - \Delta$, $D' = 90 - \Delta'$, erit

$$\cot \Delta' = \frac{\sin(A'-g) (\cot \Delta - \frac{\sin \pi \sin h}{\sin \Delta})}{\sin(A'-g) (\cot \Delta - \frac{\sin \pi \cos h}{\sin(A'-g)})}$$

Ad inveniendum δ hac formula parallaxis id est $\Delta' - \Delta = \delta$, est

$$\cot \Delta - \cot \Delta' = \cot \Delta - \frac{\sin(A'-g) (\cot \Delta - \frac{\sin \pi \sin h}{\sin \Delta})}{\sin(A'-g) (\cot \Delta - \frac{\sin \pi \cos h}{\sin(A'-g)})}$$

$$\text{vel } \frac{\sin(\Delta' - \Delta)}{\sin \Delta \sin(\Delta + \delta)} = \cot \Delta \left(1 - \frac{\sin(A'-g)}{\sin(A'-g)} \right) + \frac{\sin(A'-g) \sin \pi \sin h}{\sin(A'-g) \sin \Delta}$$

hanc

$$\frac{\sin \delta}{\sin(\Delta + \delta)} = \frac{\sin(A'-g) \sin \pi \sin h}{\sin(A'-g)} - \frac{2 \cos \Delta \cos(\frac{A'+A}{2} - g) \sin \frac{A'-A}{2}}{\sin(A'-g)}$$

Parallaxis δ non poterit facile derivari ex hac aequatione, sed commo-
 de hoc fieri potest introducendo sequentibus transformationibus

$$\text{sit } \frac{\sin(A'-g) \sin \pi \sin h}{\sin(A'-g)} = \lg u \quad \text{et} \quad \frac{2 \cos \Delta \cos(\frac{A'+A}{2} - g) \sin \frac{A'-A}{2}}{\sin(A'-g)} = \lg v$$

$$\text{et erit } \sin \delta = (\lg u - \lg v) \sin(\Delta + \delta)$$

et c.

et ex hac ponendo pro $\sin(A+B)$ $\sin A \cos B + \cos A \sin B$ erit.

$$\lg \delta = \frac{(\lg u - \lg v) \sin A}{1 + (\lg u - \lg v) \cos A} = \frac{\sin(u-v) \sin A}{1 - \frac{\sin(u-v)}{\cos u \cos v} \cos A}$$

et resolvendo in seriem notandum erit.

$$\delta = \frac{\sin(u-v) \sin A}{\cos u \cos v \sin 1''} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(u-v)}{\cos u \cos v} \right]^2 \frac{\sin 2A}{\sin 1''} + \dots \quad (B)$$

et hic est valor parallaxis distantie polaris

Hæ formulæ erunt absolute ejusdem formæ si loco relationis affri ad æquatorem illud referatur ad eclipticam; in hoc casu transiunt ascensiones rectæ in longitudines et declinationes in latitudes. Sit igitur L longitudo vera affri, λ ejus latitudo, n longitudo Zenithi seu Nonagesimi, q latitudo Zenithi seu complementum altitudinis nonagesimi, priores formulæ (B) erunt

$$\lg \delta' = \frac{\sin L \cos \lambda - \sin \pi \sin n \cos q}{\cos L \cos \lambda - \sin \pi \cos n \cos q} \quad (E)$$

$$\lg \lambda' = \frac{\cos L (\sin \lambda - \sin \pi \sin q)}{\cos L \cos \lambda - \sin \pi \cos n \cos q}$$

et ex hac habebimus pro parallaxi longitudinis

$$\lg(L'-L) = \frac{\sin \pi \cos q \sin(L-n)}{\cos \lambda - \sin \pi \cos q \cos(L-n)} = \frac{\sin \pi \cos q \sin(L-n)}{\cos \lambda} \frac{1}{1 - \frac{\sin \pi \cos q \cos(L-n)}{\cos \lambda}}$$

$$L'-L = \frac{\sin \pi \cos q \sin(L-n)}{\cos \lambda \sin 1''} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \pi \cos q}{\cos \lambda} \right)^2 \frac{\sin 2(L-n)}{\sin 1''} + \dots \quad (C)$$

Sit porro $\delta = 90 - \delta'$, $\lambda' = 90 - \delta'$; parallaxis latitudinis erit $\lambda' - \lambda$; hinc parallaxis distantie a polo eclipticæ, si hanc designamus per η erit $\eta = \delta' - \delta$, et faciendo

$$\lg u' = \frac{\sin(L-n) \sin \pi \sin q}{\sin(L-n)}$$

$$\lg v' = \frac{2 \cos \delta \cos(\frac{L+\lambda}{2} - n) \sin(\frac{L-\lambda}{2})}{\sin(L-n)}$$

habebimus secundum præcedentia

$$\eta = \frac{\sin(u'-v') \sin \delta}{1 - \frac{\sin(u'-v')}{\cos u' \cos v'} \cos \delta}$$

vel in serie

$$\eta = \frac{\sin(u'-v') \sin \delta}{\cos u' \cos v' \sin 1''} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(u'-v')}{\cos u' \cos v'} \right]^2 \frac{\sin 2\delta}{\sin 1''} + \dots \quad (D)$$

Nonagesimi mus
Sit punctum in quo
ecliptica horizon
temporarij puncti
id est hoc 90° distat
vocat nonagesi
mus. altitudo
nonagesimi hinc
est complementum
altitudinis poli
eclipticæ supra
horizontem.

In Affronomia, positio Zenithi semper est data, per suam ascensionem rectam, tam q et declinationem h ; nam hac ascensio recta est semper fixa in epocha observationis affri et tunc declinatio Zenithi est latitudo geocentrica quae aequatur latitudini geographicae H minus angulo w verticalis in radio terre. —

Hic angulus autem calculatur per sequentem formulam

$$w = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) \frac{\sin 2H}{\sin 1''} - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \frac{\sin 4H}{\sin 2''} \quad (\text{Vide quoque distio c. s. p. 87.})$$

nimirum ex figura elliptica in qua $w = H - h$ ergo

$$\lg w = \frac{\lg H - \lg h}{1 + \lg H \lg h} = \frac{\lg H - \frac{1}{2} \lg H}{1 + \frac{1}{2} \lg H} = \frac{\lg H - \frac{1}{2} \lg H}{1 + \frac{1}{2} \lg H}$$

mutata tangenti in sinus et ponendo $\sin 2H = \frac{1 - \cos 2H}{2}$ et

$$\sin 2H = 2 \sin H \cos H \text{ erit}$$

$$\lg w = \frac{(a^2 - b^2) \lg H}{(a^2 + b^2) \lg^2 H} = \frac{1}{2} \frac{(a^2 - b^2) \sin 2H}{a^2 (a^2 - b^2) \sin^2 H} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \sin 2H}{1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos 2H} \text{ et ex hac}$$

series procedens: (Vide Puissant liv. 3. p. 286.)

Ut deducamus aliquas consequentias ex generalibus formulis parallelarum; deducamus expressionem parallaxis ellipticis ex illa distantia polaris $\sigma = A' - A$. — Ad hoc facimus coincidere polos aequatoris cum Zenitho, vel quod idem est, sumamus aequatorem pro horizonte; dein A erit distantia polaris zenithalis apparentis Z . Sub hac hypothese, parallaxis ascensionis rectae rectae quae, centri est N , et A' erit distantia zenithalis apparentis Z . Sub hac hypothese, parallaxis ascensionis rectae $A' - A$ erit aequalis zero; hinc dabit statim ista formula quia $h = 90^\circ$;

$$\frac{\sin \sigma}{\sin (A + \sigma)} = \sin A \sin 90^\circ$$

et mutando σ in π , et A in N erit

$$\sin \pi = \sin N \sin (N + \pi) = \sin N \sin Z$$

et haec est formula in hunc adducta.

Ut perveniamus ad formulas parallaxis annuae, supponamus observatorem in aliquo puncto eclipticae; in hac casu latitudo Zenithi q erit nulla, et longitudo huius puncti n representabit

longitudo

longitudinem terrestrem. His positis, sit δ longitudo heliocentrica $\theta = \delta + 180$
 terre, \odot locus solis, p parallaxis annua in longitudine, η in lati-
 tudine, formula (C) dabit, quia $\delta = \theta - 180$

$$p = \frac{\pi \sin(\delta - \theta)}{\cos \delta} = - \frac{\pi \sin(\delta - \theta)}{\cos \delta}$$

Let λ fuerit longitudo astri

Series (D) dabit parallaxin annuam in latitudine quae erit

$$\eta = \pi \sin \lambda \cos(\delta - \theta) = - \pi \sin \lambda \cos(\delta - \theta)$$

Haec binae formulae vero tantum sunt approximativae, existentiae
 minimae quantitate π est adhuc in debitis et pro maxime splendore
 stellarum fixis. — Si terra assumitur quae sphaera, paral-
 laxis horizontalis alicujus astri, cujus distantia a terra manet con-
 stans, est semper eadem, pro omnibus locis, in quibus observari
 potest stella; haec est utrum in versu variabilis pro terra elliptica.
 Exempli gratia in aequatore erit in suo maximo et in polo est mi-
 nima. Cum in ephemeridibus tantum dantur valores parallaxium
 aequatorialis et in calculis astronOMICIS saepius opus sit pra-
 rallaxi horizontali pro loco, cujus latitudo est data, hanc debemus
 exprimere in functione prioris.

Sit a radius aequatoris terrestris, R radius correspondens puncto,
 cujus latitudo est H , π' parallaxis aequatorialis, π horizon-
 talis; habebimus, exprimendo per r distantiam terre ab astro

$$\sin \pi' = \frac{a}{r}, \quad \sin \pi = \frac{R}{r}$$

$$\text{hinc } \sin \pi = \frac{R}{a} \sin \pi'$$

et substituendo pro R suum valorem erit approximative

$$\pi = \pi' (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 H) = \pi' (1 - d \sin^2 H) \quad (\text{Vid. Puissant T. I. p. 155})$$

Calculus parallaxis longitudinis et latitudinis

Ante omnia notandum, Novagesimum et medium caeli
 vel Zenith esse semper unum et alteram in eadem parte, re-
 spectu

respectu Solis solstitialium.

Sit longitudo Lunae $L = 10^\circ 55' 11''$ latitudo borealis λ

$\lambda = 0^\circ 32' 45''$; Nonagesimus vel longitudo Zenithi $n = 340^\circ 3' 15''$
 latitudo Zenithi $q = 62^\circ 29' 50''$, latitudo geocentrica $H = 48^\circ 29' 50''$
 parallaxis horizontalis Lunae vel $\pi = 54' 2''.5$
 habebimus parallaxin longitudinis $L - L'$ per formulam (C)
 sequenti calculo:

$$\begin{array}{r} L = 10^\circ 55' 11'' \\ n = -19^\circ 56' 40'' \\ \hline L - n = 30^\circ 51' 51'' \end{array}$$

1. Terminus

$$\begin{array}{r} \lg. \sin \pi = 8.19644 \\ \cos q = 9.66445 \\ c. \cos \lambda = 0.00002 \\ \hline 7.86091 \\ \sin(L - n) = 9.71012 \\ c. \sin 1'' = 8.31445 \\ \hline \lg 1. \text{ term.} = 2.88546 \end{array}$$

2. Terminus

$$\begin{array}{r} \lg \frac{1}{2} = 9.69897 \\ 7.86091 \\ \hline 7.86091 \\ \sin 2(L - n) = 9.94483 \\ c. \sin 1'' = 8.31445 \\ \hline \lg 2. \text{ term.} = 0.68005 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1. \text{ term.} = 768.16 \\ 2. \text{ term.} = 4.79 \\ \hline \end{array}$$

parallaxis longitudo $= 772.95 = 12^\circ 52'.95$

1. igitur huius terminus est $+0''.03$

Hinc longitudo apparet $L' = 10^\circ 55' 11'' + 12^\circ 53'' = 11^\circ 8' 14''$

parallaxis distantis polaris obtinetur per formulam (D) et quidem

$$\begin{array}{r} \frac{L + L'}{2} = 11^\circ 1' 37'' \\ n = -19^\circ 56' 40'' \\ \hline \frac{L + L'}{2} - n = 30^\circ 58' 17'' \end{array} \quad \begin{array}{r} L' = 11^\circ 8' 14'' \\ n = -19^\circ 56' 40'' \\ \hline L' - n = 31^\circ 4' 24'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} L' - L = 0^\circ 6' 26''.5 \\ \delta = 90^\circ - \lambda = 89^\circ 27' 15'' \end{array}$$

1. angulus subsidarius

$$\begin{array}{r} \sin \pi = 8.19644 \\ \sin q = 9.94792 \\ \sin(L - n) = 9.71283 \\ \hline \lg u' = 8.14707 \end{array}$$

2. angulus subsidarius

$$\begin{array}{r} \lg 2 = 0.30103 \\ \sin(\frac{L' - L}{2}) = 7.27272 \\ \cos \delta = 7.97892 \\ \cos(\frac{L + L'}{2} - n) = 9.93319 \\ c. \sin(L - n) = 0.28988 \\ \hline \lg v' = 5.77574 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} u' = 0^\circ 48' 14''.0 \\ v' = 0 \quad 0 \quad 12.3 \\ \hline u' - v' = 0^\circ 48' 1''.7 \end{array}$$

$$\delta' - \delta = \eta$$

1. Terminus

$$\sin(u' - v') = 8.14522$$

$$c. \cos u' = 0.00004$$

$$c. \cos v' = 0.00000$$

$$8.14526$$

$$\sin \delta = 9.99998$$

$$c. \sin 1'' = 5.31443$$

$$\log. 1. \text{ term.} = 3.45964$$

$$1. \text{ term.} = 2881''.80$$

$$2. \text{ term.} = 0.38$$

$$\text{Parallax } \eta = 2882.18 = 48' 2''.18$$

Ad hunc valorem admodum simpliciter pervenire possumus. Est minimum

$$\cot \theta' = \frac{\sin(L' - n)}{\sin(L - n)} \left(\cot \delta - \frac{\sin \delta \sin \eta}{\sin \delta} \right)$$

et ponendo $\cot \theta = \frac{\sin(L' - n) \sin \eta}{\sin \delta}$ erit

$$\cot \delta' = \frac{\sin(L' - n) \cos(\delta + \theta)}{\sin(L - n) \sin \delta \cos \theta}$$

formula quae dat distantiam apparentem a polo eclipsi hinc.
Operando cum logarithmicis septem decimalium erit:

$$c. \sin \pi = 8.1964370$$

$$\sin \theta = 9.9479184$$

$$c. \sin \delta = 0.0000197$$

$$\log \theta = 8.1443754$$

$$c. \cos \theta = 0.0000422$$

$$c. \sin \delta = 0.0000197$$

$$\cos(\delta + \theta) = 7.6450441$$

$$\sin(L' - n) = 9.7178330$$

$$c. \sin(L - n) = 0.2898798$$

$$\cot \delta' = 7.6478188$$

$$c. \sin 1'' = 5.3144254$$

$$\delta' = 2.9622439 = 916''.73$$

$$\delta' = 90^\circ 15' 16''.73$$

$$\delta = 89^\circ 24' 15''.0$$

$$\eta = 0^\circ 48' 1''.73$$

$$\log v' = 5.77574$$

$$c. \sin \pi = 5.31443$$

$$\log v' = 1.09017$$

2. Terminus

$$\log \frac{1}{2} = 9.69897$$

$$8.14526$$

$$8.14526$$

$$\sin \delta = 8.27994$$

$$c. \sin 1'' = 5.31443$$

$$\log 2. \text{ term.} = 5.8386$$

$$1. \text{ term.} = 2881''.80$$

$$2. \text{ term.} = 0.38$$

$$\text{Parallax } \eta = 2882.18 = 48' 2''.18$$

$$\cot \theta' = \frac{\sin(L' - n)}{\sin(L - n)} \left(\cot \delta - \frac{\sin \delta \sin \eta}{\sin \delta} \right)$$

$$\cot \theta = \frac{\sin(L' - n) \sin \eta}{\sin \delta}$$

$$\cot \delta' = \frac{\sin(L' - n) \cos(\delta + \theta)}{\sin(L - n) \sin \delta \cos \theta}$$

$$\delta' = 90^\circ 15' 16''.73$$

$$\delta = 89^\circ 24' 15''.0$$

$$\eta = 0^\circ 48' 1''.73$$

$$\theta = 0^\circ 48' 55''.9$$

$$\delta = 89^\circ 24' 15''.0$$

$$\theta + \delta = 90^\circ 15' 10''.9$$

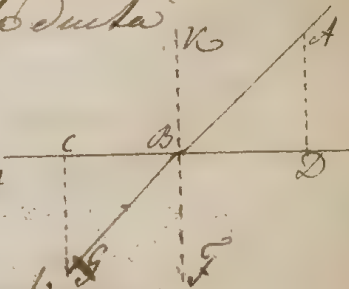
Theophrastus

Refractio

Fluidum istud peculiare, extensibile, rarum, per lucidumq, in mirum
aërem atmosphaericum circumdare totum nostrum globum ~~terra~~ terra,
quoniam ex omni parte, fig, ex tendere ad magnam altitudinem, cui libet
est notum. — Totum hoc fluidum, admodum necessarium ad nostram
existendum, constituit atmosphaeram, habetq, proprietates tam se conden-
sandi per frigus et se dilatandi per calorem. — Propter universalem
gravitatem, h. e. propter attractionem terrae nostrae, cuius partem consti-
tuit atmosphaera, et propter ejus compressibilitatem, strata aërea
ad superficiem terrae sunt, maxime densitatis, et densitates aucta
altitudine semper decreverunt. — Posita temperatura constanti,
sua densitas est, proportionalis pondere comprimenti (Lex Mariottii)
et hinc altitudini barometri. — Ex hac proprietate resultat, possi-
bilitas mensurandi altitudines per observationes barometricas.
Propter hanc atmosphaeram nos astra non videmus eo loco, ubi
revera existunt, quia radii lucis per transitum per vicinias
densitatis, mutant suam directionem, quum refringuntur vel
ad perpendicularum, vel a perpendiculari, et hic effectus vocatur
Refractio. — Radius directus et refractus formant cum hoc per-
pendiculari angulos, quorum unus est angulus incidentis alter
refractionis; sinus horum angulorum sunt semper in ratione con-
stanti. — Experimentis quoq, comprobatur, Refractionem radiorum
in eadem superficie crescere, cum eorum obliquitate, et vim
refringentem aëris esse proportionalem suae densitati, vel pressioni
superiorum stratorum. Densitates stratorum autem progressive
crescunt ex limitibus atmosphaerae usq, ad superficiem terrae; ex
quo sequitur, radium lucis oblique transgredientem omnia haec strata
supposita sphaerica, concentrica pervenire ad nos in linea curva
concava versus superficiem terrae; sed quum nos supponamus
semper

objecta in directione radiorum ac nos pervenientia, nos refertur
 Simus igitur astra ac puncta caeli, quae nobis indicat tangens
 huius trajectoriae, quam describit radius lucis. — Refractio hinc
 est angulus quem facit haec tangens cum radiis recta ducta
 ex oculo nostro ac verum locum astri.

Quoniam legem secundum quam radii lucis
 refringuntur, si ex uno medio in aliud transiunt



Radius AB refringatur in puncto B et eat ad G. ponamus rationem
 celeritatis radii aether non refracti ad celeritatem refracti uti $m:n$.

igitur tempus, quo linea BG percurritur, ad tempus per AB uti $nBA:mBG$

$AD=a$, $CG=b$, $CD=c$, $CB=x$, hinc $BD=c-x$, $BG=\sqrt{x^2+b^2}$

$AB=\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2}$ et $nBA+mGB=n\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2}+m\sqrt{x^2+b^2}$

Quoniam autem lux ex A in G tempore brevissimo venire debet, nam natura
 semper sequatur brevissimam viam erit $n\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2}+m\sqrt{x^2+b^2}$ breviss.
 minimum tempus quo lux per refractionem ex A in G pervenire potest. Quia
 invenimus hinc novis lineam curvam pro qua est $n\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2}+m\sqrt{x^2+b^2}=y$

ex quo $n(xdx-cdx):\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2}+mxdx:\sqrt{x^2+b^2}=dy=0$

$$\frac{mx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \frac{n(c-x)}{\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2}} \quad \text{i. e.} \quad \frac{mCB:BG}{mCB:AB} = \frac{nDB:AB}{nDB:DB}$$

propterea $BG=AB$ et $mCB=nDB$ hinc $m:n=BD:BC$.

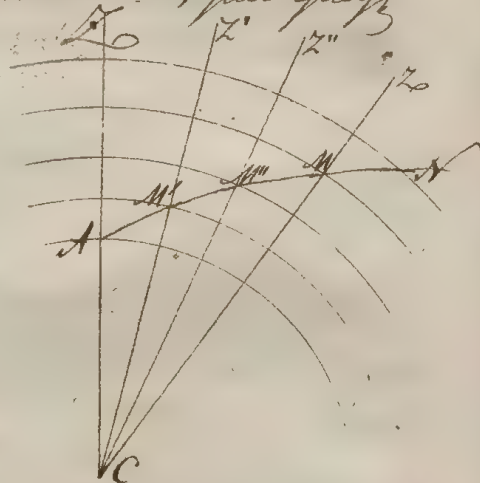
Per praeterita tam simplicem explanationem huius phaenomeni qui-
 libet videlicet, refractionem Astronomicam seu atmosphaericam maxi-
 mae esse in Horizonte, semperque imminui, dum astra se elevant
 supra hoc planum, et esse nullam si astra pervenerint ad Zenith. —
 Effectus hinc refractionis est, elevare astra supra suum locum verum;
 et locum habet hic effectus in verticali. — Igitur angularis altitudo
 astri observata in superficie terre, tantummodo est altitudo apparens;
 imminui haec debet refractione ut habeatur altitudo vera.

Quaeque resultat ex hoc, valorem refractionis dependere ab altitudine apparenti aëtri, seu uti dicitur, habere pro argumento hanc altitudinem apparentem.

Dabimus hic ideam mediocrem per quam pervenerunt Astronomi ad statuendam aliquam theoriam.

Ad inveniendam aequationem differentialem trajectorye descriptae per radium lucis, in suo transgressu per atmosphera, supponimus 1^o quicumque sit angulus sub quo incidit radius lucis ex vacuo in aërem, rationem sinus anguli incidentis et refractionis semper esse constantem; 2^o vires refringentes stratorum aëris esse proportionales densitatibus horum stratorum, quae quoque experientia comprobatur.

His suppositis, sit $A M M' \dots M N$ trajectorya radii lucis, $A N$ atmosphaerae cuius omnia strata $A M$, $M M'$, $M' M''$, $M'' M'''$ sunt supposita concentrica et sphaerica, et densitatis crescentis secundum certam legem, a puncto, quo incidit radius lucis in atmosphera donec pervenerit ad oculum observatoris.



Designemus per $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots \alpha$ radios $A C, M C \dots$ trajectorye; per $Z, Z', Z'' \dots Z$ angulos, quos elementa subsequencia $A M, M M', M' M'', M'' M''' \dots M N$ huius curvae faciunt respective cum verticalibus $C Z, C Z', C Z'' \dots C Z$; tandem per $\omega, \omega', \omega'' \dots \omega$ angulos quos eadem elementa faciunt cum radiis $\alpha', \alpha'' \dots \alpha$.

Supponamus quoque rationem sinus anguli incidentis ad illum refractionis in strato $A M$ esse $(n):1$

ita ut in strato $M M'$ sit $n':1$

$M' M''$ $n'':1$

et in ultimo strato $n:1$

Temperatura supponitur in omnibus stratis eadem.

Secundum primum principium est, si $u', u'', \dots u$ sint in punctis $M', M'', \dots M$ anguli incidentis radii lucis, pro puncto M'

$$\frac{\sin u'}{\sin w'} = (n) \quad \frac{\sin u'}{\sin z'} = n'$$

pro puncto M'' $\frac{\sin u''}{\sin w''} = n' \quad \frac{\sin u''}{\sin z''} = n''$

pro puncto M $\frac{\sin u}{\sin w} = n'' \quad \frac{\sin u}{\sin z} = n$

tunc eliminando successive $u', u'', \dots u$, erit

$$\frac{\sin w'}{\sin z'} = \frac{n'}{(n)}, \quad \frac{\sin w''}{\sin z''} = \frac{n''}{n'}, \quad \dots \quad \frac{\sin w}{\sin z} = \frac{n}{n''}$$

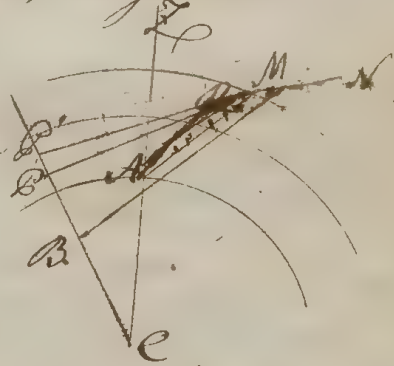
Proterea triangula elementaria $AMC, M'M''C, \dots$ possunt considerari quia recti linea, tunc est:

$$\frac{\sin z'}{\sin w'} = \frac{\gamma'}{\gamma}, \quad \frac{\sin z''}{\sin w''} = \frac{\gamma''}{\gamma'}, \quad \dots \quad \frac{\sin z}{\sin w} = \frac{\gamma}{\gamma''}$$

Multiplicando inter se has rationes et procedendo erit re-

ducendo $\frac{\sin z}{\sin z'} = \frac{n}{(n)} \cdot \frac{\gamma}{\gamma'}$

Hae ultima relatio est independens a numero spectatorum contentorum inter superficiem terre et punctum A ; hinc illa exprimit generaliter sinum proprietatum trajectorie quae fita. Considerando tunc $A, M, M'', \dots N$ quae curvam continuam cuius cavitas obversa est caelo, et rectas AM, B . AMR quae tangentis in extremitatibus huius curvae; prior representabit directionem primariam luminis astri, altera erit linea per quam referimus astrum ad suum locum apparentem in caelo, et angulus harum rectarum erit mensura refractionis quae habet locum in puncto A .



Dum ducendo parallelam MB ad AM , angulus CBM quoque erit aequalis refractioni CBM .

Supponamus nunc priorem tangentem BM sumere positionem

conf.

infinite vicinam $B'M$; quia eadem distantia $BM = L$
 plures possunt correspondere refractiones differentes, dein angu-
 lus $B'MB$ propter suam parvitatem, erit differentiale Refractio-
 nis $B'MB$.

Præmissis his considerationibus, obtinebimus expressio hujus dif-
 ferentialis sequenti modo:

Deducatur ex centro C terre, in radium MB perpendicularium CP
 designatus per x basis BM trianguli rectanguli $B'PM$, per y ejus
 altitudinem $B'P$, et per r refractionem, quæ locum habet inter
 A et M h. e. angulum $B'MB$ et erit generaliter

$$y dr = \frac{B'B}{BM} \text{ vel } dr = \frac{dy}{x}$$

Id per præcedentia, et quia $y = y \sin B'MC = y \sin Z$... ($B'MC = \text{verticali angulo}$)
 erit $y = \frac{a(n)}{n} \sin Z$

Præterea, quoniam vis refringens æris supposita est proportionalis densi-
 tati ρ , erit exprimendo hanc per $B\rho$ in regione MB , erit

$$B\rho = n^2 - 1 \quad \text{... (vide traité de physique de M. Biot tom III p. 266)}$$

ubi B est vis refringens æris in hac altitudine; ex quo

$$n = \sqrt{1 + B\rho}$$

At (ρ) densitas æris in superficie terre; erit ex eadem ratione

$$(n) = \sqrt{1 + B(\rho)}$$

nunc $y = \frac{a \sin Z \cdot \sqrt{1 + B(\rho)}}{\sqrt{1 + B\rho}}$ et

$$x = \frac{\rho \sqrt{1 + B\rho} - a^2 \sin^2 Z \cdot (1 + B\rho)}{\sqrt{1 + B\rho}}$$

tandem

$$dr = \frac{dy}{x} = \frac{-a B d\rho \sin Z \cdot \sqrt{1 + B(\rho)}}{2(1 + B\rho) \sqrt{1 + B\rho} - \frac{a^2}{\rho} \sin^2 Z (1 + B\rho)}$$

Hæc est æquatio differentialis pag. 244. tom IV. Mécanique céleste,
 ad quam quoque Brinkley et Andrews pervenerunt per methodum priori
 analogam.

Ad integrationem hujus equationis, nota debet esse quantitas ξ in functione quantitatis x , h. e. nota debet esse h. t., secundum quam decreverunt strata atmosphaerae. — Laplace consideravit in eodem casu aëros limites hujus legis, qui sunt una densitas constans et una densitas ρ , crescens in progressionem geometricam, crescente altitudine supra horizon-
tum maris in progressionem arithmetica, quae vero supponit temperaturam uniformem in qualibet puncto atmosphaerae.

Nos hic dabimus tantum simplicissimum casum, nimirum nos supponimus tantum distantias tenuitatis observatas, continentes inter 0° et 90° .

Appropinquamus ad hunc effectum hypothesis temperaturae uniformis et faciamus

$$\alpha = 1 - S, \quad \alpha = \frac{\rho(\xi)}{2(1+\rho(\xi))} = \frac{\frac{2\xi}{\rho(\xi)}}{1 + \frac{2\xi}{\rho(\xi)}} \quad \text{--- (Vid. Priol)}$$

ubi v est celeritas lucis in vacuo et ξ summa virium attractionum aëris, cujus densitas sit aequalis unitati. — Aequatio differentialis transibit in hanc

$$dx = - \frac{\alpha d\xi (1-S) \sin x}{\left[1 - 2\alpha(1 - \frac{\xi}{\rho})\right] \sqrt{\cos^2 x - 2\alpha(1 - \frac{\xi}{\rho}) + (2S - S^2) \sin^2 x}}$$

et neglectis altioribus potentibus quantitatum α et S

$$\begin{aligned} dx &= - \frac{\alpha d\xi (1-S) \lg x}{1 - 2\alpha(1 - \frac{\xi}{\rho})} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{2\alpha(1 - \frac{\xi}{\rho})}{\cos^2 x} - (2S - S^2) \lg x \right] \right\} \\ &= - \frac{\alpha d\xi (1-S) \lg x}{(\xi)} \left[1 + S \lg x - 2\alpha(1 - \frac{\xi}{\rho}) \right] \cdot \left[1 + \frac{\alpha(1 - \frac{\xi}{\rho})}{\cos^2 x} - S \lg x \right] \\ &= - \frac{\alpha d\xi (1-S) \lg x}{(\xi)} \left[1 - S \lg x - \alpha(1 - \frac{\xi}{\rho}) (2 + \frac{1}{\cos^2 x}) \right] \\ &= - \frac{\alpha d\xi \lg x}{(\xi)} \left[1 - \frac{S}{\cos^2 x} + \alpha(1 - \frac{\xi}{\rho}) \frac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} \right] \end{aligned}$$

et integrando

$$x = - \alpha \lg x \left[\frac{\xi}{(\xi)} - \int \frac{S d\xi}{(\xi) \cos^2 x} + \alpha \left(\frac{\xi}{(\xi)} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{(\xi)^2} \right) + \frac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} \right] + \text{const}$$

Si sumamus hoc integrale inter limites $\xi = (\xi)$ est $\xi = 0$, h. e. a superficie terre usque ad limites atmosphaerae, et observando pro limite

$\xi = (\xi)$ esse $S=0$ erit

$$r = a \log Z \left[1 + \frac{1}{2} \alpha \frac{(2 \cos^2 Z + 1)}{\cos^2 Z} + \cos^2 Z \int \frac{S d\xi}{(\xi)} \right]$$

Integrando per partes est:

$$\int \frac{S d\xi}{(\xi)} = \frac{S \xi}{(\xi)} - \int \xi dS$$

pro $\xi=0$, $S=1$ seu y infinite magno, hinc

$$\int \frac{S d\xi}{(\xi)} = - \int \xi dS$$

Christat igitur hoc ultimum integrale. - Ad hoc inveniendum, sit p , pressio aëris atmospherici in regione ubi y exprimit gravi latem, evidens est, quum massa aequatur producto ex volumine in densitatem, et pondus massae ductus in gravitatem, nos habere

$$dp = - g \xi dy = - g a^2 \xi dS.$$

Nos sumimus hic signum minus, quia pressio in eadem ratione decrevit uti altitudo crescit.

Sit nunc (g) gravitas ad superficiem terrae, erit

$$g = (g) \frac{a^2}{y^2} \text{ (lex naturae)}$$

nunc $dp = - (g) a^2 \xi dS$

Ergo integrale $\int \xi dS$ aequalis est pressioni toti (p) ad superficiem terrae, divisae per $(g) a$. -

Videamus nunc quomodo possumus exprimere hanc pressionem in functione altitudinis atmosphaerae: cujus densitas sit (ξ) et temperatura semper eadem. -

Si temperatura est uniformis, vires expansivae eorum motuum aëris proportionales sunt suis densitatibus, h. e.

$$p = (p) \frac{\xi}{(\xi)}$$

et per praecedentia

$$dp = - (g) \frac{a^2}{y^2} \xi dy$$

nunc

$$(p) \cdot \frac{d\xi}{(\xi)} = (g) a \frac{d\xi}{y} \quad \text{(quoad } S).$$

et in leg.

et integrando

$$\lg \xi = \frac{(g)a(\xi)}{(p)} \cdot \frac{a}{\gamma} + \text{const.}$$

(K) Determinationem constantis fit $\gamma = a$, hinc $\xi = (\xi)$ et

$$\lg(\xi) = \frac{(g)a(\xi)}{(p)} + \text{const.}$$

$$\text{const.} = \lg(\xi) - \frac{(g)a(\xi)}{(p)}$$

ergo $\lg \xi = \frac{(g)a(\xi)}{(p)} \left(\frac{a}{\gamma} - 1 \right) + \lg(\xi)$

et transiunt ad numeros

$$\xi = (\xi) \cdot c^{\frac{(g)a(\xi)(\frac{a}{\gamma} - 1)}{(p)}}$$

ubi c est basis logarithmorum Neperianorum.

Sed per hypothesein l est altitudo columnae aëris densitate (ξ) , qui agitur per gravitatem (g) , facit æqui librum cum (p)

hinc $(p) = (g)(\xi) \cdot l$ ----- (m)

et tandem $\xi = (\xi) \cdot c^{\frac{a}{l}}$

et hæc æquatio quoque comprobatur, profecta semper a terra uniformi in tota atmosphæra; densitatem decrescere in progressionem geometricam, si altitudines crescant in progressionem arithmeticam.

Præterea propter $\int \xi ds = \frac{(p)}{g} a$ et $(p) = (g)(\xi) l$

erit $\int \xi ds = \frac{l}{a}$ et $r = a \lg Z \left[1 + \frac{a(2 \cos^2 Z + 1)}{\cos^2 Z} - \frac{1}{a} \right]$

Hæc expressio tantummodo dependet a valoribus quantitatuum (g) et l , qui sunt dati per altitudines barometri et thermometri

in loco observationis; hinc quoque assignari debet lineis, ubi hæc formula cessat esse exacta. — Laplace calculavit ad hunc effectum

terminum maxime considerabilem, scilicet præcedentis inter eos qui sunt neglecti, et invenit eum $\frac{1}{1}$ pro distantia Zenithali appa-

renti 79° , et hinc insensibilem pro minori adhuc distantia Zenithali.

Queramus nunc valores numericos elementorum huius formulæ. Pro hypothesein l representat altitudinem atmospheræ cujus densitas est (ξ) et temperatura zero, erit per præcedentia:

$$(p) = (g)(\rho)l$$

Sit quoque Δ densitas mercurii, et h altitudo barometri pro eadem temperatura zero, erit quoque

$$(p) = (g) \Delta h$$

ex quibus

$$l = \frac{\Delta}{(\rho)} h$$

Per experimenta celeb. Arago et Biot

$$\frac{\Delta}{(\rho)} = 10473.04$$

pro temperatura zero, et altitudine barometrica ~~12.76~~ $h = 0.76$

in est

$$l = 7960^m$$

Laplace invenit $l = 7974^m$

per combinationem magni numeri observationum barometricarum, factarum in diversis altitudinibus et in pedibus montium, et comparationum cum mensurationibus trigonometricis.

Retinendo hoc ultimum resultatum, et notando esse

$$a = 6366198^m \text{ erit } \frac{1}{a} = 0.00125254$$

Experimenta prius citata in iisdem circumstantiis barometricis et thermometricis, et quidem in partibus radii.

$$\frac{1}{2} B(\rho) = \frac{2g}{v}(\rho) = 0.0002945856$$

ex quo

$$\alpha = 0.000294412$$

Delambre, per comparationem magni numeri observationum invenit

$$\frac{1}{2} B(\rho) = \frac{2g}{v}(\rho) = 0.0002946470$$

ex quo

$$\alpha = 0.000293876$$

valorum, qui fere identicus est cum praecedenti directe determinato et per experimenta admodum delicata.

Cum autem sit haec quantitas proportionalis densitati (ρ) , densitas aeris est proportionalis pressioni, seu altitudini barometri; hinc necessarium est introducere in priorem expressionem pro v correctionem relativam quoad hoc instrumentum. Praeterea, quamvis haec densitas quoque decreverit in eadem ratione, uti temperatura crevit, etiam

applicari

applicari debet ad hanc formulam correctio quoad statum thermometri.
 Secundum experimenta Gay-Lussac, volumen aëris expressum per unitatem, pro temperatura 0° , et sub pressione, quæ æquivaleat illi volumini mercurialis altitudinis $0^m 76$, se dilatat quantitate
 $= 0.00375$ pro quolibet gradu thermometri centigradi, hinc pro t gradibus thermometri, volumen aëris erit $= 1 + 0.00375t$. Si nunc h designat observatam altitudinem barometri, erit quidem dilatalio mercurii reducti ad peram pro quolibet gradu centigradi thermometri sit $\frac{h}{5412}$ (sic secundum novissima experimenta 5550) densitas aëris temperaturæ t , si illa pro temperatura æquis regulantis sit unitas

$$\frac{0^m 76(1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})}{h} \text{ vel brevius } 0^m 76(1+mt)(1+nt)$$

quia massis pæpitis æqualibus, densitates sunt inverse proportionales voluminibus.

Dubium valorem h , visibile est secundum ^{acquisitionem} ~~relocationem~~ (m), illum non mutare per altitudines barometri, si temperatura est constans; sed si temperatura mutatur et pressio manet constans, h variatur in ratione inversa quantitalis (Q), in hoc casu est

$$l = 7974^m(1+0.00375t)$$

Ex hoc sequitur

$$r = \frac{ah \lg Z}{0^m 76(1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})} + \frac{\frac{1}{2} \alpha^2 h^2 (1+2\cos^2 Z) \lg Z}{(0^m 76)^2 (1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})^2} \cdot \frac{\lg Z}{\cos^2 Z} - \frac{ah}{0^m 76} \cdot 0.00125254 \cdot \frac{\lg Z}{\cos^2 Z}$$

formula in qua $\alpha = 60'' 616$

pro majori commoditate calculi, alternari possunt secundus et tertius terminus ita:

$$r = \frac{ah \lg Z}{0^m 76(1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})} + \frac{\frac{1}{2} \alpha^2 h^2 (1+2\cos^2 Z) \lg Z}{0^m 76(1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})} \cdot \frac{\lg Z}{\cos^2 Z} - \frac{ah \cdot 0.00125254}{0^m 76(1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})} \cdot \frac{\lg Z}{\cos^2 Z} - \alpha \cdot 0.00375t \cdot 0.00125254 \cdot \frac{\lg Z}{\cos^2 Z}$$

hæc

$$\cos(p+p'-k) = \cos B \cos(C-k) - \sin B \sin(C-k)$$

$$\sin(p+p'-k) = \sin B \cos(C-k) + \cos B \sin(C-k)$$

$$A \cos B \{ \cos B \cos(C-k) - \sin B \sin(C-k) \}$$

$$A \sin B \{ \sin B \cos(C-k) + \cos B \sin(C-k) \}$$

$$A \sin B \{ \cos B \sin(C-k) + \sin B \cos(C-k) \} = A \sin B \{ \sin(B+C-k) \}$$

$$A \cos B \{ \cos B \cos(C-k) + \sin B \sin(C-k) \} = A \cos B \{ \cos(B+C-k) \}$$

$$A \cos B \cdot \cos B \cos(C-k) - A \cos B \cdot \sin B \sin(C-k)$$

$$A \sin B \cdot \sin B \cos(C-k) + A \sin B \cdot \cos B \sin(C-k)$$

$$A \{ \cos B \cos B \cos(C-k) + \sin B \sin B \cos(C-k) \}$$

$$A \{ \cos^2 B \cos(C-k) + \sin^2 B \cos(C-k) \}$$

$$A \cos(C-k) \{ \cos^2 B + \sin^2 B \} = A \cos(C-k)$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{1}{1 + \log x}$$

$$\frac{A' + t}{A} = \frac{1 - \log x}{1 + \log x}$$

$$\frac{A' - t}{A} = \frac{1 + \log x}{1 - \log x}$$

$$\frac{A' + t}{A} = \frac{1 - \log x}{1 + \log x}$$

$$\frac{A' - t}{A} = \frac{1 + \log x}{1 - \log x}$$

$$\log(1+x) = \frac{\log 1 + \log x}{1 + \log 1 \log x} = \frac{1 - \log x}{1 + \log x}$$

$$\frac{1 - \frac{t}{A'}}{1 + \frac{t}{A'}} = \frac{A' - t}{A' + t}$$

$$1 - \frac{t}{A'} = 1 - \log x$$

$$1 + \frac{t}{A'} = 1 + \log x$$

$$\text{dividing} \quad \frac{A' - t}{A' + t} = \frac{1 - \log x}{1 + \log x}$$

$$\log(1-x) \log \frac{c'-c}{2} = \log y$$

$$\frac{1-\log x}{1+\log x} \log \frac{c'-c}{2} = \log y$$

$$\frac{1-\log x}{1+\log x} \log \frac{c'-c}{2} = \log y$$

$$0 = \frac{A'+t}{A'+t} \cos\left(\frac{c'+c}{2}-k\right) - \sin\left(\frac{c'+c}{2}-k\right) \sin \frac{c'-c}{2}$$

$$0 = \cos\left(\frac{c'+c}{2}-k\right) \cos \frac{c'-c}{2} - \sin\left(\frac{c'+c}{2}-k\right) \sin \frac{c'-c}{2}$$

$$0 = \frac{1-\log x}{1+\log x} \log \frac{c'-c}{2} - \log\left(\frac{c'+c}{2}-k\right)$$

$$\log \frac{c'+c}{2} - k = \log y$$

$$\frac{c'+c}{2} - k = y$$

$$k = \frac{1}{2}(c'+c) - y$$

$$m = \frac{1-\log^2 \frac{nr}{2}}{1+\log^2 \frac{nr}{2}} - \frac{2 \log \frac{nr}{2}}{1+\log^2 \frac{nr}{2}} \log 2$$

$$m + m \log^2 \frac{nr}{2} = 1 - \log^2 \frac{nr}{2} - 2 \log \frac{nr}{2} \log 2$$

$$m \log^2 \frac{nr}{2} + \log^2 \frac{nr}{2} + 2 \log \frac{nr}{2} \log 2 = 1 - m$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} + \frac{2 \log \frac{nr}{2}}{(m+1) \log 2} = \frac{1-m}{1+m}$$

$$\log \frac{nr}{2} = - \frac{\log 2}{(m+1) \log 2} \pm \sqrt{\frac{1}{(m+1)^2 \log^2 2} + \frac{1-m}{1+m}}$$

$$\log \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log(2-i \log nr)$$

$$\log \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log \left(\frac{\log 2 - \log^2 \frac{nr}{2}}{1 + \log 2 \log \frac{nr}{2}} \right)$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} \log 2 \log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log(2 - \log^2 \frac{nr}{2}) = \log^2 \frac{nr}{2} \log 2 - \log^2 \frac{nr}{2} \log \frac{nr}{2}$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} \log^2 \frac{nr}{2} +$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} \log \frac{nr}{2} = \log(2 - i \log nr)$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log(2 - i \log nr)$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} = - \frac{1}{2} \log 2 \log^2 \frac{nr}{2} + \frac{1}{2} \log^2 \frac{nr}{2}$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log \left(\frac{\log 2 - \log^2 \frac{nr}{2}}{1 + \log 2 \log \frac{nr}{2}} \right)$$

$$\log 2 \log^2 \frac{nr}{2} + \log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log 2 - \log^2 \frac{nr}{2} \log \frac{nr}{2}$$

$$\log 2 \log^2 \frac{nr}{2} + \log^2 \frac{nr}{2} (1 + \log^2 \frac{nr}{2}) = \log^2 \frac{nr}{2} \log 2$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} + \log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log 2$$

Formule Delambre

ou équation symphonie

$$\sin 2z = \sin(z-nr) \cos 2z$$

$$\sin 2z = \sin 2z \cos nr - \sin nr \cos 2z$$

$$m = \cos nr - \sin nr \log 2$$

$$\cos nr = \cos^2 \frac{nr}{2} - \sin^2 \frac{nr}{2}$$

dividendo ambos terminos por unitatem

$$\cos nr = \frac{\cos^2 \frac{nr}{2} - \sin^2 \frac{nr}{2}}{\cos^2 \frac{nr}{2} + \sin^2 \frac{nr}{2}} = \frac{1 - \log^2 \frac{nr}{2}}{1 + \log^2 \frac{nr}{2}}$$

$$\sin nr = 2 \sin \frac{nr}{2} \cos \frac{nr}{2}$$

$$\sin nr = \frac{2 \sin \frac{nr}{2} \cos \frac{nr}{2}}{\cos^2 \frac{nr}{2} + \sin^2 \frac{nr}{2}} = \frac{2 \log \frac{nr}{2}}{1 + \log^2 \frac{nr}{2}}$$

$$\log \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log(2 - i \log nr)$$

$$\log \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log \left(\frac{\log 2 - \log^2 \frac{nr}{2}}{1 + \log 2 \log \frac{nr}{2}} \right)$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} \log 2 \log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log(2 - \log^2 \frac{nr}{2}) = \log^2 \frac{nr}{2} \log 2 - \log^2 \frac{nr}{2} \log \frac{nr}{2}$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} \log^2 \frac{nr}{2} +$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} \log \frac{nr}{2} = \log(2 - i \log nr)$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log(2 - i \log nr)$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} = - \frac{1}{2} \log 2 \log^2 \frac{nr}{2} + \frac{1}{2} \log^2 \frac{nr}{2}$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log \left(\frac{\log 2 - \log^2 \frac{nr}{2}}{1 + \log 2 \log \frac{nr}{2}} \right)$$

$$\log 2 \log^2 \frac{nr}{2} + \log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log 2 - \log^2 \frac{nr}{2} \log \frac{nr}{2}$$

$$\log 2 \log^2 \frac{nr}{2} + \log^2 \frac{nr}{2} (1 + \log^2 \frac{nr}{2}) = \log^2 \frac{nr}{2} \log 2$$

$$\log^2 \frac{nr}{2} + \log^2 \frac{nr}{2} = \log^2 \frac{nr}{2} \log 2$$

$$\frac{1+m}{1-m} = \frac{\sin Z + \sin(Z-nr)}{\sin Z - \sin(Z-nr)} = \frac{\operatorname{tg}(Z - \frac{nr}{2})}{\operatorname{tg} \frac{nr}{2}}$$

$$\text{vel } \operatorname{tg} \frac{nr}{2} = \frac{1-m}{1+m} \operatorname{tg}(Z - \frac{nr}{2}) \quad \text{--- (II)}$$

et haec est aequatio Braheana.

Aequatio (I) dat $m = \cos nr - \sin nr \operatorname{tg} Z$

$$\text{sed } \cos nr = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{nr}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{nr}{2}}$$

$$\sin nr = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{nr}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{nr}{2}}$$

Si hi valores substituantur, erit haec aequatio quadratica pro

$\operatorname{tg} \frac{nr}{2}$ quae resoluta in seriem dat

$$\operatorname{tg} \frac{nr}{2} = a \operatorname{tg} Z + b \operatorname{tg}^3 Z + c \operatorname{tg}^5 Z + \dots \quad \text{--- (III)}$$

quae est ad praejudicium Delambri.

Si R est Refractio horizontalis pro $Z = 90^\circ$, aequatio (I) erit

$$m = \cos nR \quad \text{hinc}$$

$$\cos nR \sin Z = \sin(Z - nr) \quad \text{vel}$$

$$1 - \cos nR = \sin Z + \sin(Z - nr)$$

$$\frac{1 + \cos nR}{1 - \cos nR} = \frac{\sin Z + \sin(Z - nr)}{\sin Z - \sin(Z - nr)} \quad \text{ex quo}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} nr = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} nR \operatorname{tg}(Z - \frac{1}{2} nr)$$

$$\text{sed } \operatorname{tg}(Z - \frac{1}{2} nr) = \frac{\operatorname{tg} Z - \operatorname{tg} \frac{1}{2} nr}{1 + \operatorname{tg} Z \operatorname{tg} \frac{1}{2} nr} \quad \text{quae substituta in priori}$$

aequatione dat

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} nr = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2} nR} \operatorname{tg} Z \left[1 + \sin^2 nR \operatorname{tg}^2 Z \right]^{\frac{1}{2}} - 1$$

et posito $\operatorname{tg} x = \sin nR \operatorname{tg} Z$, est

$$\operatorname{tg} \frac{nr}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \operatorname{tg} \frac{1}{2} nR \quad \text{--- (IV)}$$

formula quae pro calculo est admodum commoda.

Delambre admodum simplices determinavit valores quantitates n et R per observationes duarum refractionum r et r' nimirum

Ultima formula dat propter parvitatem angulorum n et n'

$$r = R \lg \frac{1}{2} x \quad \text{pro distantia a limbo } R$$

et pro distantia a limbo R'

$$r' = R' \lg \frac{1}{2} x'$$

hinc $\frac{r'}{r} = \frac{\lg \frac{1}{2} x'}{\lg \frac{1}{2} x}$

sed $\lg x = \frac{2 \lg \frac{1}{2} x}{1 - \lg^2 \frac{1}{2} x}$ ergo

$$\frac{r'}{r} = \frac{\lg x (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')}{\lg x (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x)} = \frac{\lg x' (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')}{\lg x' (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')} =$$

$$= \frac{\lg x' (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')}{\lg x' (1 - (\frac{r'}{r})^2 \lg^2 \frac{1}{2} x')}$$

$$\frac{\lg x'}{\lg x} = \frac{x' - \frac{r'}{r} (\frac{r'}{r})^2 \lg^2 \frac{1}{2} x'}{1 - \lg^2 \frac{1}{2} x'} = \frac{x' - \frac{r'}{r} \lg^2 \frac{1}{2} x'}{1 - \lg^2 \frac{1}{2} x'}$$

$$\frac{r'}{r} - \frac{r'}{r} \lg^2 \frac{1}{2} x' = \lg x' \lg x - \lg x' \lg x \lg^2 \frac{1}{2} x'$$

$$\lg^2 \frac{1}{2} x' = \frac{\lg x' \lg x - \frac{r'}{r}}{\lg x' \lg x - \frac{r'}{r}} \quad \text{quod quoque ita potest scribi}$$

$$\lg^2 \frac{1}{2} x' = \frac{\lg A - \lg B}{\lg A - \lg B} = \frac{\sin(A-B) \lg B}{\sin(A+B-90^\circ)}$$

per hanc ultimam formulam invenitur $\frac{r'}{r}$, ex quo

$$\lg \frac{1}{2} x = \frac{r'}{r} \lg \frac{1}{2} x' \quad \text{et } R = r \lg \frac{1}{2} x = r' \lg \frac{1}{2} x'$$

tandem $\sin nR = \lg x \lg x' = \lg x' \lg x$ et $n = \frac{r}{R}$

Supponamus $x' = 90^\circ$, hinc $r' = R$, $\lg \frac{1}{2} x' = 1$ et $\lg \frac{1}{2} x = \frac{r}{R}$

hinc $\sin nR = \lg x \lg x = \frac{2(R) \lg x}{1 - (R)^2} = \frac{2R \lg x}{(R+n)(R-n)}$

Excepta formula celeb. Laplace omnes ceterae sunt imperfectae, quatenus duntaxat tantummodo ad certum gradum refractionem.

Novissimae deductiones quoad refractionem sunt a celeb. Bessel et Lütbro. (Adnotetur quoad refractionem medianam et versam)

Methodus practica determinandi refractionem perfectissimum est sequens. Comparari nimirum debent altitudines observatae stellarum, quae igitur adhuc continent refractionem, cum illis

altit.

41

Deductio formulae $\frac{\lg \frac{1}{2} x'}{\lg x} = \frac{\sin(A-B) \lg B}{\sin(A+B-90)}$ ex aequatione

$$\frac{r'}{r} = \frac{\lg \frac{1}{2} x'}{\lg \frac{1}{2} x} \quad \text{--- (1)}$$

sumus ex trigonometria

$$\lg x = \frac{2 \lg \frac{1}{2} x}{1 - \lg^2 \frac{1}{2} x} \quad \text{---} \quad \lg \frac{1}{2} x = \frac{\lg x (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x)}{2}$$

$$\text{et } \lg x' = \frac{2 \lg \frac{1}{2} x'}{1 - \lg^2 \frac{1}{2} x'} \quad \text{ergo} \quad \lg x' = \frac{\lg x' (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')}{2}$$

pro his his valoribus in aequatione (1) erit

$$\frac{r'}{r} = \frac{\frac{\lg x' (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')}{2}}{\frac{\lg x (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x)}{2}} = \frac{\lg x' (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')}{\lg x (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x)}$$

Aequatio (1) dat quoque $\lg \frac{1}{2} x = \frac{r}{r_1} \lg \frac{1}{2} x'$ ergo $\lg^2 \frac{1}{2} x = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \lg^2 \frac{1}{2} x'$
 et pro isto hoc valore in ultima aequatione pro $\lg^2 \frac{1}{2} x$ erit:

$$\frac{r'}{r} = \frac{\lg x' (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')}{\lg x (1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \lg^2 \frac{1}{2} x')}$$

ex precedentibus

est $\lg x = \sin nR \lg Z$

et $\lg x' = \sin nR \lg Z'$ ergo ponendo hos valores in aequatione precedenti
 $\sin nR$ in Numeratore et Denominatore se tollent et

erit $\frac{r'}{r} = \frac{\lg x' (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')}{\lg x (1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \lg^2 \frac{1}{2} x')}$ $\frac{r'}{r} = \frac{\lg Z' (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')}{\lg Z (1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \lg^2 \frac{1}{2} x')}$ inde

$$\frac{\lg Z'}{\lg Z} = \frac{\frac{r'}{r} (1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \lg^2 \frac{1}{2} x')}{1 - \lg^2 \frac{1}{2} x} = \frac{\frac{r'}{r} - \frac{r}{r_1} \lg^2 \frac{1}{2} x'}{1 - \lg^2 \frac{1}{2} x'} \quad \text{ergo}$$

$$\frac{r'}{r} - \frac{r}{r_1} \lg^2 \frac{1}{2} x = \frac{\lg Z'}{\lg Z} (1 - \lg^2 \frac{1}{2} x')$$

pro $\lg Z$ posuimus ponere
 in Numeratore $\lg Z$ quia dividere per $\lg Z$ vel multiplicare
 per $\lg Z$ est unum et idem nam $\lg Z = \frac{1}{\lg Z}$ ergo erit
 si revera multiplicemus

$$\frac{x'}{r} = \frac{x}{r} \lg^{\frac{1}{2}} x' = \lg z' \operatorname{ctg} z - \lg z' \operatorname{ctg} z \lg^{\frac{1}{2}} x' \text{ et hinc}$$

$$\lg z' \operatorname{ctg} z \lg^{\frac{1}{2}} x' - \frac{x}{r} \lg^{\frac{1}{2}} x' = \lg z' \operatorname{ctg} z - \frac{x'}{r} \text{ dividit}$$

$$\lg^{\frac{1}{2}} x' = \frac{\lg z' \operatorname{ctg} z - \frac{x}{r}}{\lg z' \operatorname{ctg} z - \frac{x'}{r}}$$

si nominemus $\lg z' \operatorname{ctg} z = \lg A$
et $\frac{x'}{r} = \lg B$ erit:

$$\lg^{\frac{1}{2}} x' = \frac{\lg A - \lg B}{\lg A - \operatorname{ctg} B}$$

multiplicemus ambos terminos fractionis istius per $\lg B$, habebimus

$$\lg^{\frac{1}{2}} x' = \frac{(\lg A - \lg B) \lg B}{(\lg A - \operatorname{ctg} B) \lg B}$$

X sed $\lg A - \lg B = \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B - \sin B \cos A}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$

et $(\lg A - \operatorname{ctg} B) \lg B = \lg A \lg B - \operatorname{ctg} B \lg B = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos B \sin B}{\sin B \cos B} =$
 $= \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1 = \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} =$
 $= -\frac{\cos(A+B)}{\cos A \cos B}$

sed scimus $\sin(a-90) = -\cos a$

ergo $-\cos(A+B) = \sin(A+B-90)$

propterea his duobus valoribus in ultima aequatione pro
 $\lg A - \lg B$ et pro $(\lg A - \operatorname{ctg} B) \lg B$ erit

$$\lg^{\frac{1}{2}} x' = \frac{\sin(A-B) \lg B}{\sin(A+B-90)} \text{ proposita formula}$$

altitudinibus, ubi refractionis non amplius occurrit. Assumamus,
 stellam transire per Zenith; si diu eadem stella in suis diversis di-
 stantiis usque ad Horizontem et finem correspondentia Argumtha ob-
 servaverit, per observationem in Zenith innotescit stellæ declinatio,
 libera ab influxu refractionis; per quam conjunctionem cum altitudine
 poli et observationis circumstantiis derivari possunt omnes altitudines
 sine refractione. (Differentiæ amborum erant refractionis in ob-
 servatis distantis. — Hæc ratione construxit celeb. Biotus pro-
 priam partem suæ tabulæ refractionum. — In hac tabula a gradu 38
 distantis Zenithalis usque ad 89° refractiones tantum per observationes,
 a 0° vero usque ad 38° et per observationes et per theoriam sunt de-
 terminatæ. — Lacaille pro Argumthis assumpsit angulos horarios,
 Bradley declinationes solis et stellarum in vicinia poli; sed anguli
 horarii non multum magnam præbent certitudinem, et declinationes
 et etiam ipsæ stellæ tantummodo pro parvo numero distantiarum
 servire possunt. Generaliter igitur solum per observationes re-
 fractiones pro omnibus distantis a Zenith non accurate determi-
 nari possunt, accedere debet theoria.

Conjectaria ex omnibus prioribus sunt sequentia:

- 1^a Refractio exferit parvam actionem tantummodo in altitudines.
- 2^a Refractio appropinquat corpora celestia Zenitho.
- 3^a In Zenith Refractio est nulla.
- 4^a Refractio in parvis distantis a Zenith jam est sensibilis et cre-
 scit usque ad Horizontem.
- 5^a Quædam corpora celestia sunt extra regionem atmosphæræ, eorum
 refractiones in eisdem distantis sunt ædum.
- 6^a Argumtha per refractionem non mutantur.
- 7^a Anguli horarii et distantia a polo per eam mutantur.
- 8^a Si corpus celeste in ortu et occasu Horizontem tangere videretur, ip-
 sum est vel supra vel infra eundem.
- 9^a Argumthum corporum celestium, si ea pro nobis sunt in Horizonte

non manet idem, si revera tangunt Horizontum; quod differen-
tia oritur ab obliquo sita orbitarum stellarum respectu Horizontis.
Tabulae sunt constructae pro sic dictis refractionibus medicis, h. e.
fide statum barometri et Thermometri; ut autem ex his medicis crea-
antur verae, admodum est alia tabula quae dat correctiones.

Refractiones medicis autem sunt variables esse statum barometri
et Thermometri maneat constans:

1.^o Si aer est siccus, alio modo se extendit, quam si est humidus,
et si temperatura pro ambobus eadem sit eadem.

2.^o Venti adducunt semper novos fluxus aeris, quorum momentanea
variationes nec in barometro nec Thermometro mutationes produ-
cere possunt.

3.^o Fluidum electricum, per quod certe infusitas aeris nec crescit nec
decrevit, tamen habet, uti observavit Plattei, aliquam actionem
in lucem et turbat directionem radiorum.

4.^o Non sine fundamento quoque conjicere possumus, plures substantiarum
aëri formium quae e terra in aërem transiunt, independentes
a statu barometri et Thermometri, turbare refractionem.

Nos autem habemus ad mensurandum humiditatem et sicci-
tatem hygrometrum, sed hoc instrumentum est adhuc tam im-
perfectum, ut usque ad hoc tempus, adhuc non magnam utilita-
tem praebuerit.

Refraction quoque procedit Crepusculum matutinum et vesp-
erlinum. Si sol majorem quam $90^{\circ} 33'$ distantiam a Zenith ha-
bet, refraction non est haud fortis, ut radii solares pervenire pos-
sint ad oculos nostros; refringantur nimirum irregulariter
per moleculas atmospherae; nos non videmus imaginem solis,
sed pars plus vel minus magna coeli est illuminata; hoc lumen
(aurora) nobis annuntiat ortum solis et semper erit majus, donec sol
sit in Horizonte et hoc phenomenon vocatur Crepusculum.
Quod quoque quoad occasum solis, hinc distinguitur Crepusculum
matutinum et vespertinum.

Pars illuminata atmosphaerae quando sol vel apparet vel disparat,
 habet pro basi circulum horizonis; si autem sol magis est de-
 pressus, curva quae est limes reflexi luminis, semper magis et ma-
 gis est obliqua. — Quando limes L transit per Zenith, observator,
 qui habet solis a tergo, non amplius videbit lucem, et hoc est, quod
 Lambert nominat finem crepusculi civilis.

Si cum attentione perena die prosequimur motum huius curvae,
 apprehendere possumus eiviter momentum, quo disparat et catur,
 tunc pro hac momento distantiam solis a Zenith, invenire pos-
 sumus depressionem solis pro momento, quo incipit et finem adse-
 quitur crepusculum. —

Sit TA haec depressio, et nominetur hic arcus $2a$, &
 deus habebimus in triangulo TBA

$$\cos \angle BTA = \frac{\cos(90+2a)}{\cos H \cos D} = -\frac{\sin 2a}{\cos H \cos D}$$

Si sol autem est in Horizonte est:

$$\cos \angle BTA = -\frac{\sin 2a}{\cos H \cos D} \text{ sine } A$$

$$\cos \angle BTA - \cos \angle BTA = \frac{\sin 2a}{\cos H \cos D} \text{ ex quo}$$

$$2 \sin \frac{1}{2}(\angle BTA - \angle BTA) \sin \frac{1}{2}(\angle BTA + \angle BTA) = \frac{\sin 2a}{\cos H \cos D}, \text{ et}$$

$$\sin \frac{1}{2}(B' - B) = \frac{\sin 2a}{2 \sin \frac{1}{2}(B' + B) \cos H \cos D}$$

ubi B' et B sunt anguli horarii.

Differentia angulorum horariorum correspondentium ortui
 solis et initio crepusculi, divisa per 15, dabit durationem crepusculi.

Cognita autem duratione per observationem, calculari potest

Depressio $TA = 2a$, et hac inventa, calculari potest duratio pro

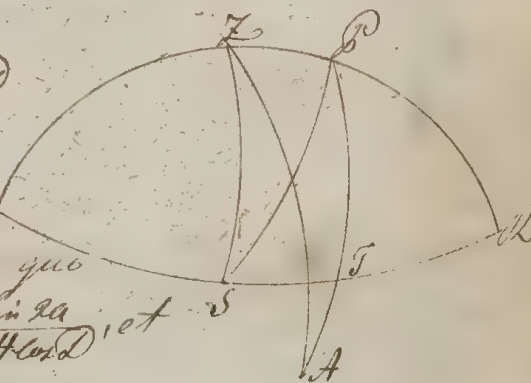
die et loco dato; nam, uti videmus, dependet duratio a latitudi-

ne geographica et a declinatione. — Tantum parvas memores

observationum huius durationis est notis; duae sunt a Lacaille

in Zona torrida, qui invenit $AT = 16^\circ$ et 17° . Lemoigne invenit

17° usque ad 21° , antiquiores assumunt 18° . —



Supponamus $H=0$, $D=0$ erit

$$\cos H \cos D = 1 \quad \text{ergo } H \text{ et } D = 0 = \cos B \quad \text{vel}$$

$$B = 90^\circ = 6^h \quad \cos B - \cos B' = 0 - \cos B' = \sin 2a \quad \text{vel}$$

$B' = 90^\circ + 2a$, et duratio crepusculi $\frac{2a}{15}$ et hoc est brevissimum omnium crepusculorum, nam prior expressio est quod

$$2 \sin \frac{1}{2}(B'-B) = \sin 2a \quad \text{Sed } H \text{ et } D \text{ locum } (B'+B)$$

et productum huius facientium habet pro minimo unitatem.

Crepuscula sunt quoque magis longiora pro latitudinibus maioribus.

Supponamus latitudinem et declinationem esse nullam, Tunc poli erant in Horizonte, et sol describit aequatorem SK , qui transibit per Zenith, arcus BS , motus solis erit mensura anguli crepusculi $BBS = 18^\circ$, et crepusculum durabit $\frac{18}{15} = 1^h 12''$.

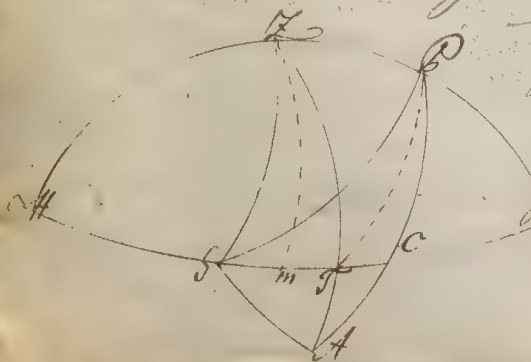
Hic tempore sit AB distantia solis a polo, $Hut = 90^\circ + 2a$, $Hut = 2a$, Hut erit duratio crepusculi, hinc trian-

gulum in H rectangulum Hut dabit

$$\sin HBA = \frac{\sin Hut}{\sin BA} = \frac{\sin 2a}{\cos D}$$

que quantitas est maior quam $\sin 2a$, hinc crepusculum quoque erit aut declinatione.

Problema brevissimi crepusculi occupavit patris Bernoulli per 8 annos; Joannes Bernoulli tandem dedit resolutionem per suam methodum de maximis et minimis. Nos dabimus hic resolutionem multo faciliorem et magis completam.



Sit $Hut = 90^\circ + 2a$, $AB = 2a$, S sol in Horizonte. Triangulum rectangulum ABS dabit

$$\cos AS = \cos A \cos S = \cos 2a \cos (BS - AS) = \cos 2a \cos (B'S - B'S')$$

($\cos AS$ est constans)

Alterius BS erit parvum, maxima erant $\cos BS$ et $\cos AS$.

Hinc minus AS , et revera videmus, quando sol ascendit a $18^\circ 2a$ h.e. ab A usq. ad S , tempus semper

minimus

minus esse, quo minor est declinatio, et jam diminuit, omnium minimum esse crepusculum, si AS est perpendicularis ad Horizonem, et $\angle S = 0$ et $\angle ZS = \angle ZAT = 90^\circ$ hinc $Sa = \angle ZS - \angle ZAT$ est minimum possibile, si non poterit esse zero, tunc

$$\cos \angle ZAT = \frac{\cos \angle ZAT - \cos \angle ZS \cos \angle ZAT}{\sin \angle ZS \sin \angle ZAT} = \frac{\sin D}{\cos H \cos 2a} + \lg H \lg 2a$$

supponamus $2a = 0$, $\cos \angle ZAT$ erit $\cos \angle ZS = \frac{\sin D}{\sin H}$

$$\cos \angle ZAT - \cos \angle ZS = \lg H \lg 2a + \frac{\sin D}{\cos H \cos 2a} - 1 = \lg H \lg 2a + \frac{\sin D}{\sin H} (1 - \cos 2a)$$

$$\sin \frac{1}{2}(\angle ZS - \angle ZAT) = \frac{\lg H \lg 2a + \frac{\sin D \sin a}{\cos H \cos 2a}}{2 \sin \frac{1}{2}(\angle ZAT + \angle ZS)}$$

$\angle ZS - \angle ZAT$ erit minimum possibile, si $\sin \frac{1}{2}(\angle ZAT + \angle ZS) = 1$ h. e.

$$\angle ZS + \angle ZAT = 180^\circ \text{ hinc } \angle ZS = 180^\circ - \angle ZAT$$

Hinc Angulus debet esse supplementum unum ad alterum, vel

$$\angle RS + \angle S = 180^\circ; \frac{1}{2}(\angle RS + \angle S) = 90^\circ = \text{sum et } m\angle = -m\angle$$

$$\text{Id } \sin \angle S : \sin \angle ZS = \sin \angle Z : \sin \angle ZAT \quad \text{hinc } \sin \angle ZS = \sin \angle ZAT$$

$$\sin \angle ZAT : \sin \angle ZAT = \sin \angle Z : \sin \angle ZAT \quad \angle ZS = \angle ZAT$$

Hinc anguli Solis et ad iudicium et ad finem crepusculi sunt inter se aequales, et hinc principio superstruxerunt Maedius et Agnoli eorum solutiones. — Propterea $\lg \angle BZ = \sin \angle BZ \lg \angle BZ = \sin \angle BZ \lg \angle BZ$ hinc

$$\lg \angle BZ = \lg \angle BZ \text{ seu } \angle BZ = \angle BZ \text{ ex quo } \angle S = 180 - \angle S \text{ seu } \angle S = 90^\circ \text{ ergo } \angle S = 90^\circ - D$$

$$\text{ulterius } \lg \angle BS = \frac{\lg \angle BS}{\sin \angle BZ} = \frac{\lg \angle BS}{\sin \angle BZ} = - \lg \angle BS \text{ hinc}$$

$$\angle BS + \angle BS = 180^\circ \text{ deinde } \cos \angle ZAT = - \cos \angle ZS, \text{ hinc}$$

$$\lg H \lg 2a + \frac{\sin D}{\cos H \cos 2a} = - \frac{\sin D}{\cos H}$$

$$\sin H \sin 2a = - \sin D - \sin D \cos 2a = - \sin D (1 + \cos 2a)$$

$$2 \sin H \sin a \cos a = - 2 \cos a \sin D, \text{ et } \sin D = - \sin H \lg a$$

et hoc est formula quam Bernoulli dedit sine demonstratione

$$\cos \angle ZS = \frac{\sin D}{\cos H} = - \lg H \lg a, \text{ et } \cos \angle ZAT = + \lg H \lg a$$

$$= \sin m\angle = - \sin m\angle \text{ nova formula}$$

His suppositis, aequatio prior $\cos \angle AS = \cos \angle AS \cos \angle S$ erit

$$\cos \angle AS = \cos 2a \cos 2m\angle$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} A S = (1 - 2 \sin^2 a)(1 - 2 \sin^2 m D)$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} A - 2 \sin^2 m D + 4 \sin^2 a \sin^2 m D$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A S = \sin^2 a + \lg^2 a \lg^2 H - 2 \sin a \lg a \lg H = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 H} \left(\cos^2 H + \frac{\sin^2 H}{\cos^2 a} - 2 \lg a \sin^2 H \right)$$

$$= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 H} (\cos^2 H + \sin^2 H - \sin^2 H \lg^2 a) = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 H} (1 - \sin^2 D) = \frac{\sin^2 a \cos^2 D}{\cos^2 H} \text{ et}$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A S = \frac{\sin a \cos D}{\cos H} \text{ et } \frac{\sin^2 \frac{1}{2} A S}{\cos^2 D} = \frac{\sin a}{\cos H} = \sin^2 \text{ anguli durationis} = \sin^2 (B' - B)$$

aequatio celeb. Lagueri. —

$$\text{Sed } \sin^2 (B' + B) = \frac{\sin 2a}{2 \sin^2 (B' - B) \cos H \cos D} = \frac{2 \cos a \sin a}{2 \sin a \cos H \cos D} = \frac{\cos a}{\cos D}$$

Triangulum B'ZS dat

$$\cos B'Z = \cos S \sin ZS \sin B'S + \cos ZS \cos B'S$$

$$\sin H = \cos S \cos D \text{ et}$$

$$\cos S = \cos H = \frac{\sin H}{\cos D} \text{ ex triangulo B'SH}$$

Prioribus formulis autem quod dant

$$\cos B'Z \cos B'S = \frac{\sin D}{\cos H} \cdot \frac{\sin H}{\cos D} = \lg D \lg H = \cos ZB'S$$

hinc in triangulo rectangulo B'ZS cosinus anguli oppositi lateri 90° aequatur producto cosinum alterorum angulorum. —

Haec hanc simplicem analysin applicatam ad duo triangula sphaerica et sine operibus calculi differ. et. solis, pervenerimus ad hanc solutionem magis completam quam quilibet alicuiusq. auctoris qui se hac re occupavit.

Determinatio temporis per observationes.

Quoniam corpora coelestia in continuis versantur motibus respectu plani Hæ. rizonæ, Meridiani etc, ad quæ plana eorum situs referri solent, Astro- nomus apud quamvis observationem, non tantum hunc situm, sed et tempus assignare debet pro quo hic situs locum habuit. Hæc Determinatio temporis ex observationibus pertinet ad maxime præci- pua partes Astronomiæ. —

Simplicissimum medium determinationis temporis est methodus altitudinum correspondentium h. e. altitudinum æquatium alicujus astri in utraq. parte Meridiani. Sive cognitione altitudinis ipsius altitudinis, sive cognitione situs astri in coelo, vel observatoris in terra

Si hanc hanc mod. de aequalitate altitudinum et de uniformi motu horo-
logii sumus convicti, medium tempus horologii inter ambas observa-
tiones quoq. pro tempore culminationis observati astri assumi poterit, quon-
iam uti jam prius habuimus, ad aequales altitudines quoq. aequales, sed quoad
signa contraria, anguli horarii pertinent posita nimirum declinatione
astri constanti. — Hoc tempus culminationis cum illo per calculum
emendato astri moti tempore culminationis dabit statum horologii
respectu adhibiti temporis veri, medi vel siderici. Eadem disquisitio alio
tempore, repetita, dat secundum statum horologii et ex his duobus stati-
bus horologii, motus diurnus vel horarius horologii respectu temporis
adhibiti derivari potest. — Ex invento hac ratione statum et motu ho-
rologii, deinde facile per simplicem proportionem tempus verum ejusdem
altitudinis observatis inveniri potest. —

Posito v.c. tempore horologii in meridie vero

$$4 \text{ Maji } 6^h 2' 24''$$

$$5 \text{ " } 0' 2' 54''$$

sequitur statum horologii respectu temporis veri 4. Maji in meridie
fuisse $2' 24''$ et motus diurnus accelerans $30''$. P. autem 4. Maji aliqua
observatio facta est tempore horologii $10^h 14' 32''$, dein est

$$24^h : (10^h 14' 32'') = 30^h : x$$

$$\text{vel } x = 12^h 52''$$

$$\text{hinc est } 10^h 14' 32'' - 2' 24'' - 12^h 52'' = 10^h 11' 52'' 25''$$

tempus verum observationis.

Si autem declinatio astri, cujus altitudines correspondentes sunt ob-
servatae, esset variabilis, uti hoc v.c. caput solum locum habet, anguli
horarii aequalibus altitudinibus correspondentes non amplius erant
aequales. Sicut nimirum s et s' si anguli horarii, t et t' tempora
altitudinum aequalium, deinde tempus culminationis non amplius est
aequale $T = \frac{t+t'}{2}$ sed $T = \frac{s-s'}{15}$

Ad inveniendam hanc correctionem, sit s, s', s'' angulus horarius
et declinatio pro observatis aequalibus altitudinibus h ante et post meridiem

Quia est $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s$

$\sin h = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos s'$

Multiplicando primam aequationem per $\cos \delta'$ et secundam per $-\cos \delta$, earum summa erit

$$\sin h (\cos \delta - \cos \delta') + \sin \varphi \sin (\delta' - \delta) - \cos \varphi \cos \delta \cos \delta' (\cos s' - \cos s) = 0$$

$$\text{vel } \sin \frac{s-s'}{2} = \frac{\sin \varphi \sin (\delta' - \delta) - 2 \sin h \sin \frac{\delta+\delta'}{2} \sin \frac{\delta-\delta'}{2}}{2 \cos \varphi \cos \delta \cos \delta' \sin \frac{s+s'}{2}}$$

et valor hic $\frac{s-s'}{2}$ erit quæsitæ correctio.

Magis apta ad calculum est sequens expressio

$$s-s' = (\delta-\delta') \left(\frac{\lg \varphi}{\sin \delta} - \frac{\lg \delta \cos \delta}{\sin s} \right)$$

inmirum prior aequatio sine errore ita scribi potest

$$s-s' = \frac{\sin \varphi (\delta-\delta') - \sin h \sin (\delta-\delta')}{\cos \varphi \cos \delta \sin s}$$

et substituto pro h valore

$$\begin{aligned} s-s' &= (\delta-\delta') \left[\frac{\sin \varphi - (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin s)}{\cos \varphi \cos \delta \sin s} \right] \\ &= (\delta-\delta') \left[\frac{\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \cos \delta \sin s}{\cos \varphi \cos \delta \sin s} \right] \end{aligned}$$

ex quo allata expressio, vel brevius tantummodo differentiando aequationem pro h respectu s et δ , statim oritur quæsitæ aequatio.

Si ergo x sit quæsitæ correctio in tempore et $d\delta$ variatio declinationis in dimidio intervalli observationum, erit

$$x = \frac{d\delta}{15} \left(\frac{\lg \varphi}{\sin 15\theta} - \lg \delta \lg 15\theta \right)$$

Adhuc minus possumus, si sumatur una altitudo respectuque altera notatus tempore, tempus inferioris culminationis solis seu tempus vere meridies noctis inveniri. Si iterum est θ dimidium intervallum observationum dimittit, si pro meridie erat $s = 15\theta$, pro media nocte $s = 180 + 15\theta$

$$\text{hinc correctio } x = - \frac{d\delta}{15} \left(\frac{\lg \varphi}{\sin 15\theta} + \lg \delta \lg 15\theta \right)$$

In ambabus expressionibus pro australibus declinationibus $\lg \delta$ est quantitas negativa, et si sol est in primo aut quarto quadrante, $d\delta$ est negativum, usque valor semper ex ephemeridibus sumi potest.

Si horologium in hora respectu adhibiti horologii, accelerat quantitate x , vel retardat, prior valor quantitatæ x in primo casu per $(1+x)$ in se, cundo

in secundo per 1- α multiplicari debet. —

Alia est parva correctio propter determinationis temporis oritur ex consideratione, refractionem post meridiem propter maiorem caliditatem atmosphaerae, aliqua quantitate minorem esse, quam ante meridiem, hinc solem post meridiem aliquo temporeculo prius pervenire ad eandem altitudinem, et hinc quoque ex observationibus conclusus meridiem, erit aliqua quantitate ante verum meridiem. Haec correctio, quae autem fere in omnibus casibus in sensibilibus est, exprimi potest, ubi quilibet facile invenire potest, per + ^{dr} 30 ^{cos} ^q ^{cos} ^{lat} ^{sol} ubi ^{dr} est differentia refractionum pro altitudinibus ante et post meridiem. Prius correctio propter mutationem declinationem potest in commodis tabulis poni, quae autem jam in fere omnibus operibus Astronomicis occurrunt.

Exemp. Göttingae 22 Martii 1791 sequentes correspondentes observationes superioris Stellae Solis sunt factae:

Observ. altitud.	ante	Tempus horologii post meridiem
22° 55.5	20° 46' 9"	4 ^h 16' 14"
23 20.5	49' 9"	13 3
23 25.5	49' 45"	12 28
23 30.5	50' 20"	11 54

Dimidia summa prioris et ultimi temporis dat 0^h 31' 6".5 pro tempore in crescenti meridiei.

Semidistantiam harum observationum est 3° 44' 57.5 vel in arcu 56° 14' 22.5.

Altitud. poli est $\phi = 51° 31' 54"$. Declinatio solis in meridiem (ex ephemeridibus) est $\delta = 28° 47'$ et variatio 23' 26" hinc variatio in 3^h 45' est $d\delta = -219".6$ minus quia sol est in primo quadrante longitudinis.

$$\text{Hinc est } \frac{d\phi}{15} \cdot \frac{d\delta}{\sin \delta} = -22".17 \quad \frac{d\delta}{15} \tan \phi \cos \delta = -0.48$$

hinc quaepta correctio $\alpha = -21".69$

et tempus in meridiem vero 0^h 31' 6".5 - 21".69 = 0^h 30' 44".8

Each ratione tractari possunt quoque sequentes correspondentes altitudines, sed multo commodius erit, quod re in correctum meridiem ex medio omnium observationum, correctionem tantum semel calculare pro meridiem omnium observationum ante et post meridiem, quia pro parvis temporum intervallis haec correctio fere proportionalis sunt temporibus. —

Si horologium inter duas sequentes culminatio uis solis non fere 24^h sed v.c. 24^h 41' daret, prior correctio & adhuc per $\frac{24^h 41'}{24^h} = 1.003$ multipli-
cari deberet. —

Ex una sola observata altitudine invenire tempus. — Resolutio hujus
problematis, quod pro Astronomia practica maxime est momenti, continetur
est in sequentibus expressionibus

$$\cos S = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

velposito $h = 90 - Z$ $\sin^2 \frac{S}{2} = \frac{\sin^2 \frac{Z - \varphi + \delta}{2} \sin^2 \frac{Z + \varphi + \delta}{2}}{\cos^2 \varphi \cos^2 \delta}$

vel tandem $\cos^2 \frac{S}{2} = \frac{\cos \varphi + \cos Z \cos \delta}{\cos \varphi - \cos Z \cos \delta}$

Si observatum fides est sol, $\frac{S}{15}$ erit tempus verum quæsitum; pro cunctis
ceteris sideribus præter nota debet esse aspectus recta & sideris observati,
et A aspectus recta veri solis pro momento observationis, sed hæc ultimi-
ma tantum per ambages inveniri potest, quum quæritur tempus ve-
rum observationis. — Assumitur namque aliqua approximata aspec-
tus recta solis, v.c. pro meridie diei observationis, et cum hac quæritur
approximatum tempus verum, et deinde pro hoc tempore correspondens aspec-
tus recta solis, cum qua quæritur correctum tempus verum; hæc methodus
notis repeti debet, quoties ad præscriptum finem est necessarium. — Inven-
tis hæc ratione S , α et A , erit quæsitum tempus verum $= \frac{\alpha - A + S}{15}$.
Quantitas h , ante applicationem in calculo, per parallaxin et Refractionem
corrigi debet, ut si induci debet per præcessionem, Aberrationem et Nec-
tationem ad apparentem declinationem.

Exemp. I. Die 17 Junii 1810 Casani observata est:

Tempore			Altitud superioris limbi solis		
H^h	M'	$44''$	30	15	19
H	51	24	28	53	49

Quum declinatio solis in vicinia solstitii lentissime mutatur, potest
assumi pro $H^h 46'$ $\delta = 23^\circ 23' 24''$. Altitud poli est $\varphi = 55^\circ 47' 39''$
hinc dat prima observatio

distans a Zenith	$59^\circ 44' 41''$
Refraction	+ 1 37
Radius solis	15 47
Parallaxis	7
$Z =$	$60^\circ 1' 58''$

eadem

Eadem ratione pro 2 observatione $\star = 64^{\circ} 28' 34''$

ex quo anguli horarii sunt $70^{\circ} 34' 20''$
 $73^{\circ} 2' 32''$

et in tempore $4^h 42' 20''$ } temporis veri
 $4^h 52' 10''$

Hinc horologium respectu temporis veri plus dat $45''.5$

Pro hoc momento tempus medium $17''$ majus est tempore vero, hinc dat horologium $62''.5$ plus respectu temporis medi.

Exemp. 2. Die 31. Martii 1790. Vicinus observata est altitudo Reguli (α Leonis)

$54^{\circ} 41' 8''$ tempore $9^h 2' 20''$

Refractio $— 48''$
 $90 - Z = 54^{\circ} 40' 21''$

$S = 12^{\circ} 59' 28''$, $Q = 48^{\circ} 12' 36''$

Hinc $S = -3^{\circ} 19' 38''$ negative quia observatio facta est in orientali parte Meridiani.

Quoniam horologium fere jam dedit tempus verum, pro $9^h 2' 20''$ est ascensio

pro recta veri Solis (ex ephemeridibus) $A = 6^h 41' 29''.5$

pro altera ascensio recta stellae $\alpha = 9^h 57' 11''.0$

Hinc tempus verum observationis $\alpha - A + \frac{S}{15} = 9^h 2' 28''.0$

vel horologium dedit $3''$ minus respectu temporis veri.

Pro stellis fixis, commodissimum est, si non tempus verum solare, sed tempus siderarum observatio nis queritur.

Si nimirum S est secundum priora calculatus angulus horarius, & apparet ~~apparet~~ recta fideris, idem tempus siderale observationis est $\alpha + S$; et ex hac tempore siderali, si necessarium est, secundum priora, tempus verum et medium inveniri potest.

Exemp. 1819 11. Maji erat observata a refractione liberata, distantia a Zenith α Orionis

$73^{\circ} 41' 46''.7$ tempore horologii $10^h 39' 55''.5$

Hujus sideris apparetis ascensio recta est $\alpha = 86^{\circ} 20' 30''.0$

apparetis declinatio $\delta = 7^{\circ} 21' 56''.2$ Altitudo poli $Q = 45^{\circ} 24' 2''.5$

Hinc $S = 73^{\circ} 19' 46''.6$

$\alpha = 86^{\circ} 20' 30''.0$

$159^{\circ} 40' 16''.6 =$

$10^h 38' 41''.11$ tempus siderale
 $10^h 39' 55''.5$ tempus horologii
 $— 1^m 14''.39$ correctio horologii

Eodem modo immediate tempus medium observationis inveniri potest.
 Si nimirum est α , ut prius, apprensus a pennis recta sideris, et M ascen-
 sis recta mediis solis pro meridie diei observationis (ex ephemeridibus)
 ambo in tempore expressi, et angulus horarius S secundum priora
 quoque inventus est, diu est prius sum approximatam tempus medium
 observationis

$$T = \alpha - M + \frac{S}{15}$$

et haec expressio esset perfecte accurata, si Sol mediis a meridie diei
 observationis suam ascensionem rectam non mutasset, vel quod
 idem est si inter meridiem et observationem tempus medium esset
 aequale tempori siderali. Quia autem hoc non ita evenit, habeat
 prior quantitas T , quae in tempore siderali expressa est, ad tempus
 medium reduci debet. — Erit igitur tempus correctum medium ob-
 servationis, secundum priora

$$T = 0.0024904 T$$

ubi T est expressum in horis earumque partibus.

Exemp. Transientibus observant Alexandriae 11. Octobris 1764
 tempore $10^h 56' 25''$ distantiam a puncto Aldebarani (& Tauri)

$$61^\circ 24' 30''$$

error instrumenti erat $- 3' 0''$

ascensio recta apprensus stellarum $\alpha = 4^h 22' 16''.35$

declinatio apprensus $\delta = 16^\circ 0' 39''.65$

altitudo poli $\varphi = 31^\circ 12' 13''.0$

refractio $- 1' 44''.2$

$$M = 13^h 20' 43''.926$$

$$\text{hinc } T = 61^\circ 26' 14''.2$$

$$\text{et ex hoc } S = 65^\circ 56' 13''.93 = 19^h 36' 15''.074$$

$$4 22 16.35$$

$$M / \text{veridicus} = 23^h 58' 31''.424$$

$$M = 13 20 43.926$$

$$T = 10 37 47.498$$

$$- 1 44.485$$

tempus medium observat = $10^h 36' 3''.013$
 vel horologium dat $20' 21''.987$ plus respectu temporis medi.

propt.

Post duas dies 12. Octob. tempore $12^h 23' 34''$ observavit J. Kantianus

$$\text{altitudo ejusdem stellae} = 41^{\circ} 34' 50''.5$$

$$\alpha = 4 \ 22 \ 16.436$$

$$\delta = 16 \ 0 \ 39.72$$

$$M = 13 \ 28 \ 36.047$$

$$\text{tunc } s = 42 \ 36 \ 22''.378$$

$$\text{ergo } \alpha - M + s = 12^h 3' 14''.895$$

$$- 1 \ 58.486$$

$$\text{tempus medii} = 12^h 1' 16''.409$$

horologium dedit $22 \ 22' 17''.591$ plus respectu temp. med.

Ut haec methodus commodius recipi possit, queri potest pro pluribus eludis angulis horarius apparentis altitudinis sideris h' , instrumentum poni ad hanc altitudinem, et tempus horologii cum assumpto aliquo horario comparari, ex quo statim horologii prodest. Si v. c. pro Sole h' est vera altitudo centri, h' apparentis altitudo superioris limbi, Declinatio centri, et Q altitudo poli, dicitur pro quolibet angulo horario

$$\text{ergo } \alpha = \cos s \cot g Q$$

$$\sin h = \frac{\sin Q \sin(\alpha + s)}{\cos \alpha}$$

$$h' = (h + \text{radio } O) + \text{refractione} - \text{Parallaxis}$$

ubi refractione pro vera altitudine $h + \text{rad. } O$, non pro apparenti queri debet.

Si calculatus pro determinato loco in aliqua tabella valores quantitatatum α et $\log \frac{\sin Q}{\cos \alpha}$ a S ad S , minuta prima, per plures horas, et ante et post meridiem, applicatio hujus methodi, magnopere abbreviatur. Non inutile erit sine gradum exactitudinis, quem obtinere possumus per calculum temporis absolutis.

$$\text{Nos habuimus } \sin h = \sin Q \sin \alpha + \cos Q \cos \alpha \cos s.$$

Differentiando hanc aequationem, assumendo tantum h et s , quae variables erit

$$ds = \frac{dh \cos h}{\cos Q \cos s \sin s}$$

Designando per ω Argumentum, erit quoque

$$\frac{\cos h}{\sin s} = \frac{\cos s}{\sin \omega} \quad \text{tunc } ds = \frac{dh}{\cos Q \sin \omega}.$$

Ex hoc sequitur, pro eodem valore quantitas dth , variationem anguli horarii ds esse eo minorem, quo major est $\sin w$. Sed hic valor erit in suo maximo, si $w = 90^\circ$. Hinc maxime favorabile monumentum ad determinationem anguli horarii locum habet, si astrum est in suo primo verticali. Sed non semper est possibile observare astrum hac favorabili monumentum; sed eligendi aliquod astrum, cuius declinatio est parva, et quod fere 115° distat a meridiano, magna quoque circumfusione determinari potest semper. Formula praecedens hac ratione quoque ferri potest.

$$dth = ds \sin w \cos Q$$

et haec formula dat quoque demonstrationem principii, quo innititur methodus actualis observationis, viz. cum altitudines astrorum, in aliqua distantia a meridiano, crescere proportionaliter temporibus, et hinc mensuram variationis altitudinum correspondere exacte epochis quoque mediis. Et revera, si $\sin w$ non multum differt ab unitate, et series observationum non sit admodum longum tempus durat, uti de 8^{a} et 10^{a} variatio non magnum habet influxum in valorum factoris $\sin w \cos Q$, vel quod idem est, variatio altitudinis crescit proportionaliter annuaria, tunc semperis ds . Sed si $\sin w$ est admodum parvum, dicitur valor quantitas dth , crescit uti quadratum temporis, ~~pro~~ quia in hoc casu, w est proportionale ipsi s . Generationem ad cognoscendam durationem observationum altitudinum sui distantiam a meridiano calculatur ex formula

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin Q \sin d}{\cos Q \cos d}$$

valor quantitas s correspondens valori medio quantitas h ; dicitur faciendo variare s de medio intervallo huius series, determinatur h per

$$\sin h = \sin Q \sin d + \cos Q \cos d \cos s$$

ubi s est novus angulus horarius; hac ratione habebitur $h' - h = dth$, dicitur calculatur quoque dth per formulam prius adductam, sumendo pro s et h ^{eorum} valores medios, si dicitur h duo valores consentiunt usque ad 100 minuti suum, media ^{distancia} ~~distancia~~ considerari potest, qua correspondens epochis mediis observationem.

Quando desideramus tempus verum cum magna precisione, et ha-
bemus complures factas observationes, vel si observationes impletas,
inter unum circulo respectu fore, hinc et hinc observationes dispa-
rent, ut habeatur una distantia media et unum tempus medium da-
tum per pendulum; hac ratione v. c. si habentur decem conjunctas
observationes, habentur quoque decem correctiones temporis, quarum
medium decem erit correctio pro momento medio inter omnes obser-
vationes. - (Uniformitas variationis distantiarum et temporis.)

Inter methodos propositas ad reductionem omnium distantiarum
meridies observationum ad tempus medium, in hoc omnia tempora
penduli, potissimum innotat Regia est illa, propter suam elegantiam
et simplicitatem, quam dedit BODNER in Berlin. GASSBUCH pro
anno 1818.

Sit Q altitudo poli, d declinatio, ω arcus
horum solis, α angulus horarius, α angulus inter verticalem et
circulum declinationis, z distantia a zenith; erit

$$\cos z = \sin Q \sin d + \cos Q \cos d \cos \alpha$$

Assumamus, variabilem z crescere quantitate Δz , angulus horarius
 α , qui est punctus hujus variabilis, crescit $\Delta \alpha$. Quantitates Q et d
considerantur quae constantes, et si quantitas S non maneat constantis
(compensantur in utroque medio).

Per Theorema Taylorianum est

$$\Delta z = \frac{dz}{d\alpha} \Delta \alpha + \frac{d^2 z}{d\alpha^2} \frac{\Delta \alpha^2}{1.2} + \frac{d^3 z}{d\alpha^3} \frac{\Delta \alpha^3}{1.2.3} + \dots$$

Differentiando hanc aequationem priorem, erit:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{\sin S \cos Q \cos d}{\sin z}$$

$$\frac{d^2 z}{d\alpha^2} = \frac{\cos S \cos Q \cos d}{\sin z} - \frac{\cos z \sin S \cos Q \cos d}{\sin^2 z} \cdot \frac{dz}{d\alpha}$$

praeterea triangulum sphaericum inter Zenith, polum et locum Solis
dat

$$\sin \alpha \cos d = \cos Q \sin \omega$$

$$\sin S \cos Q = \sin z \sin \alpha$$

hinc

hinc $\frac{dz}{ds} = \sin a \cos \omega$ $\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\cos s \cos \varphi \cos \omega}{\sin R} - \frac{\cos \varphi \cos \omega \sin a \cos \varphi \sin \omega}{\sin R}$

sed $\cos s = \sin a \sin \omega \cos R - \cos a \cos \omega$ hinc

$$\frac{d^2z}{ds^2} = - \frac{\cos \varphi \cos \omega \cos a}{\sin R}$$

ex quo $\Delta z = \frac{\Delta s \cos \varphi \cos \omega \sin s}{\sin R} - \frac{1}{2} \Delta s^2 \frac{\cos \varphi \cos \omega \cos a}{\sin R} + \text{etc}$

Nos negligimus terminum tertii ordinis, quia pene in omnibus casibus, contenti possumus esse cum hac gradu approximationis. Distantia Zenithalis correcta hinc erit huius formae

$$R + \Delta z = R + a \Delta s - b \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Delta s}{\sin 1''} + \text{etc}$$

propto nimirum $\frac{1}{2} \Delta s^2 = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta s$

Quilibet et alia distantia Zenithalis, quam hac correspondens seminat, vallo, simili modo reduci potest, earumque summa, si designetur per symbolum sequens $\Sigma(R + \Delta z)$ et erit:

$$\Sigma(R + \Delta z) = \Sigma R + a \Sigma \Delta s - b \Sigma \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Delta s}{\sin 1''} + \text{etc}$$

Est O summa distantiarum observatarum = $\Sigma(R + \Delta z)$ et n. numerus observationum, habebimus pro distantia media:

$$\frac{O}{n} = \frac{\Sigma R}{n} + \frac{a}{n} \Sigma \Delta s - \frac{b}{n} \Sigma \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Delta s}{\sin 1''} + \dots$$

Si autem omnes observationes referantur ad momentum medium, terminus primus, proportionalis variationi temporis, in prima potentia constabit ex duabus partibus aequalibus sed diversis signis affectis, nimirum pro medio ex primis observationibus signo plus pro secundis signo minus affectis, hinc hic terminus evanescit, quod quoque experientia confirmat. Ergo simpliciter erit:

$$\frac{\Sigma R}{n} = \frac{O}{n} + \frac{b}{n} \Sigma \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Delta s}{\sin 1''}$$

Distantia $\frac{\Sigma R}{n}$ quae locum habet pro momento medio temporum, differt igitur a distantia media observata quantitate $\frac{b}{n} \Sigma \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Delta s}{\sin 1''}$ Coefficientis $b = \frac{\cos \varphi \cos \omega \cos a}{\sin R}$ continet quantitates a et ω , quae

ante

ante omnia Debeant Determinari, quod facile fit ex aequationibus

$$\sin a = \frac{\sin s \cos \varphi}{\sin \alpha} \text{ et } \sin w = \frac{\sin s \cos \delta}{\sin \alpha}$$

et quia angulus s datus est per perpendicularum, omnia erant nota pro δ determinatione coefficientis, b. - Quantitas $\sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta s}{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}$ in tabulis poni potest, ubi revera jam existant. Quantitas Δs obinetur sumendo differentiam momenti meridii et ejusdem temporis observationis. Attendere quoque debemus ad determinationem signi quantitalis b, h. e. attendere an anguli a et w sint obliqui aut acuti. In nostro climate, angulus α est semper acutus, sed arimutuum per magnam partem diei est obtusum; semper est obtusum si declinatio Solis est Australis, sed si est borealis, arimutuum w potest esse acutum, si Sol non magnopere est elevatus supra Horizontum; Tandem hoc arimutuum semper est rectus, si Sol transiit per primum verticalem. Cumis in, coelitus tollitur per formulam $\cos s = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin \alpha}$, per quam invenit hora diei, quando angulus w est rectus. -

Alteri methodus procedendi secundum Solones, est, calculandi una vice s , a , et w datis φ , δ , et φ ; declinatione, tempore assumpta illa, quae correspondet mediae praei. Angulus horarius δ , seu tempus verum, ad quem hac ratione pervenimus, tantum est approximatus; ille corrigetur, inquirendo affectionem, quam potest provenire in angulo horario ista parva variatio distantiae mensuralis $\frac{1}{n} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta s}{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}$ per praecedentia habetur

$$ds = \frac{dx \sin \alpha}{\cos \varphi \cos \delta \sin \alpha}$$

pro dx autem poni potest ejus via $\cos \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta s}{n \sin^2 \frac{1}{2} \alpha} \cdot \frac{\cos \varphi \cos \delta \cos \alpha \cos w}{\sin \alpha}$

$$\text{erit} \quad ds = \sum \frac{(2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta s)}{n \sin^2 \frac{1}{2} \alpha} \frac{\cos \varphi \cos \delta \cos \alpha \cos w}{\sin \alpha}$$

Correctio temporis approximati erit $\frac{ds}{15}$. - Magna necessaria est attentio in calculo hujus ultimae formulae ad signa functionum trigonometricarum. Notari potest $\sin s$ esse positivum post transitum per Meridianum, negativum ante hunc transitum.

Clambris comparavit numeris methodum ordinariam cum
illa celeb. Soldner, et videtur esse tunc eandem simplicitatem et eade
si horis, concludere correctionem mediam penduli ex resultatis
partialibus per observationes conjunctas quatuor et quatuor.

Ex q. Tempus medium inter viginti observationes est inventum
 $3^h 38' 36''.95$ in loco cujus distantia poli a Zenith erat $39^{\circ} 10' 20''.1$
distantia puncti mediis, correcta a refractione et parallasi
 $51^{\circ} 14' 5''$, declinatio Solis pro momento in primis $21^{\circ} 26' 40''$, ex
hoc concludi potest per methodum ordinariam tempus correspondens

distantia mediis	$3^h 38' 38''.13$
Horologium	$3 38 36.95$
hinc correct, resultat,	$+ 1' 58''.82$

si sumamus observationes quatuor et quatuor, media correctio erit
 $- 2' 1''.3$

Ex hoc sequitur, correctionem mediam penduli, correspondentem
ad horam intermediam esse exactissime $2' 1''.3$. Hinc ipsae vigin-
ti observationes in unam solum conjunctas producant errorem $2''.5$.
Calculando binas et binas observationes, correctio penduli est $2' 1''.55$.
Formula celeb. Soldner dat hoc ultimum resultatum ac c. c. d.
(vide Connaissance des Temps de 1820)

Methodus pro praxi ad medium conueniens statim penduli ex temporibus
ubi duo nubes stellae unam est si ignotam altitudinem habuit,
determinari potest.
Sint α, α' ascensio recta et declinatio in motu diurno producentis
stellae, α' et δ' pro sequenti stella, δ tempus siderale in gradus
mutatum intervalli observationum, θ angulus amborum circulorum
horariorum, in quibus stellae observatae sunt, erit scilicet, si stella in
orientiori circulo horario prius observata est

$$\theta = \alpha' - \alpha + \delta$$

in casu contrario $\theta = \alpha' - \alpha - \delta$

Si est angulus horarius stellae in occidentiori circulo horario, $\theta - \delta$
erit angulus horarius alterius stellae, et si h est communis altitudo habe-
mus

$$\sin h = \sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \delta \cos s = \sin \theta \sin \delta \cos \theta \cos s (\theta - s)$$

ex quo

ex quo $(\cos \delta - \cos \delta' \cos \theta) \cos s - \cos \delta' \sin \theta \sin s = (\sin \delta' - \sin \delta) \operatorname{tg} \varphi$
 Nunc fit $\frac{\cos \delta - \cos \delta' \cos \theta}{\cos \delta' \sin \theta} = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\theta + \gamma)$ Nunc est

$$\cos \delta' \sin \theta [\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\theta + \gamma) \cos s - \sin s] = (\sin \delta' - \sin \delta) \operatorname{tg} \varphi \text{ et}$$

$$\sin(\frac{1}{2}\theta + \gamma - s) = \frac{(\sin \delta' - \sin \delta) \operatorname{tg} \varphi \cos(\frac{1}{2}\theta + \gamma)}{\cos \delta' \sin \theta}$$

Ad calculum logarithmicum quantitatis γ est

$$\frac{\cos \delta}{\cos \delta' \sin \theta} = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\theta + \gamma) + \operatorname{ctg} \theta = \frac{\cos(\frac{1}{2}\theta - \gamma)}{\cos(\frac{1}{2}\theta + \gamma)}$$

et $\frac{\cos \delta - \cos \delta'}{\cos \delta + \cos \delta'} = \frac{\cos(\frac{1}{2}\theta - \gamma) - \cos(\frac{1}{2}\theta + \gamma)}{\cos(\frac{1}{2}\theta - \gamma) + \cos(\frac{1}{2}\theta + \gamma)} \text{ h. e.}$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tg} \gamma \text{ Nunc}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta$$

praeterea $\frac{\cos \delta - \cos \delta'}{\cos \delta'} = \frac{\cos(\frac{1}{2}\theta - \gamma) - \cos(\frac{1}{2}\theta + \gamma)}{\cos(\frac{1}{2}\theta + \gamma)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\theta \sin \gamma}{\cos(\frac{1}{2}\theta + \gamma)}$

Nunc fit $\sin(\frac{1}{2}\theta + \gamma - s) = \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin \gamma (\sin \delta' - \sin \delta)}{\cos \frac{1}{2}\theta (\cos \delta - \cos \delta')} = \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin \gamma \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' + \delta)}{\cos \frac{1}{2}\theta}$
 $= \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\delta' - \delta)}{\sin \frac{1}{2}\theta}$

Exemp. Pro 1815 12 Martii

α Andromedae $21^h 33' 26''$ Tempus punctuli sideralis

α Lyrae $22 \quad 5 \quad 21$

Positiones apparentes hancum stellarum sunt

$$\alpha = 18^h 30' 28.96, \quad \delta = 38^\circ 37' 6.6$$

$$\alpha' = 23 \quad 58 \quad 33.33, \quad \delta' = 28 \quad 2 \quad 14.8$$

Nunc $\theta = 89^\circ 59' 50.55$

$\varphi = 51^\circ 31' 54''$

Nunc $\gamma = -3^\circ 29' 4.93$

$s - \frac{1}{2}\theta - \gamma = 9 \quad 28 \quad 9.93$

$\frac{1}{2}\theta + \gamma = 41 \quad 30 \quad 50.34$

$s \pm 50^\circ 59' 0.24 = 3^h 23' 56.02$

$\alpha = 18 \quad 30 \quad 28.96$

Tempus sideris observ. α Lyrae $= 21^h 54' 24.98$

Tempus punctuli $22 \quad 5 \quad 21.00$

Correctio punctuli $= -10' 56.02$ (vide Bert. Jahrbuch 1796 p. 139)

Quia in magnis latitudinibus geographicis Sol, qui potissimum ad
determinationem temporis et per correspondentes et per simplices altitu-
dines adhiberi solet, non amplius sit aptus ad observationes altitudi-
num uti videmus in precedenti deductione potissimum idonei monente,
huius loco distantia solis ab aliquo quoad positionem suam accurate deter-
minato objecto terrestri observari, et hac ratione tempus determinari po-
test. (Vide monatliche Correspondenz III. B.)
Sit φ altitudo aequatoris, A, Z azimuth et distantia a Zenith ob-
jecti terrestris, quae ambe quantitates ex observationibus quae nocte
praesupponantur, dein invenitur angulus horarius S et distantia a
polo P per sequentes expressiones

$$\tan x = \frac{\sin \varphi - \frac{A}{2}}{\sin \varphi + \frac{A}{2}} \tan \frac{A}{2}$$

$$\sin \frac{P}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi + \frac{A}{2}}{2}}{\cos x} \cos \frac{A}{2}$$

$$\sin S = \frac{\sin A \sin \frac{A}{2}}{\sin P}$$

Si nunc A seu distantia a Zenith astri noti, cuius distantia
a polo est p et angulus horarius S , est observata, s. invenitur
ex aequatione $\sin \frac{S - S'}{2} = \frac{\sqrt{\sin \frac{A + B - p}{2} \sin \frac{A + p - B}{2}}}{\sin B \sin p}$

ubi $\frac{S - S'}{2}$ fore est 90° melius est ac habere similitudinem expressionum.
pro $\cos \frac{S - S'}{2}$ vide Berl Jahrbuch 1811 p. 99. et 1819 p. 129)

Nece parum quoque est respicere refractionem objecti terrestris et
aetri. Prima facit, ut quantitates S et P revera non sint constan-
tes. Sed refractione terrestri admodum est incerta, et ejus variatio
praecipue si objectum non est in magna distantia ab observatore,
tam parva, ut fere in omnibus casibus negligi possit. Refractio fidem
autem duplici modo respici potest. correctio nimirum vel ad distantiam
a polo p et ad angulum horarium applicari potest, vel ad apparentem
distantiam A ut tractetur in veram A' .

Sint p' et S' haec quantitates refractione affectae, π angulus parallacticus,

$d\alpha = \text{Refract.} - \text{Parallaxis altitud.}$ etc. est

$p' - p = d\alpha \cos z$ et $S' - S = d\alpha \frac{\sin z}{\sin p}$

Pro secundo casu queritur $\Delta' - \Delta$ etc.

Hae omnia supponunt azimuthum objecti horisphericis quae notum; in sequentibus videbimus, quomodo hoc azimuthum ex observationibus determinari possit. Hoc notari potest, quantitas S et P inveniri posse, sine cognitione azimuthi, ex duabus observatis distantis huius objecti a noto astro et intervallo temporum.

Quaerimus ad resolutionem huius problematis, quando primo erit de determinatione altitudinis poli et temporis veri ex observatis duabus distantis a Zenith aliujus astri et tempore inter medio.

Simplicissimum uti et certissimum medium determinationis temporis per observationis est illud per tubum meridianum seu sit dictum culminatorium, h. e. per tubum, qui in axi horizontali accurate in plano Meridiani mobilis est. Observatus nimirum transitus stellarum in filis verticalibus, quae sunt in focis ambaram Zenith, et inveniendo hac ratione tempus culminationis, tantum, modo hoc tempus cum calculato tempore medio aut siderali culminationis comparari debet, ut eluceat error penduli. Sed magis complicata est haec methodus, si instrumentum ipsum erroribus est obnoxium, uti haec semper loqui habet, si v. l. axis horizontalis tubi aliquam inclinationem versus horizonem habeat, vel axis optici, et tubi aliquam inclinationem versus Meridianum habeat, et nos videbimus in nostris praedictionibus practicis, quomodo isti errores erui in calculum vocari possunt, et quomodo generatim istud instrumentum, quod pro Astronomia maxime est momenti adhiberi debeat.

Si autem observator non est instructus culminatorio, omnes priores methodi sunt admodum molestae. Celeb. Olbers proposuit aliam methodum, quae propter suam facilitatem et praecisionem in applicatione peritissimum notatu digna est. Si nimirum in vicina loci,

ali

ubi observationes fiunt, est altus perpendicularis murus, vel aliud ver-
ticale objectum terrę, v. c. conductor, turris; ab observari possunt
disparitiones stellarum fixarum, et si salubris tempus ponatur in
eodem loco, si v. c. notentur loca fixarum, evidens est, stellas, quando
appropinquantes et distantia mutant eadem, quo libet de eodem tempore dispa-
ratione. — Si tunc aliquo die correctio penduli v. c. per altitudines correspon-
dentes est inventa, notum est tempus fixarum vel medium harum dispa-
rationum, pro hoc die observationum, et ex hoc facile diu tempus pro
aliis diebus inveniri potest.

Omnes ceterę methodi determinationis temporis non magis sunt
utilitates pro practica; tantummodo actum unum problematis hic ac-
feram, quod sepius magna cum commoditate adhiberi potest.

Ubi jam sepius habuimus, est

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos s$$

$$\text{et pro alia stella } \sin h' = \sin \phi \sin \delta' + \cos \phi \cos \delta' \cos s'$$

Multiplicando primam harum æquationum per $\cos \delta'$ faciendam per
 $\cos \delta$, erit earum summa

$$\sin h \cos \delta + \sin h' \cos \delta' - \sin \phi \sin (\delta + \delta') = \cos \phi \cos \delta \cos \delta' (\cos s + \cos s') \dots (1)$$

et earum differentia

$$\sin h' \cos \delta - \sin h \cos \delta' + \sin \phi \sin (\delta - \delta') = \cos \phi \cos \delta \cos \delta' (\cos s' - \cos s) \dots (2)$$

Dividendo hanc æquationem (2) per (1) erit

$$\tan \frac{s+s'}{2} \tan \frac{s-s'}{2} = \frac{\sin h' \cos \delta - \sin h \cos \delta' + \sin \phi \sin (\delta - \delta')}{\sin h \cos \delta + \sin h' \cos \delta' - \sin \phi \sin (\delta + \delta')} \dots (3)$$

Æquatio (2) dat quoque si $\delta' - \delta$ est parvum

$$\sin \frac{s+s'}{2} \sin \frac{s-s'}{2} = \frac{2 \cos \delta \cos \frac{\delta+\delta'}{2} \cos \frac{\delta-\delta'}{2} + (\delta' - \delta) (\sin \phi - \sin h \sin \frac{\delta'+\delta}{2})}{2 \cos \phi \cos \delta \cos \delta'} \dots (4)$$

Si observationes institutę sunt in eodem vel in diversis partibus
Meridiani, in primo casu $\delta' - \delta$, in secundo $s + s'$ est datum, si nota sunt
tempora penduli observationum, hinc pro quolibet casu ex æquationi-
bus (3) vel (4) singuli anguli horarii s et s' vel tempora observatio-
num innotescunt.

Si $\delta = \delta'$ pro una eademque fixa, ultima æquatio erit:

$$\sin \frac{s+s'}{2} \sin \frac{s-s'}{2} = \frac{\sin \frac{h-h'}{2} \cos \frac{h+h'}{2}}{\cos Q \cos d}$$

Et per hanc aequationem invenitur tempus ex duabus altitudinibus opus,
veneri stellae et ex intervallo temporis observationum. —

Si tandem in aequatione (2) ponantur altitudines aequales, erit:

$$\sin \frac{s-s'}{2} = \frac{\sin Q \sin (d-d') + 2 \sin h \sin \frac{s+d}{2} \sin \frac{s-d}{2}}{2 \cos Q \cos d \cos d' \sin \frac{s+s'}{2}}$$

ex quo correctio $\frac{s-s'}{2}$ altitudinum correspondentium invenitur.

Ex aequatione (4) quilibet facile videt, ad determinationem temporis per
hanc methodum, neq. declinationem neq. altitudinem poli, neq. altitudines
ipsas cum magna praecisione notas esse debere, sed tantummodo differen-
tiam altitudinum, et differentiam declinationum quam accuratissime
determinatum esse debere, ut quoq. pro angulo horario accuratum resul-
tatum evadat. —

Determinatio altitudinis poli per observa- tiones.

(1) Altitudo poli primo ex qua libet observata altitudine noti sideris
inveniri potest, si notum est tempus observationis h. e. angulus hora-
ris sideris; hanc rationem in aequatione sequenti, tantum Q est ignotum,
nimirum

$$\sin h = \sin Q \sin d + \cos Q \cos d \cos s$$

ponatur $q = \cos s$ et

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin Q \sin d + \cos Q \cos d \cos s \\ &= \sin Q \sin d + \frac{\cos Q \sin d \sin x}{\cos x} \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin h \cos x &= \sin Q \sin d \cos x + \cos Q \sin d \sin x \\ &= \sin d (\sin Q \cos x + \cos Q \sin x) = \sin d \sin (Q+x) \end{aligned}$$

$$\text{hinc} \quad \sin (Q+x) = \frac{\sin h \cos x}{\sin d}$$

Si observatae fuerint altitudines correspondentes, haec dant tempus
culminationis astri et angulos horarios, qui pertinent ad quamlibet
altitudinem, hinc omnia, quae sunt necessaria ad resolutionem pro-
blematis. —

Differentiando priorem aequationem respectu quantitatuum h , s , et Q , erit

introducendo $\sin \omega = \frac{\cos \delta \sin \alpha}{\cos \varphi}$ et $\cos \omega = \frac{\sin \varphi \sin \delta - \sin \alpha \cos \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$

$$d\varphi = -\frac{d\delta - \cos \delta \sin \varphi d\alpha}{\cos \omega} \text{ ubi } \omega \text{ azimuthum est;}$$

et hac ultima aequatione expressione sequitur, observationis altitudinem admodum aptas esse in vicinia Meridiani. —

Si altitudo sideris ipso momento ^{culminationis} observata fuerit, deinde est, si vultur error instrumenti, refractione et parallaxi correcta distantia a Zenith et declinatio apparentis sideris in parte australi Zenithi

$\varphi = \delta + \delta$ ubi australis declinationis sunt negativae; et in parte boreali Zenithi pro superiori culminatione

$$\text{pro inferiori } \varphi = 180 - \delta - \delta$$

Atque soleni et aliis sideribus notabilis radii, observatur altitudo superioris vel inferioris limbi, quia centrum non cum exactitudine observari potest. —

Exemp. 1809 8. Febr. Braconis

observata distantia a Zenith superioris limbi solis

	64° 50' 54".28
error collim.	3 13.4
	64° 47' 40".88

Bar. 27" 6.5 par. correct refraction + 2 9.00

Therm. Bracon. 4.0. radius (ephemerid.) + 16 15.36

parallelis altitudinis — 7.78

$$\delta = 65^{\circ} 5' 54".46$$

$$\delta = -15^{\circ} 2' 16".70$$

$$\varphi = 50^{\circ} 3' 40".76$$

Si praeter altitudinem pro Meridiano error collimationis instrumenti non esset ignotus, duae necessariae sunt duae observationes in diversis partibus Zenithi ad determinationem harum quantitatuum. —

Si π , δ est distantia a Zenith et declinatio sideris in parte australi Ze-
nithi, π , δ in parte septentrionali, dñm habebimus, si error collimationis
est nullus $\Phi = \pi + \delta$, $\Phi' = \delta - \pi'$

Altitudo equalis pro superioribus altitudinibus; pro inferioribus
loci δ scribi debet $180 - \delta$.

Si nunc instrumentum omnes distantias a Zenith v. l. dat quanti-
tate a minores, ubi tunc est a error collimationis, dñm est, si no-
minemus Φ correctam altitudinem poli,

$$\Phi = \pi + a + \delta, \quad \Phi' = \delta - (\pi' + a)$$

Eliminando quantitatem a , erit

$$\Phi = \frac{\Phi' + \Phi}{2}$$

et eliminando Φ , est $a = \frac{\Phi' - \Phi}{2}$

vel vera altitudo poli est dimidia summa; et error collimationis
dimidia differentia superioris inventarum in correctarum altitudinum
poli.

Exemp. 1808 30. Sept. Pracovis in australi parte Meridiani

observata dist. a Zenith	apparent δ
300 Aquilae $47^{\circ} 20' 52".1$	$2^{\circ} 44' 57".3$
384 Aquilae $43 \quad 6 \quad 31.7$	$6 \quad 59 \quad 23.3$
714 Aquilae $39 \quad 56 \quad 6.2$	$10 \quad 9 \quad 47.9$

Barom. $27^{\circ} 1^m 6$ Mas.

Therm. $+ 8^{\circ} 0$ Reaumur.

2 Octob. ejusdem anni in septentrionali parte Meridiani

δ arct. minor.	$36^{\circ} 33' 24".9$	$86^{\circ} 34' 38".1$
50 Draconis	$25 \quad 11 \quad 43.0$	$75 \quad 12 \quad 31.7$
52 V. —	$21 \quad 1 \quad 58.5$	$71 \quad 2 \quad 51.1$

Barom. $27^{\circ} 5^m 6$

Therm. $+ 4^{\circ} 8$

Prima observatio dat $47^{\circ} 20' 52".1$

Corrupta refractione $1 \quad 0.4$

δ $2 \quad 44 \quad 57.3$

Altitudo poli $50^{\circ} 6' 49".8$

Eadem ratio de ceteris

Altitudo

Hinc est ex tribus primis aequationibus observatio huius

$$\text{Altitudo poli } 50^\circ 0' 49''.8$$

$$47.0$$

$$40.6$$

$$\text{Meditum } \varphi = 50^\circ 0' 45.8$$

Ex tribus ultimis

$$\text{Altitudo poli } 50^\circ 0' 30''.6$$

$$21.4$$

$$30.5$$

$$\text{Meditum } \varphi' = 50^\circ 0' 24''.6$$

$$\text{Hinc vera altitudo poli est } \varphi = \frac{\varphi + \varphi'}{2} = 50^\circ 0' 36''.7$$

$$\text{Error collimationis } a = \frac{\varphi' - \varphi}{2} = -3' 9''.1$$

quae quantitas ab aequationibus diffinitis a Zenith subtrahi debet.

Applicatio huius methodi est quam simplicissima et maxime sicura, si australis et borealis altitudines sunt ejusdem magnitudinis, quia deinceps latitudo applicatur. Precautionis evanescit, sed quoque ad alias diversas magnitudines altitudinis, uti ex exemplo videmus, additum prodest.

Si eadem stella his in verso instrumento observatur ita, ut subiectis eadem stella his in verso instrumento observatur ita, ut subiectis visus huius in prima observatione v. c. versus Orientem, in secunda versus Occidentem fuerit, error collimationis in ambabus observationibus habebit eundem valorem, sed diversa signa, hinc sufficiens dies talis observationis ad determinationem huius erroris, sed nonnullum verum altitudinis poli, quae altitudo supponit quoque cognitionem declinationis.

Sint e.g. h. h' observatae altitudines sideris in versis positionibus instrumenti, ambae in inferiori culminatione, tunc est vera altitudo poli, si a est error collimationis

$$\varphi = h - a + 90 - \delta, \quad \varphi' = h' + a + 90 - \delta$$

$$\text{ex quo error collimationis } a = \frac{h - h'}{2}$$

$$\text{Hinc vera altitudo poli est } \varphi = \frac{h + h'}{2} + 90 - \delta$$

supposito, habere in ambabus observationibus eundem valorem.

Et altitudo poli etiam independens a declinatione in versis

sint H, H' alia duo altitudines ejusdem stellae diversae positioni-
bus instrumenti, et ambae in superiori culminatione, deinde alteram

$$\Phi = H - a - (90 - \delta)$$

$$\Phi' = H' + a - (90 - \delta)$$

hinc error collimationis $H - H'$ et altitudo poli $\frac{\Phi + \Phi'}{2} = \frac{H + H'}{2} - (90 - \delta)$

Si conjugantes haec resultata cum prioribus, deinde et omnibus
quatuor observationibus

$$\text{error collimationis } a = \frac{(H - H') + (h - h')}{4}$$

$$\text{et vera altitudo poli } H = \frac{(H + H') + (h + h')}{4}$$

Si duas culminat. supra posui in parte australi Zenithi, pro obser-
vationibus altitudinibus earum complementa ad 180 sumi debent, et
haec per H, H' exprimi. — Ad variationem Declinationis quoque
respicere debet. —

Ad determinationem altitudinis poli, potissimum stellae circum-
polares sunt idoneae, quia, uti appropinquantes videmus, Declina-
tio hujus stellae non sit necessaria, si ambae culminationis obser-
vationes, et neque cognitio erroris collimationis, si in versis positis,
vibus instrumenti observatur. —

Precipue stella polaris quae maxime vicina polo, potissimum
apta est ad determinationem altitudinis poli, quia et sua va-
riatio altitudinis in vicinia Meridiani, et differentia refractionis
in ambabus culminationibus est tam parva, ut quoque parvus error
in momento culminationis non magnum habeat influxum in qua-
sitam altitudinem poli. Si observationes superiores et inferiores
culminationis pluribus distant a se diebus, ita, ut Declinatio si-
ceris pro ambabus observationibus, non amplius qua constans
assumi possit, respicere debemus quoque ad hanc variationem Declina-
tionis. — Optimum erit, quamlibet singularem observationem
cum correspondente apparenti declinatione calculare, per quod accipimus

tot res ultatae pro altitudine poli, quot sunt observationes, ita tot uno in
 hinc harmoniam singulorum observationum perspicere possumus. Error qui
 pro suppositam non accurate veram declinationem ardet, et qui apud p^h,
 tam polarem non potest locum habere, quum haec admodum bene jam est de-
 terminata; et qui semper erit parvus ad res ultatae ultimam, vel ad dimi-
 diam summam^q superiori et inferiori culminatione conclusa altitudinis po-
 li, nullum habebit influentiam, quum in hac dimidia summa propter ejus si-
 qua diversa evanescat.

Si tantum una v. c. superior culminatio alicujus stellae circumpolaris inversae
 instrumento observata est, dein est, si δ est observata distantia a Zenith et
 r deflexio,

$$\begin{array}{lcl} \text{instrumento versus r^o p^o occasum} & Z + a + r = \delta - \varphi \\ \text{-----} & \text{ortum} & Z' - a + r = \delta - \varphi \end{array}$$

nunc $\varphi = \delta - \left(\frac{Z + Z'}{2} + r \right)$ et $a = \frac{Z' - Z}{2}$

Eadem ratione pro inferiori culminatione

$$\begin{array}{lcl} \text{instrumento versus occasum} & Z + a + R = 180 - D - \varphi \\ \text{-----} & \text{ortum} & Z' - a + R = 180 - D - \varphi \end{array}$$

nunc $\varphi = 180 - D - \left(\frac{Z + Z'}{2} + R \right)$ et $a = \frac{Z' - Z}{2}$

et quamquam quodlibet horum φ dependeat a declinatione, tamen medium
 ex ambobus tantummodo a differentia declinationum in intervallo tem-
 poris est dependens, cum habeamus

$$\varphi = 90 - \frac{1}{2} \left(\frac{Z + Z' + Z'' + Z'''}{2} + R + r \right) + \frac{1}{2} (D - D')$$

Si autem vellemus eandem culminationem inversae instrumento
 observare, sedus non amplius erit in plano Meridiani. Videbimus au-
 tem inferius, quomodo distantia observata a Zenith in vicinia Meridiani
 per simplicem calculum reduci possit ad distantiam Zenithali meridiano.

Maximae utilitatis ad determinationem altitudinis poli sunt in-
 dictae altitudines circummeridianae, h. e. altitudines observatae non in
 magna distantia a Meridiano, quarum magnus numerus ante et post
 Meridianum uno die observari potest. Si reducantur hae observatae altitu-
 dines ad eam, quae locum habet momento culminationis, habentur lat-
 itudines altitudinis h. e. tot determinationes altitudinis poli, quot
 habentur verae altitudines observatae.

Dantur variae methodi, perficiendi hanc reductionem ad Meridianum;

nos hic tantummodo praecipuam adferemus.

$$\text{Sic } \frac{\sin a - \sin b}{\cos a} = x$$

$$\text{Sed est quoque } x = \frac{\sin a - \sin(a-b)\cos a - \cos(a-b)\sin a}{\cos a}$$

Si in hac expressione pro $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$ substituamus valores per potentias quantitatis $(a-b)$ erit

$$x = (a-b) + \frac{(a-b)^2}{1.2} \lg a - \frac{(a-b)^3}{1.2.3} - \frac{(a-b)^4}{1.2.3.4} \lg a + \dots$$

et invertendo hanc faciem

$$a-b = x - \frac{x^2}{1.2} \lg a + \frac{x^3}{1.2.3} (1+3 \lg a) - \frac{x^4}{1.2.3.4} (9 \lg a + 15 \lg^2 a) + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} (105 \lg^4 a + 90 \lg^3 a + 9) -$$

Sed, ubi facimus, altitudo alicujus sideris h , ad quam pertinet angulus horarius φ , altitudo poli Q et declinatio δ , expressa est per sequentem aequationem $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi$

Si autem h' et δ' sint meridiana altitudo et declinatio hujus sideris, et $h-h' = dh$ erit

$$h = h' - dh = 90 - \varphi + \delta' - dh$$

hinc prior aequatio

$$\cos(\varphi - \delta' + dh) = \cos(\varphi - \delta') - 2 \cos \varphi \cos \delta' \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

vel etiam

$$\frac{\cos(\varphi - \delta') - \cos(\varphi - \delta' + dh)}{2 \sin \varphi \sin(\varphi - \delta')} = \frac{2 \cos \varphi \cos \delta' \sin^2 \frac{\delta}{2}}{\sin(\varphi - \delta')}$$

Si haec expressio comparatur cum procedenti $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a} = x$

est $a = 90 - \varphi + \delta'$, $b = 90 - \varphi + \delta' - dh$, $x = 2m \sin^2 \frac{\delta}{2}$ ubi $m = \frac{\cos \varphi \cos \delta'}{\sin(\varphi - \delta')}$

hinc est

$$\begin{aligned} dh \sin \delta' &= (\delta' - \delta) \sin \delta' + 2m \sin^2 \frac{\delta}{2} - 2m^2 \sin^4 \frac{\delta}{2} \operatorname{ctg}(\varphi - \delta') + \\ &+ 4m^3 \sin^6 \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{3} + \operatorname{ctg}^2(\varphi - \delta') \right) - 2m^4 \sin^8 \frac{\delta}{2} (9 \operatorname{ctg}(\varphi - \delta') + 5 \operatorname{ctg}^3(\varphi - \delta')) + \\ &+ m^5 \sin^{10} \frac{\delta}{2} (28 \operatorname{ctg}^4(\varphi - \delta') + 24 \operatorname{ctg}^2(\varphi - \delta') + \frac{12}{5}) - \\ &- m^6 \sin^{12} \frac{\delta}{2} (84 \operatorname{ctg}^5(\varphi - \delta') + \frac{280}{3} \operatorname{ctg}^3(\varphi - \delta') - 20 \operatorname{ctg}(\varphi - \delta')) + \dots \quad (I) \end{aligned}$$

et haec expressio est quae sitis valor reductionis dh alicujus extra meri, i. e. annui observatae altitudinis ad altitudinem meridianam. Apparet invariata, si sidus culminat in parte australi hemisphaerii.

Si sidus culminat in sex polum et hemisphaerii, est:

$$h' = 90 + \varphi - \delta$$

$$m = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\delta - \varphi)}$$

hinc pro $\delta' = \delta$

$$\text{dth sin } l'' = 2m \sin^2 \frac{\delta}{2} - 2m^2 \sin^4 \frac{\delta}{2} \text{ctg}(\delta - \varphi) + 4m^3 \sin^6 \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{3} + \text{ctg}^2(\delta - \varphi) \right) \dots (II)$$

Si sidus culminat infra polum est $h' = \varphi + \delta - 90$, $m = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\varphi + \delta)}$ hinc pro $\delta' = \delta$

$$\text{dth sin } l'' = 2m \sin^2 \frac{\delta}{2} - 2m^2 \sin^4 \frac{\delta}{2} \text{ctg}(\varphi + \delta) + 4m^3 \sin^6 \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{3} + \text{ctg}^2(\varphi + \delta) \right) \dots (III)$$

Et hic valor quantitatis dth in (I) et (II) ad h addi, in (III) vero ab h subtrahi debet, ut obtineatur altitudo meridiana h. ---

Quantitas $(\delta' - \delta)$ in (I) ante meridiem est negativa et post meridiem positiva; si distantia sideris a polo crescit; et in verso, ante meridiem positiva, et post meridiem negativa, si distantia sideris a polo decrescit. Si altitudines non in magna distantia a Meridiano sunt observatae, duo primi termini expressionis pro dth sufficiunt, et fere semper tantum primus terminus. --- Primum membrum acutum hujus aequationis $2m \sin^2 \frac{\delta}{2}$, commodè calculari potest, si conficiatur tabula, quae cum argumento δ det quantitatem $\left\{ \frac{2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right\}$ ubi et secundum membrum, si esset necessarium, per aliam parvam tabulam, quae cum eodem argumento det quantitatem $\left\{ \frac{2 \sin^4 \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right\}$. Loco applicationis tandem cuiusque harum reductionum ad correspondens h, brevius applicatus summa omnium dth ad summam omnium h, et hoc ultima summa per numerum omnium observationum dividi-
ditur. Quodritur nimirum cum argumento $\delta = t = \frac{\delta}{15}$ cuiusque observationi correspondens numerus in prima tabula, multiplicetur omnium summa per $\frac{m}{n}$, ubi $m = \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin(\delta - \varphi)}$ et n numerus observationum; hoc hac ratione obtentum productum erit membrum primum aequationis (II); eodem modo quaeretur cum eodem argumento summa numerorum secundae tabulae et multiplicetur hoc productum per $\frac{m^2}{n} \text{ctg}(\delta - \varphi)$, et hoc productum erit secundum membrum propositae aequationis (I). In fere omnibus casibus sufficit, valores hujus secundi membri tantummodo pro aliquibus observationibus

calculandi, et ex his convenientiores pro intermedium observationibus
per simplicem interpolationem determinandi. —

Apud stellas fixas pars $(D-N)$ evanescit uti et parallaxis et radius;
pro his commodissime adhibentes horologia sideralia, et tempus in-
ter tempus horologii observationis et tempus culminationis assumit
qua angulus horarius. Si adhibetur horologium medicum, hoc inter-
vallum pro stellis fixis per 1.00244 multiplicari debet. Commodius
quoque haec correctio in factore 1.00 dñ applicari potest. Si nimirum
a est diurna acceleratio in minutis secundis respectu temporis sideris
(pro retardationibus a est negativum) dñ adhuc multiplicari debet
per $1 - \frac{2a}{24.66} = 1 - 0.00062312$. —

Si sol v. e. observatus cum horologio siderali dñ est, sine $a = 236''$
hinc ipse factor quantitatis dñ aequalis 0.99485. Si autem stella
fixa cum horologio ^{medico} observantur dñ est ipse factor 1.0085. —

Si tandem hac ratione obtinetur in vicinia superioris culminationis,
nis altitudo meridiana H et in vicinia inferioris H' , dñ est
 $\frac{1}{2}(H+H')$ altitudo poli loci observationis, et $\frac{1}{2}(H-H')$ distan-
tia a polo sideris, respectu habito quoque ad refractionem. —

Sine tali tabula tandem sequens expressio quantitatis dñ pro
calculo numerico est commodissima. Est nimirum

$$\sin \frac{\delta}{2} = \left(\frac{5}{2}\right) \sin 1'' - \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^3}{1.2.3} \sin^3 1'' + \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5} \sin^5 1'' - \dots$$

Hinc obtinetur pro aequatione (I), si haec series usq. ad $\left(\frac{5}{2}\right)^9$ con-
tinuatur

$$dh = (D-N) + (0.2930294)mt^2 - (0.9406044-6)m^2t^4 \operatorname{ctg}(\varphi-D) - (0.4934834-6)mt^4 \\ + (0.9492095-11)m^2t^6 \left(\frac{1}{3} + \operatorname{ctg}^2(\varphi-D)\right) + (0.4720883-11)m^2t^6 \operatorname{ctg}(\varphi-D) + (0.2959970-12)mt^6$$

ubi t, minuta prima temporis, dñ secunda arcus, et coefficientes
numeri jam logarithmici sunt. —

Itam correctio observationum distantiarum a Zenith propter variationem
Declinationis, sequenti modo commodius inveniri potest. Sit A summa
omnium angulorum horariorum ante et B post meridiem, ambo in

minuta primis temporis expressa; d_p augmentum distantiae a polo
Solis in uno minuto primo (d_p negativum si distantia a polo decrevit.);
tandem N numerus observationum, dein est

$$\text{Corrigendum } L = L + (A - B) \frac{d_p}{N}$$

Parallaxis altitudinis Solis potest sumi 8." $\sin L$ (Berl. Jahrb. 1844 p. 138)

Ad acquisitionem utilitatis hujus methodi et limitum in applicatione
querere volumus errores primi membri seriei, qui ex aliquo errore tri-
um quantitatum δ , δ , ϕ promanent, nam valores astronomicorum errorum
sunt multo minores.

Proprio igitur $dh = \frac{2 \cos \phi \cos \delta \sin^2 \frac{\delta}{2}}{\sin \phi - \delta \sin 1''}$ erit pro errore angulo horario

$$d^2 h = dh \cdot \delta \sin \frac{\delta}{2}$$

et pro erronea declinatione

$$d^2 h = \pm \frac{dh \cdot \delta \sin 1''}{\cos \phi \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

et pro erronea altitudine poli

$$d^2 h = \pm \frac{dh \cdot \delta \sin 1''}{2 \cos \phi \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Signum superioris in his ultimis duabus expressionibus pro seriei (I),
inferius pro (II) et (III).

Ex hac videmus, præter utramquam accuratissimam determinationem
temporis, nos debere in utraq. parte Meridiani æqualem numerum
observationum, si fieri potest, facere, quia quod est eliminatio nem $\delta \sin \frac{\delta}{2}$
et hinc quoq. dh in prima præcedentium æquationum signum mutat,
per quod igitur quodlibet positivum dh per correspondens negativum
diminuetur.

Ceterum quum dh sit communis factor in omnibus his tribus æqua-
tionibus, in duabus ultimis quoq. dh evitari debemus admodum ma-
gnos angulos horarios, ubi et stellæ, ubi ϕ fere = δ est.

Generatim, si in æquatione

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \pi$$

omnes quantitates ponentur variabiles et introducuntur quantitates
 $\sin \omega$, $\cos \omega$, et $\cos \pi$, ubi π est angulus ut aut verticalis cum circulo
declinationis erit:

$$d\phi = - \frac{dh}{\cos \omega} - \delta \sin \frac{\cos \phi \sin \omega}{\cos \omega} + \delta \cos \frac{\cos \pi}{\cos \omega}, \text{ ex quo sequitur,}$$

quam

quam speciosissime determinari posse altitudinem poli, ex observationibus
quam maxime vicinis Meridiano, uti jam prius diximus. —
Si in priori aequatione differentiale quantitas $\frac{d\delta}{ds}$ respectu δ et d
ponatur aequale zero, erit:

$$\sin \delta = \frac{d\delta}{ds} (\lg \varphi - \lg \cos \delta)$$

si $\frac{d\delta}{ds}$ est unum minus secundum, $\frac{d\delta}{ds}$ erit variatio declinationis
in uno minuto secundae. Quum autem quantitas $\frac{d\delta}{ds}$ uti et angulus hora,
rursus δ maxime altitudinis, tantummodo admodum parvus esse potest, dein
est, si nominetur $D\delta$ angulus horarius maxime altitudinis,

$$D\delta = \frac{d\delta}{ds} (\lg \varphi - \lg \cos \delta) = \frac{d\delta}{ds} \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Illa sidera igitur, quorum declinatio variabilis est, habent proprie suam ma-
ximam altitudinem non in sed extra Meridianum, pro angulo horario $D\delta$.
Pro sole potest ipse angulus ^{horarius} $D\delta$ minima ^{secunda} efficere, sed ex hoc se-
quens differentia altitudinis meridiana et maxime solis est, ut si facile
videre possimus, admodum parva. Pro luna vero hic angulus horarius
efficere potest 4 et 5 minuta prima, et ex hoc sequens differentia alti-
tudinum est $30''$.

Prius enucleata correctio meridiei altitudinum correspondentium soli,
quae fit $\Delta\delta$, est

$$\Delta\delta = \frac{d\delta}{ds} (\lg \varphi - \lg \cos \delta)$$

si igitur haec altitudines sunt summae in vicinia meridiana, δ vicinus δ
admodum parvus et aequale ds , hinc

$$\Delta\delta = \frac{d\delta}{ds} \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta}$$

ergo

$$\Delta\delta = D\delta$$

vel, tempus maxime altitudinis solis aequalis est tempori incorrecti
meridiei ex altitudinibus correspondentibus, si haec altitudines sunt summae
in vicinia Meridiana.

Ex prioribus sequitur quoque, pro parvis angulis horariis pro quibus
 $\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \varphi \cos \delta}$ est quantitas constans, quadratum anguli horarii se habere uti
differentiam observatae et meridionalis altitudinis. Sint igitur H, h'
altitudines, T, t' eorum tempora, sinist. si H est altitudo tempore
meridiei

$$(T - t')^2 \cdot (H - h') = (T - t)^2 \cdot (H - h)$$

vel

vel
$$H = \frac{h(T-t)^2 - h'(T-t')^2}{(T-t')^2 - (T-t)^2}$$

et ita invenitur ex solo tempore horologii meridiei, et per tempora duarum observationum altitudinem et per has ipsas altitudines, altitudinem meridionalis seu altitudinem poli, sine priori cognitione huius altitudinis poli et Declinationis.

Hæc methodus adhuc simplificari potest.

Sint tres observatæ altitudines cum suis temporibus

$$\begin{matrix} h, & h+\alpha, & h+\alpha' \\ T, & T+\beta, & T+\beta' \end{matrix}$$

ubi et H altitudo meridionalis, et $T+t$ tempus meridiei, deinde est:

$$H-h = B\beta^2$$

$$H-(h+\alpha) = B(\beta-\beta')^2$$

$$H-(h+\alpha) = B(\beta-\beta')^2$$

ubi B est quantitas constans. —

Eliminando quantitatem B , erit

$$\alpha\beta^2 = (H-h)(2\beta-\beta')^2$$

$$\alpha'\beta'^2 = (H-h)(2\beta'-\beta)^2$$

et ex his duabus æquationibus eliminando H , erit

$$t = \frac{\alpha\beta'^2 - \alpha'\beta^2}{2(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \quad \text{--- (A)}$$

Et hic valor quantitates t in una penultima æquationum substitutus, dat

$$H = h + \frac{(\alpha\beta'^2 - \alpha'\beta^2)^2}{4\beta\beta'(\beta' - \beta)(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \quad \text{--- (B)}$$

Æquatio (B) dat altitudinem meridionalis, et (t) angulum horarium t , hinc tempus meridiei $T+t$. —

Æquatio (B) habet hoc commodum, ut per eam altitudo meridionalis ex una altitudine h et differentiis invenitur.

In applicatione huius methodi, cognitio neq. declinationis, neq. altitudinis poli, neq. temporis meridiei, quod maxime solito per altitudines correcti, rationes queritur, quæ sepius sunt propter variam tempestatem molestæ, neq. absoluti temporis observationum, sed tantummodo earum differentiarum necessaria est. (Berol. Jahrb. 1799 p. 148).

Præterea iam ostendit, pro determinatione altitudinis poli, præ ceteris potissimum stellas in vicinia poli aptas esse, et inter has præcipue stellam polarem, seu et ipsa minoris. — Effi generationem

obs
27

observationes horum astrorum meridionales, aptius sunt ad determinationem
altitudinis poli, tamen etiam alie altitudines, observate stellarum circa poli-
rum in omnibus punctis prout in colorum parallelorum cum utilitate
adhiberi possunt. Si nimirum δ aequatur 90° seu $\cos \delta = 0$, prior aequatio
differentialis habebit hanc formam

$$dQ = dh \frac{\cos h}{\cos Q \sin \delta} + ds \sin \delta \operatorname{ctg} \delta + d\delta \cos \delta, \text{ minimum}$$

$$\sin h = \sin Q \sin \delta + \cos Q \cos \delta \cos s$$

$$dh \cos h = dQ \sin \delta \cos Q + d\delta \sin Q \cos \delta - dQ \cos \delta \cos s \sin Q - d\delta \cos Q \cos s \sin \delta - ds \cos Q \cos \delta \sin s$$

dividendo per $\cos Q \sin \delta$ erit:

$$\frac{dh \cos h}{\cos Q \sin \delta} = dQ + d\delta \operatorname{ctg} Q \operatorname{ctg} \delta - dQ \operatorname{ctg} \delta \cot Q - ds \sin \delta \operatorname{ctg} \delta - d\delta \cos \delta$$

et quia δ fere est 90° minores prior aequatio; ex quo videmus errorem in
observata altitudine Q fere eundem errorem in altitudine poli producere uti
in observationibus meridionalibus. Quod quoque locum habet apud culmi-
nationes quoad errorem in declinatione; in diversis distantis autem a
Zenith, effectus huius erroris quoad altitudinem poli semper immittitur.
Quod attinet tempus, asseruimus, errorem ipsum esse minimum in autum-
secundum, et $\delta = 88^\circ 20'$. Ex hoc fluunt pro angulis horariis

0 ^h	2 ^h	4 ^h	6 ^h	errores in altitudine poli
0".0	0".2	0".4	0".5	

Sed et hi parvi errores fere totum eliminari possunt, si facimus etiam
similem observationem in altera parte Meridiani, in fere ab eo eodem
distantia, ubi hi errores acquiescent diversa signa. Haec methodus ad-
huc habet hanc utilitatem, ut eius applicatio non nisi observatio-
minationis dependeat a determinato temporis momento, et ut haec
methodus qualibet hora noctis, et si hi haec est fortior, quoque die applicari
possit. Etiam astronomis proficiendis erit maxime utilis, quum
haec methodus multo accuratior est, quam illa altitudinum circummeridionalium.
Breviter hic adhuc indicabo, quomodo in hac casu proceditur cum iis ipsis
multiplicatoribus.

Sit $p = 90 - \delta$, $\psi = 90 - Q$, & medium arithmeticum latius descripti arcus
et t , angulus horarius, qui pertinet ad medium observationum, et breviter
causa $t = \frac{1}{2} \delta$, $m = \frac{\sin p \sin \psi}{\sin \alpha}$, $n = \frac{\sin p \sin \psi}{\sin \alpha} \cdot \cos t = m \operatorname{ctg} t$

ubi t pro orientalibus angulis horario negative est. — Si posuerimus
assumere variationem distantiarum a t tantum tempore esse proportiona-
lem, assumptio, quae semper fere locum habebit, si observationes non admodum
dum extenduntur, dein resolutio huius problematis reducerebatur ad deter-
minationem valoris quantitatis ψ ex aequatione

$$\cos z = \cos \psi \cos p + \sin \psi \sin p \cos t$$

quod pluribus modis fieri potest. Quum autem prior suppositio fieri non
potest, assumamus no z , sed $z - dz$ esse illam distantiam a t tantum, quae
correspondet angulo horario t medii temporum. Haec quantitas dz quoque
tot modis diversis inveniri potest, quot modis fieri possunt reductiones
ad Meridianum. —

Si applicemus nostram emendatam methodum, erit

$$dz = m.2 \sin \frac{z}{2} + A.2 \sin^2 \frac{z}{2} - B.2 \sin^3 \frac{z}{2} + C.2 \sin^4 \frac{z}{2} \dots$$

ubi D est differentia temporis observationis medii omnium temporum
observationum, et

$$A = n - m \cos z$$

$$B = \frac{m^2}{2} + 2mn \cos z - \frac{2}{3}m^3 - 2m^2 \cos^2 z$$

$$C = 2m^2n - (n^2 - m^2 + 3m^2) \cos z + 6m^2n \cos^2 z - 5m^2 \cos^3 z$$

Reductio horum terminorum ex qualibet observatione esset motus in
applicatione admodum motus, sequentes considerationes abbreviant
hanc methodum. —

Sint d, d', d'' istae differentiae temporum a t , et d, d', d'' post meridiem
omnium temporum observationum, dein primum membrum quantitatis
 dz est aequale

$$\frac{2m}{N} (\sin \frac{d}{2} + \sin \frac{d'}{2} + \dots - \sin \frac{d}{2} - \sin \frac{d'}{2} - \dots)$$

ubi N est numerus observationum. Quum autem, si totum tempus
observationum non est longum, cuius extensio dependet ab observatore,
quantitates $\frac{d}{2}, \frac{d'}{2}$ erunt admodum parvae, in primis expropiis
pro sinibus, arcus ipsi parvi profuerunt, quum et communis factor m
est admodum parvus quoque in maximis digressionibus a Meridiano. —
Nos igitur habebimus pro primo membro

$$\frac{m}{N} (d + d' + d'' + \dots - d - d' - d'' - \dots)$$

terminum, qui est aequalis zero, quia pars positiva et negativa sunt
aequal

aequales. Similis consideratio valet etiam pro tertio membro quantitatibus
 dz , cuius coefficientis, praecipue si angulus horarius non est magnus, adhuc
 minor erit. Quod tandem attinet quartum membrum, in omnibus casi-
 bus est tam parvum, ut semper sine errore penitus negligi possit.
 Remanet hinc tantum secundum membrum, et omnia se reducunt
 ad sequentes simplices expressiones:

Querantur dz et x ex sequentibus aequationibus

$$dz = (n - m \cos 2) \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum \frac{2 \sin^2 \frac{2}{2}}{\sin^m \frac{2}{2}}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{hyp } \cos t}{\text{hyp } \sin t}$$

Item invenitur vera altitudo aequatoris ψ ex aequatione

$$\cos(\psi - x) = \frac{\cos x \cos(x - dz)}{\cos p}$$

Σ indicat summam omnium $\frac{2 \sin^2 \frac{2}{2}}{\sin^m \frac{2}{2}}$ quae quantitates ipsae ex ta-
 bulis sumi possunt, de quibus jam fuit sermo. —

Nunc transibimus ad has methodos, per quas simul tempus et
 altitudo poli determinari possit. Praecipue harum methodorum ad
 sequentia duo problemata reduci possunt:

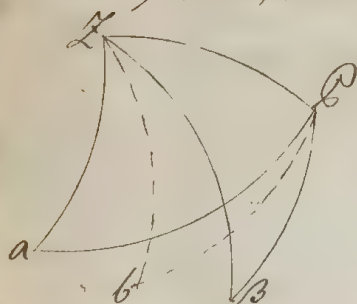
1. Ex observata altitudine duarum stellarum et intervallo temporis
 tempora observationum et altitudinem poli invenire. Haec pro-
 blema evadit simplicius, si haec observationes in eadem stella (Me-
 thodus a lib. POURCES;) vel si 2. haec duae observationes in duabus
 stellis, sed eodem tempore, instituantur.
2. Ex tribus stellis et intervallo temporum, altitudinem poli et adhuc
 aliud ignotum elementum v. c. errorem collimationis instrumenti, vel
 declinationem stellae etc. invenire.

Pro pluribus quam tribus stellis, vel pluribus quam tribus ob-
 servationibus in eadem stella analytice expressiones evadunt admodum
 complicatae et quoque superfluae, quamvis per duas vel tres observationes
 omnia huc pertinentia problemata resolvi possint. —

Ex duabus altitudinibus duarum stellarum et intervallo temporis
 invenire tempus et altitudinem poli. —

Finis

Sint α & α' apparentes ~~altitudines~~ ascensiones rectae, δ , δ' declinationes,
 h , h' observatae per refractionem et correctae altitudines ambarum stel-
 larum, et t intervallum temporis in arcu; sit Z Zenith, P polus



aequatoris, α et β loca ambarum stellarum. Imaginemur
 nobis, stellam secundam, quum prima observatur in α ,
 esse in β ; in intervallo temporis secundum fidem transibit
 ex β ad β' , distantiam est

$$\beta\beta' = t \text{ et } \beta\beta' = \alpha' - \alpha$$

$$\text{uti } \beta\beta' = t + \alpha' - \alpha, \beta\alpha = 90 - \delta, \beta'\alpha = 90 - \delta'$$

et hinc invenitur ex triangulo $\alpha\beta\beta'$ tertium latus $\beta\alpha = x$ et angulus
 adiacens $\beta\beta'\alpha = y$. In triangulo $\beta\beta'\alpha + x$ nota sunt omnia tria
 latera $\beta\alpha = x$, $\alpha\beta = 90 - h$, $\beta'\beta = 90 - h'$, hinc invenitur angulus $\beta\beta'\alpha = z$
 et hinc quoque angulus $\beta\beta'\alpha = y - z$

In triangulo $\beta\beta'\alpha$ tandem nota sunt:

$$\beta\beta'\alpha = y - z, \beta\beta' = 90 - h', \beta\alpha = 90 - \delta'$$

hinc invenitur angulus $\beta\beta'\alpha$ tempus observationis et $\beta\alpha$ seu altitudo
 de poli.

Hae est methodus synthetica; datur quoque methodus analytica, quam
 nullus hic transibimus.

Quum autem altitudo poli in fere omnibus casibus quam appropi-
 native nota supponi potest, hoc supposito, dabimus hic indirectam
 solutionem hujus problematis, quae pro praxi multo commodior est.

Sit $p = 90 - \delta$ distantia a polo, $\alpha = 90 - h$ distantia a Zenith, correctae
 per errorem collimationis, refractionem etc., y ; w angulus horarius
 et azimuthum (ambo negativum in parte orientali Meridiani); pro alia
 stella sint his quantitates p' , α' , y' , w' . Tandem sint γ & γ' rectae ascen-
 siones Zenithi tempore ambarum observationum.

Nominemus $y'' = y - \delta$, dicitur

$$y - \alpha = y, y' - \alpha' = y' \text{ hinc } y' - y \text{ seu } \delta = (\alpha' - \alpha) - (y' - y) \text{ hinc } \delta \text{ notum}$$

Sit nunc fere nota altitudo aequatoris x , dicitur:

$$\cos \frac{1}{2} y = \frac{\sin p + x + \alpha \sin p + x - \alpha}{2 \sin p \sin x}$$

$$\cos \frac{1}{2} y' = \frac{\sin p' + x + \alpha' \sin p' + x - \alpha'}{2 \sin p' \sin x}$$

in nunc

minimus et consideratione $\cos s = \sin h$ ----- et $\cos^2 s = \frac{1 + \cos y}{2}$ 61

et $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{y+x}{2} \sin \frac{y-x}{2}$

si x bene est electum, est

$$y = x + y = x + y + \Delta \text{ est } y' = x' + y' = x' + y - \Delta$$

Si autem x erronee est assumptum, quoque expressiones pro y, y' erunt erroneae. Sit igitur de ignotis error quantitas x , dein habemus

$$dy = dx \frac{dy}{dx} = A dx$$

$$dy' = dx \frac{dy'}{dx} = A' dx$$

et ascensio recta Zenithi erit

$$y = x + y + A dx = x + y + \Delta + A dx$$

$$y' = x' + y' + A' dx = x' + y - \Delta + A' dx$$

ex quo sequitur $dx = \frac{y' - y + \Delta}{A - A'}$

Ex hoc igitur fluit sequens solutio:

Querantur primo y et y' ex prioribus aequationibus, dein tantum modo in minutis primis valores quantitates w et w' per sequentes expressiones $\sin w = \frac{\sin p \sin y}{\sin \alpha}$, $\sin w' = \frac{\sin p' \sin y'}{\sin \alpha'}$

Dein est $A = \frac{dy}{dx}$, $A' = \frac{dy'}{dx}$

et $dx = \frac{y' - y + \Delta}{A - A'}$

Hinc vera altitudo aequatoris $x + dx$ et vera ascensio recta Zenithi.

$$y \pm x + y + A dx = x + y + \Delta + A dx$$

$$y' = x' + y' + A' dx = x' + y - \Delta + A' dx$$

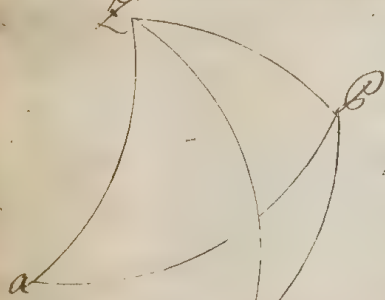
Si mutetur dein y, y' in tempus siderale, dabunt immediate vera tempora sideralia observationum, hinc et tempus verum et medium h. e. correctionem horologii. (Vid. Berl. Jahrbuch 1877 p. 136.)

Si vellemus supponere, ambas altitudines esse observatas in eodem momento, pro practica utilitate non erit magna, quia duo observatores, duo instrumenta et simul accuratissima harmonia observationum necessaria sunt, et hodie solutio non multum simplior evadit.

Supponere quoque possumus, ambas observationes altitudines esse

observatas in una eademq^{ue} stella, solutio erit quidam simplicior, per
 hanc in omnibus casibus intervallum temporis notabile in his observa-
 tionibus assumi debet, vel convic^t si esse debemus, de statu regulari^{bus} me-
 tu horologii per plures horas.

Ex duabus altitudinibus aliquis stelle et intervallo temporis observa-
 tionum invenire tempus et altitudinem poli. —



Stella sit observata in punctis a et b . Quorundem ite-
 ram in triangulo Bba , ubi $Ba = Bb$ latus ab et an-
 gulus Bba , Deinde in triangulo Bba omnia latus sunt
 nota, ergo quoque angulus Bba et hinc etiam

$$\angle BbB = Bba - Bba.$$

In triangulo BbB nota sunt $\angle BbB$, Bb , Bb , ergo in ve-
 niunt possunt $\angle BbB$ seu tempus et $\angle BbB$ seu altitudo poli.

Nunc transeamus ad indicandam solutionem huius problematis.

Sint iterum h , h' altitudines, t , t' anguli horarii, ϕ apparentis
 declinatio, et Q assumpta altitudo poli. Deinde est

$$\sin \frac{t+t'}{2} \sin \frac{t-t'}{2} = \frac{\cos \frac{h+h'}{2} \sin \frac{h-h'}{2}}{\cos \phi \cos \phi'}$$

Si haec altitudines sunt in diversis partibus Meridiani, $\frac{t+t'}{2}$ si
 autem in eadem parte, $\frac{t-t'}{2}$ est notum, et hinc in ambobus casibus
 aequationis, quantitas t' et t potest inveniri. Et quoque
 clarum est, errorem in assumpta altitudine poli in determinatio-
 nem temporis parvum habere influxum, si una altitudo in
 vicina Meridiani, altera quam maxime remota observatur. Inven-
 tis hac ratione t' et t , vera altitudo poli Q' invenitur ex

$$\cos(Q'-N) = \sin h + 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos \phi \cos \phi'$$

$$= \sin h + 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos \phi \cos \phi'$$

$$\text{vel ex } \cos(Q'+N) = 2 \cos^2 \frac{t}{2} \cos \phi \cos \phi' - \sin h'$$

$$= 2 \cos^2 \frac{t}{2} \cos \phi \cos \phi' - \sin h'$$

quae ultimae aequationes ad calculum commodiores reddi possunt, ni-
 mirum sit $\sin h = \tan A$

$$2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos \phi \cos \phi' = \tan B, \text{ hinc}$$

$$\cos(Q'-N) = \tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$$

vel

vel $\sin h = \sin A', 2 \cos^2 \frac{1}{2} t \cos Q \cos \omega = \sin B'$
 $\cos(Q + t) = \frac{\sin(B' - A')}{\cos B' \cos A'}$

Hanc methodus propofita est a celeb. Douwes. (Vid. Bohnenberger Ortsbestimmung p. 283. Berl. Jahrb. 1798 correspond. astron. B. Lach 1826 März.)

Aequatio differentialis $dQ = -\frac{dt}{\cos \omega} - d \cos Q \sin \omega + d \frac{\cos \pi}{\cos \omega}$ jam prius adducta, dat, si h et h' assumantur quae constantes, h. e. quae nullis erroribus affecta, pro prima observatione

$$dt = -\frac{dQ}{\cos Q \sin \omega}$$

et pro secunda $dQ' = -dt' \cos Q' \sin \omega'$

Si hinc pro uniformi motu horologii ambo valores quantitate dt et dt' sibi aequales ponentes, est

$$\frac{dQ'}{dQ} = \frac{\sin \omega'}{\sin \omega}$$

et si ponatur $\sin \omega = \sin \omega'$ seu si ambae observationes sunt factae in aequalibus distantibus a Meridiano, quoque est $dQ' = dQ$ ergo sum per obtinetur eadem altitudo poli hypothetica $Q' = Q$.

Si autem $\sin \omega' < \sin \omega$, tunc $dQ' < dQ$, et si $\sin \omega' > \sin \omega$ tunc $dQ' > dQ$, vel quolibet nostra hypothesis, semper magis et magis a veritate discedit.

Ex tribus observationibus trium stjellarum invenire Q , t et adhuc aliud elementum.

Sint $\alpha, \alpha', \alpha''$ apparentes ascensiones rectae, $\delta, \delta', \delta''$ declinationes harum stjellarum, quae in eadem altitudine in temporibus T, T', T'' observatae sunt. Si pendulum regulatum est secundum tempus stjellare, et si K est acceleratio, tunc sunt:

$$\delta = -K + \delta - \alpha, \quad \delta' = -K + \delta' - \alpha', \quad \delta'' = -K + \delta'' - \alpha''$$

anguli horarii ^{Hellmann} acies mutati, hinc est, si ponatur $\delta - \alpha = p, \delta' - \alpha' = p'$

$$\delta - \alpha = p \quad \sin h = \sin Q \sin \delta + \cos Q \cos \delta \cos(p - K)$$

$$\sin h' = \sin Q \sin \delta' + \cos Q \cos \delta' \cos(p' - K)$$

$$\sin h'' = \sin Q \sin \delta'' + \cos Q \cos \delta'' \cos(p'' - K)$$

Si prima harum aequationum a secunda subtrahatur erit:

$$\lg Q = \cos \frac{p'+p''}{2} \lg \frac{c''}{2} \cos \left(\frac{p'+p''}{2} - K \right) + \sin \frac{p'+p''}{2} \lg \frac{c''}{2} \sin \left(\frac{p'+p''}{2} - K \right)$$

sit nunc $A \sin B = \sin \frac{p'+p''}{2} \lg \frac{c''}{2}$

$$A \cos B = \cos \frac{p'+p''}{2} \lg \frac{c''}{2}$$

$$C = \frac{p'+p''}{2} - B$$

dem est ultima aequatio

$$\lg Q = A \cos(C-K) \quad (1)$$

Eodem modo obtinebimus

$$A' \sin B' = \sin \frac{p''+p'''}{2} \lg \frac{c'''}{2}$$

$$A' \cos B' = \cos \frac{p''+p'''}{2} \lg \frac{c'''}{2}$$

$$C' = \frac{p''+p'''}{2} - B'$$

$$\lg Q = A' \cos(C'-K) \quad (2)$$

Ambo valores quantitates Q dant

$$0 = A \cos(C-K) - A' \cos(C'-K) \text{ vel}$$

$$0 = (A' - A) \cos(C-K) + (A' + A) \cos(C'-K)$$

$$0 = (A' - A) \{ \cos(C-K) + \cos(C'-K) \} - (A' + A) \{ \cos(C-K) - \cos(C'-K) \}$$

vel tandem $0 = (A' - A) \cos \left(\frac{C+C'}{2} - K \right) \cos \frac{C-C'}{2} - (A' + A) \sin \left(\frac{C+C'}{2} - K \right) \sin \frac{C-C'}{2}$

ponatur igitur $\frac{A'-A}{A'+A} = \lg x$ sin est $\frac{A'-A}{A'+A} = \lg(115^\circ - X)$ et

$$\lg y = \lg(115^\circ - X) \lg \frac{C-C'}{2} \text{ sin est}$$

$$K = \frac{1}{2}(C+C') - Y \quad (3)$$

Aequatio prima vel secunda (1) dat altitudinem poli, et (2) accelerationem penduli.

Cum Q et K ex una primarum trium aequationum possumus calculare altitudinem veram h , et dem est $h + \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2}$ apprensus altitudo calculi, quae cum illa, per errorem collimationis correcta altitudine observata, comparata, dabit errorum subdivisionis instrumenti.

In electione stellarum, praecipue videre debemus, ut earum azimutha sint admodum diversa, vel ut earum circuli verticalis in thei the non faciant admodum parvos angulos.

(M. Monat. Correspond. Berl. 1808 et Janus 1809, Maylanden Ephemeriden 1810. Berl. u. Jahrbuch 1790. 1803.)

Si azimuthum w , et n refractione liberata altitudinem H fuerit *Theodolit*
 ta sunt, ejus declinatio est c , facile ex hoc altitudinem poli derivari potest
 ex aequatione $\sin \delta = \sin H \sin \varphi - \cos H \cos \varphi \cos w$

Si observamus in vicinia Meridiani, dein per eandem aequationem alti-
 tudinem meridianam $H+x$ et observata altitudinem H derivare possumus,
 si istam aequationem differenciamus respectu H et w , et duo valores
 quantitatium $(\frac{dH}{dw})$, $(\frac{d^2H}{dw^2})$, etc. posito in his expressionibus $w=0$, in expres-
 sione $H+x = H + (\frac{dH}{dw})dw + (\frac{d^2H}{dw^2})\frac{dw^2}{1.2} + (\frac{d^3H}{dw^3})\frac{dw^3}{1.2.3} + \dots$
 substituamus.

Sed primi tres termini jam sufficient, et nos habebimus, si post differen-
 tiationem $w=0$ ponimus

$$(\frac{dH}{dw})=0, \quad \frac{d^2H}{dw^2} = \frac{\cos \varphi \sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$$

Assumamus igitur, azimuthum in prima observatione esse Ω et jam
 a refractione correcta altitudinem H , pro secunda observatione $\Omega + \alpha$
 et $H+h$ etc, tandem azimuthum instrumenti, si tubus est in Meridiano,
 aequale $\Omega + \alpha$ et meridianam altitudinem $H+x$ habere

Ω	H
$\Omega + \alpha$	$H+h$
$\Omega + \alpha'$	$H+h'$
$\Omega + \alpha''$	$H+x$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hinc est ex prima observatione } x = A\alpha' \\ \text{secunda } x - h = A(x - \alpha)' \\ \text{tertia } x - h' = A(x - \alpha')' \end{array} \right\} \quad (I)$$

ubi $A = 30 \frac{\cos \varphi \sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} \sin 1''$. Hic terminus valet invariatus pro
 culminationibus in parte australi hemisphaerii. In parte boreali est pro
 superioribus culminationibus $A = 30 \frac{\cos \varphi \sin(\delta - \varphi)}{\cos \delta} \sin 1''$. pro infer-
 ioribus culminationibus $A = -30 \frac{\cos \varphi \sin(\delta + \varphi)}{\cos \delta} \sin 1''$

Per aequationes (I) igitur quantitas x , vel meridianae altitudinis $H+x$
 et hinc quoque altitudo vera poli φ sine adiumento horologii, tam tempore
 differentias hororum azimuthorum quam maxime accurate inveniri
 potest.

Sed haec methodus supponit cognitionem situs Meridiani, et hinc videtur

non

non apta esse potissimum pro proficiiscentibus Astro nomis, qui volunt
de denominationibus altitudinum potius facere.

Impedimentum hinc, quod applicationi huius methodi oppositum est, con-
sistit in eo, ut in aequationibus (I) non solum quantitas x , sed et a
(a quo situs meridiani dependet:) in cognitis sunt. —

Sed haec ipsae aequationes supponunt medium commodum, eliminan-
di quantitatem a . Si hoc facimus cum primis duabus aequationibus,
et ponamus quantitatem notam Aa' aequalam K , obtinebimus

$$x = \frac{(h+k)^2}{4K} \quad \text{--- (II)}$$

et per hanc expressionem quantitas x , et sine quoque altitudo poli.

$Q = A + x$ — Methodus hac admodum simplicis, sine cognitione situs
Meridiani vel temporis meridiei determinari potest, et quidem accu-
rate, si observationes non in magna distantia a Meridiano institue-
re sunt. Atae vicina Meridiano etiam sunt, si eius situs plane igno-
tus est, ex immediatis observationibus, scilicet ex ipsis pedibus di-
tius crescentibus altitudinibus fideris, in omnibus casibus se
manifestat? —

Simplificari quoque potest praecedens methodus, scilicet eliminando
in aequationibus (I) non tantum quantitatem a sed et A ; habebimus
enim

$$x = \frac{(Ma' - Ma)^2}{4aa'(a - a')(M - M')} \quad \text{--- (III)}$$

ubi brevitas causa $M = ah'$ et $M' = a'h$ positum est, et hoc expressio
nihil aliud supponit, quam tria latus arcuum et tres observatas
altitudines. — Ad calculum haec methodus simplicissima eva-
dit, si duae harum altitudinum assumuntur ejusdem magnitudinis,
quod fere semper est in potestate observationis. — Si priores duae
sunt aequales, erit $M = 0$, hinc

$$x = \frac{a'h'}{4a'(a - a')}$$

Si prima et ultima aequalis sunt, erit $h' = 0$, ergo

$$x = \frac{a'h}{4a(a - a')}$$

Si secunda et tertia aequalis sunt, est

$$x = \frac{(a+a')^2 h}{4aa'}$$

(Vid. Analen des Wiener Sternwarte.)
H. Thut. von Litho

Alia adhuc et ultima methodus determinationis altitudinis poli, quam
hic adducam. —

Si h est observata altitudo stellae polaris et per refractionem correcta,
et angulus horarius, p apparentis distantia a polo, Q altitudo poli, de,
in est, posito $x = h - Q$

$$\sin h = \cos p \sin(h-x) + \sin p \cos(h-x) \cos t$$

Ex hac aequatione pluribus modis valor quantitatis x per p , h et t
inveniri potest. Si quatuor et aliores polares quantitatis p omit-
tantur, quod fere in omnibus casibus licet, de in est, si ponatur

$$A = \frac{1}{2} p^2 \sin^2 t \sin 1'' \quad B = \frac{2}{3} p^3 \cos t \sin 1''$$

$x = p \cos t - A \sin h + B$, et quae sita altitudo poli

$$Q = h - p \cos t + A \sin h - B$$

et haec est aequatio calculanda. Parva tabula constructi potest,
quae pro quolibet valore anguli horarii t det quantitatem

$$M = \frac{1}{2} p^2 \sin^2 t \sin 1'' - \frac{2}{3} p^3 \sin^2 t \cos t \sin 1''$$

Si adiacere debet vellemus, uti facit celeb. Schumacher, aliquam par-
vam summam tabulam pro quantitate $N = p \cos t$, habebimus sine
omni altero calculo

$$Q = h + M - N$$

Si vellemus autem construere tabulam generalem pro omnibus
altitudinibus poli, pro itineribus aut terra aut mari, haec tabula
consistat ex duabus partibus, et dabit cum argumento t quantitates
 A et B , ex quo tandem habebimus

$$Q = h - p \cos t + A \sin h - B$$

Tabula haec occurrit in *Berlin's Jahrbuch* pro 1828.

Haec methodus ubi et procedens est a celeb. Littrow.

Determinatio Longitudinis Geographica ex observationibus

Quum Sol in 24 horis temporis veri (Stella fixa in 24 horis temporis sideralis) ab ortu occasum versus per omnes Meridianos terre transeat, et quum in quolibet loco est meridies seu 0^h, si Sol per Meridianum huius loci transeat, locus aliquis una, duabus aut tribus horis prius habebit meridiem, quam alius, si 15°, 30°, 45° magis versus orientem situs est, et hec differentia apud omnia cetera tempora dici in his duobus locis habebit locum.

Differentia longitudinis geographica duorum locorum, h. e. angulus eorum Meridianorum, erit igitur differentia verorum meridianorum vel sideralium temporum proportionalis, quae in his duobus locis eodem momento numerantur. Haec tempora autem in quolibet loco inveniuntur per methodos priores, tantummodo determinari debet, quae se tempus finit in ambobus locis sit. Hoc vero invenitur, si in ambobus locis idem phenomenon observatur, quod pro ambobus locis eodem momento locum habet, uti eclipses lunae, immersiones et immersiones satellitum Jovis in ambra sui planetae primarii; si qua per pulverem data etc. vel 2^o si in ambobus locis phenomenon aliquod observatur, quod quidem non revera eodem momento locum habet, ex quo autem talis synochrona apparitio, per calculum deduci potest, uti eclipses Solis, occultationes fixarum per lunam, transitus lunae per Meridianum, distantiae lunae a novis stellis fixis etc; vel etiam, si horologium, cuius motus accuratè notus est, in uno horum locorum secundum tempus huius loci regulatus, et dein, sine turbatione motus ipsius, transferatur ad alium locum, et ibi cum tempore huius loci comparatur. —

Nunc tantummodo loquemur de istis phenomenonis synochronis; ceteras methodos habebimus cum sermo erit de eclipsibus. —

Si tale phenomenon habet locum in uno loco. & prout
tempore. Si altero loco. tempore. Si, supposito, ambo horologia habent
motum uniformem. Si haec tempora ambo eorum locorum essent vera
aut media, sideralia, siue esset differentia longitudinum

$$15(t - T) - (t' - T')$$

et secundus locus jact magis orientem versus si T' majus est T .
Si autem non sunt haec tempora sideralia, haec tempora per methodos
ductas ac haec tempora sideralia reduci possunt. -
Hanc correctionem horologiorum autem, seu hanc mutationem tempo-
rum evitare possumus, si in ambobus locis observatus culminatio
quarundam fixarum. Si nimirum est tempus culminationis fixae in uno
loco, et t' in altero, diu effluerant a momento hujus loci locorum fixarum,
nomen, usque ad culminationem fixae in uno loco $t - T$, et in altero
 $t' - T'$ horis; hinc fixa prius transibat per meridianum primi loci horis
 $(t - T) - (t' - T')$, et si $t - T$ majus est quam $t' - T'$, secundus locus jact
in parte orientali primi. Si effluunt diu ab una culminatione
hujus fixae usque ad sequentem in ambobus locis 24 horis, erit diffe-
rentia longitudinis ambo eorum locorum

$$360 \left((t - T) - (t' - T') \right)$$

Si autem ab una culminatione veri aut medi solis usque ad sequentem
effluerant 24 horis, diu horis in hac tempore quoque respectu solis veri
aut medi, sicut circa axem sese rotavit, et hinc etiam erit differen-
tia longitudinum.

$$15 \left((t - T) - (t' - T') \right)$$

Principia phenomena, ad hunc finem spectantia, sunt eclipses
lunae. Quum nimirum Luna, quando intrat in umbram terre, pri-
mo suo lumine pro omnibus locis, quibus est visibilis, eadem mo-
mento, differentia veri, medi aut sideralis temporis horum pheno-
menorum pro duobus locis statim dabit differentiam longitudinis
ambo eorum locorum.

Quum autem umbra non bene terminata est, momentis inmer-
sionis et emersionis lunae in umbram, non cum magna praecisione obser-
vari

observari possunt, hinc quoque ex tali observato phenomeno conclusa
 differentia longitudinum sepe magis est obnoxia erroribus. Magis
 accurate sunt observationes immersionum et emersionum manularum
 diversarum lunae. Etiam perfectio tuborum amborum observatorum
 ipsius atmosphaerae etc. suum habent influentia in resultata.
 Ut coniecti finis de incertitudine harum observationum, adferam hic
 resultata ex observata eclipsi lunae Gothae et Parisiis 22^{to} Oct. 1790.
 Haec observatio dat pro differentia longitudinum amborum locorum

0 ^h	34'	11"
	33	23
	33	56
	33	32
	33	39
	33	13
	33	46
	33	35

ergo magnas differentias singularium
 observationum.

Accuratiores sunt observationes immersionum et emersionum, scilicet,
 solium Jovis, sed et his non dant hanc harmoniam, quam cupimus
 in his disquisitionibus. Ut autem ex his observationibus prodeat dif-
 ferentia longitudinum cum praecisione possibili, attendere debemus
 ad sequentia. In ambobus locis, ac placentibus, si fieri possit, sub per-
 ipsam fortitudinis, et comparetur in ambobus locis aequalis nume-
 rus immersionum et emersionum, et excluduntur omnes obser-
 vationes quae admodum vicinae sunt oppositioni Jovis cum Sole.

Cum autem praecedenti tanto chrona phenomenum non cum magna
 praecisione observari possint, alia similia phenomenum in terra, quae non
 sunt obnoxia his erroribus adhibentur, ut si sunt signa per pulverem
 (data) etc. Quae autem tres unices pulveris communis dant momentaneam
 flammam, quae cum habet, quae r.e. vigetis augent, et de die in dispen-
 sia quinque aut sex miliarium germanicorum: videri possunt. Si ista signa
 noctis tempore inspicuntur, subis de die debet dirigi in locum dices
 minationum. Secundum experimenta celeb. Hach signa noctis tempore
 per 4 aut 8 unices pulveris, in distantia triginta miliarium videri

possunt

possunt, si locus alio instituantur, est debite altus. — Res princi-
pales in his observationibus est accurata determinatio flatus et motus
horologii, quæ obtineat per altitudines correspondentes vel alio modo.
Quum celeritas huius pro observationibus huius generis quæ infinitè
magna assumi possit, hæc phenomena quæ tauchrona assumi
possunt. (Vide quoque Annalen der Wiener Sternwarte.)

Perfectio quæ cum horologiis portatilibus, Chronometris, conficiuntur,
uolens quoque supradictum medium, tempus aliquis loci per hæc horologia
immediate comparandi cum tempore alterius loci; et hæc ratione de-
terminandi differentiam longitudinum amborum locorum. — Per

exemplum possimur enucleare possumus hanc methodum. —

Anno 1786 29. Maji invenit B. Halk in specula comitis Brühl Lon-
dini, suum Chronometrum in meridie huius diei 2.^h 1 minus dare tempore
medio huius loci, et ex pluribus aliis diebus invenit, chronometrum
quotidie retardare 6.^h 17.15 respectu temporis medi. — 24. Junii hinc post
29. diebus, venit in suam speculam Seeberg. Tempus medium in me-
ridie vero Londini pro 24. Junii est (ex observationibus) ob 2.^h 34.^m 3.
Si ab hoc tempore subtrahatur prima retardatio 29. Maji vel
2.^h 1, et retardatio in 29. diebus vel 29(6.17.15) = 4.^h 9.^m 4.^s abtinetur
tempus Chronometri 24. Junii in meridie vero Londini.

$$t = 6.^h 2.^m 24.^s 93$$

Id eodem die ille observavit Seebergi altitudines correspondentes
Solis, et ex his invenit tempus Chronometri 24. Junii in meridie
vero Seebergi $t' = 11.^h 19.^m 3.^s 40$

Hinc est differentia longitudinum amborum locorum

$$t - t' = ob 43.^m 23.^s 83 \text{ (Seeberg magis orientem versus)}$$

(Vide Berl. Jahrbuch 1806 p. 210.)

Si in duobus locis, qui non jacent sub eodem Meridiano, observatur
differentia culminationis huius et aliujus fixe, hæc differentie
non erant æquales, quia ascensio Luns admodum celeriter, sæpe
usq. ad 15 gradus in uno die variat. Et hæc sequitur, ex his diffe-

et his differantia, si non la est diurna variatio speculonis recte, Luna,
etiam in res se ad differantiam longitudinum amborum locorum obser-
vationum conclusio prope.

Per is complanatus videtur hanc methodum.

Observata est Gotha temp. sidereo culminatio Luna $13^{\circ} 44' 32".45$ spica $13 \quad 14 \quad 17.84$ $33^{\circ} 14".58$	Mercurii temp. sidereo $13^{\circ} 44' 53".0$ $13 \quad 14 \quad 17.2$ $33' 35".8$ $33 \quad 14.58$ $21".22$
--	---

Sint h, H vera a refractione et parallelis liberata, altitudines eorum
Solis et lunae, h', H' eorum apparentes seu observatae altitudines, d vera
et d' apparentis seu observatae distantiae eorum eorum eorum.

Quum vero et apparentia loca eorumque sideris jaceant in eodem verticali
circulo, est, si communis differentia Azimuthi amborum siderum ω

$$\cos \omega = \sin A \sin h + \cos A \cos h \cos \omega$$

$$\cos \omega' = \sin A' \sin h' + \cos A' \cos h' \cos \omega$$

ex quo $\sin \frac{\omega}{2} = \frac{\sin \frac{A+H}{2} \sin \frac{d-d'}{2}}{\cos A' \cos h'}$

et $\cos \frac{\omega}{2} = \frac{\cos \frac{A+H}{2} \cos \frac{d+d'}{2}}{\cos A' \cos h'}$

Eodem modo dal prima procedentium aequationum.

$$\cos d = \cos (A-h) - 2 \cos A \cos h \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

$$\cos d' = 2 \cos A \cos h \cos^2 \frac{\omega}{2} - \cos (A-h)$$

$$\cos d = \cos (A-h) \cos^2 \frac{\omega}{2} - \cos (A+h) \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

(I)

Et secunda aequationum (I) sequitur

$$\cos d = \frac{2 \cos A \cos h \cos \frac{A+h}{2} \cos \frac{A+h-d}{2}}{\cos A' \cos h'} - \cos (A+h)$$

vel dicam $\sin^2 \frac{d}{2} = \cos^2 \frac{A+h}{2} + m \cos \frac{A+h+d}{2} \cos \frac{A+h-d}{2}$

$$\cos^2 \frac{d}{2} = \sin^2 \frac{A+h}{2} + m \cos \frac{A+h+d}{2} \cos \frac{A+h-d}{2}$$

(II)

ubi $m = \frac{\cos A \cos h}{\cos A' \cos h'}$ est.

Si ponatur commoditatis calculi causa

$$\sin A = \frac{1}{\cos \frac{A+h}{2}} \sqrt{m \cos \frac{A+h+d}{2} \cos \frac{A+h-d}{2}}$$

Dein sequitur ex prima aequationum (II)

$$\sin \frac{d}{2} = \cos \frac{A+h}{2} \cos A$$

et piterum est

$$\cos B = \frac{1}{\sin \frac{A+h}{2}} \sqrt{m \cos \frac{A+h+d}{2} \cos \frac{A+h-d}{2}}$$

Dein sequitur ex secunda aequationum (II)

$$\cos \frac{d}{2} = \sin \frac{A+h}{2} \cos B$$

Preterea si ponatur

$$\sin C = \frac{1}{\cos \frac{A+h}{2}} \sqrt{m \sin \frac{A+h+d}{2} \sin \frac{A+h-d}{2}}$$

A.

$$\text{et. } \log D = \frac{1}{\sin \frac{A-h}{2}} \sqrt{\sin \frac{A-h}{2} \sin \frac{A+h}{2} \sin \frac{d-h}{2} \sin \frac{d+h}{2}}$$

erit ex equationibus (I)

$$\cos \frac{d}{2} = \cos \frac{A-h}{2} \cos C \quad \text{et}$$

$$\sin \frac{d}{2} = \sin \frac{A-h}{2} \cdot \cos D$$

et plures alias expressiones.

Haec expressiones pro D sunt praecipuae quae ex praecedentibus equationibus (I) derivari possunt.

(Sed antea quoque methodi, per quas via indirecta inveniri potest quantitas d , seu directa sunt ac breviores. —

(Vid. Berol. Ephemer. pro 1788 Monatliche Correption. 1806 Januar. Correption. Astron. Vol. 12 p. 458 nouvelle methode par M. Guispartet p. 296. Horner et p. 242. — Schubert p. 139.)

Adde hic novissimam methodum celeb. Schubert reducendi distan-

tias along. (Correption. Astron. Vol. 12 p. 139.)

Est D distantia apparentis amborum centrorum S apparentis altitudo

$$\Delta D = \left(\frac{d^2 D}{d^2 d}\right) \Delta d + \left(\frac{d^2 D}{d^2 S}\right) \Delta S + \left(\frac{d^2 D}{d^2 L}\right) \frac{\Delta L^2}{1, 2} + \left(\frac{d^2 D}{d^2 S}\right) \frac{\Delta S^2}{1, 2, 2} + \left(\frac{d^2 D}{d^2 d S}\right) \Delta d \Delta S + \left(\frac{d^3 D}{d^3 d^2}\right) \frac{\Delta d^3}{1, 2, 3} + \text{etc.}$$

Designando per L azimuthum interceptum inter hae duo astro, erit

$$\cos L = \frac{\cos D - \sin L \sin S}{\cos d \cos S}$$

Sed quantitas L est constans, differentiale igitur erit aequale zero

hinc $0 = -dD \sin D \cos d \cos S + d d \cos L (\cos D \sin L - \sin S) + d S \cos L (\cos D \sin L - \sin S)$

ex quo obtinemus sequentia differentia partialia

$$\left(\frac{dD}{dL}\right) = \frac{\cos D \sin L - \sin S}{\sin D \cos d}; \quad \left(\frac{dD}{dS}\right) = \frac{\cos D \sin L - \sin S}{\sin D \cos S}$$

$$\left(\frac{d^2 D}{dL^2}\right) = \frac{\sin D - \sin L - \sin S + 2 \cos D \sin L \sin S}{\sin^2 D \cos^2 d}$$

$$\left(\frac{d^2 D}{dS^2}\right) = \frac{\sin D - \sin L - \sin S + 2 \cos D \sin L \sin S}{\sin^2 D \cos^2 S}$$

$$\left(\frac{d^2 D}{d d d S}\right) = \frac{\sin L + \sin L - \sin D - 2 \cos D \sin L \sin S}{\sin^2 D \cos d \cos S}$$

Tres aequationes ultimas erunt simpliciores, attendentes, quartam esse aequalem tertiae ductae in $\frac{\cos L}{\cos D \cos S}$ et quintam esse aequalem — tertiae ductae in $\frac{\cos L}{\cos D \cos S}$. Praeterea per transformationes cognitas formularum trigonometricarum habemus

$$\sin D - \sin L - \sin S = \frac{1}{2} \cos 2d - \frac{1}{2} \cos 2s - \cos D = \cos(L+S) \cos(L-S) - \cos D$$

et $2 \cos D \sin L \sin S = \cos D (\cos(L-S) - \cos(L+S))$ hinc numerator tertiae aequationis

$$\text{erit} = \{ \cos(L+S) + \cos D \} \{ \cos(L-S) - \cos D \}$$

$$= 4 \cos \frac{D+L+S}{2} \cos \frac{D-L-S}{2} \sin \frac{D+L-S}{2} \sin \frac{D-L+S}{2}$$

Brevitatis causa ponendo

$$\frac{D+L+S}{2} = a, \quad \frac{D-L-S}{2} = b, \quad \frac{D+L-S}{2} = c, \quad \frac{D-L+S}{2} = d \quad \text{et} \quad \cos a \cos b \sin c \sin d = M$$

prior numerator erit $= 4M$ et tota aequatio tertia dabit

$$\left(\frac{d^2 D}{dL^2} \right) = \frac{4M \cos D}{\sin^3 D \cos L}$$

formulae admodum commoda pro usu logarithmico. — Per hanc formulam obtinebimus valores quantitatatum $\left(\frac{d^2 D}{dL^2} \right)$ et $\left(\frac{d^2 D}{dS^2} \right)$ dum hunc modo

multiplicando priora aequationem respectare per $\frac{\cos L}{\cos S}$ et $-\frac{\cos L}{\cos D \cos S}$.

Designentur nunc per L & S refractiones correspondentes altitudinibus L & S jam cum suis correctionibus, per p parallaxis lunae pro altitudine L & b et quidem relate ad altitudinem soli; observetur deinde quoque nos refractionum S debere immiscere parallaxi alterius astri altitudinis S , si hoc astrum est sol, vel aliquis planeta; ut jam parallaxis non amplius est insequibilis. His positis habebimus

$$\Delta L = p - l, \quad \Delta S = -s$$

Maximus valor, quem $p - l$ acquirere potest, est $56''$ quod dat pro maximo quantitatatis $(p - l)^2$ & $5.5''$ et pro $\frac{\Delta L^3}{6} = 0.1$. Sequentes termini sunt adhuc multo minores, hinc possumus in omnibus casibus negligere omnes tertii ordinis, vel tertias potentias refractionis et parallaxis. — Jate parvus arcus ΔD sin S , qui addi debet ad d , stantiam observatam D , erit igitur

$$D = \frac{(p-l) \cos D}{\cos L} \left\{ \sin L - \frac{\sin S}{\cos D} + \frac{2M \sin(p-l)}{\sin^2 D \cos L} \right\} + \frac{s \cos D}{\cos S} \left\{ \frac{\sin L}{\cos D} - \sin D + \frac{2M \sin s}{\sin^2 D \cos S} + \frac{4M \sin(p-l)}{\sin^2 D \cos D \cos L} \right\}$$

Si D majus est quam 45° quae sepiissime locum habet, possumus negligere in usu ordinario terminos multiplicatos per M , quod dat

$$S'' = (p-1) \left(\frac{L}{D} - \frac{\sin S}{\sin D \cos L} \right) + S \left(\frac{\sin L}{\sin D \cos S} - \frac{L}{D} \right)$$

Si $D = 90^\circ$, ista aequatio erit:

$$S'' = \frac{\sin L}{\cos S} - \frac{(p-1) \sin S}{\cos L} + \frac{A M (p-1) S}{\cos L \cos S}$$

Si L vel S aequatur 90° , $p-1$ seu S deveniunt aequalis zero. Si D et L sunt 90° , Sol est in Horizonte, $S=0$, $p-1=0$, $S''=S$. Si D et S sunt 90° , prior aequatio dabit $S'' = -(p-1)$.

Hae methodus est directa, dat nimirum immediate correctionem S in functione trium arcuum datorum D , L , S . Hae methodus quoque est exacta, nam dat loco veris distantis, parvam differentiam S non per approximationem, sed per expressionem rigorosam. — Delambre quoque praeferebat inventionem quantitatis S' ; illi hanc dat per aequationem indirectam, quae tantum per approximationem resolvi potest, et illa non dat valorem quantitatis S , sed $\sin \frac{1}{2} S \sin(D + \frac{1}{2} S)$.

vid. Aph. theor. et
Pract. p. III p. 670.

Hae methodus habet quoque illam utilitatem ut illi dare possumus quae, dum praecisionis, quem volumus, quem possumus quoque ^{liberit} terminos nostrae aequationis deducere. Ex hac aequatione omnes aliam etiam methodi facili modo derivari possunt. Si vellemus adhibere nostram formulam ad constructionem tabularum, ponatur. $\frac{(p-1)L}{L D} = A$, $\frac{(p-1)\sin S}{\sin D \cos L} = B$, $\frac{\sin L}{\sin D \cos S} = C$, $\frac{S L}{L D} = E$

Hinc erit nostra aequatio

$$S'' = A - B + C - E$$

Si designentur per A' , B' , C' , E' valores quantitatum A , B , C , E si $p-1$ et S sunt aequalis $60''$ seu 1^m et per u , v valores quantitatum $p-1$ et S expressi in minutis eorum decimalibus, nos habebimus in secundis

$$A' = \frac{60 L}{L D}, B' = \frac{60 \sin S}{\sin D \cos L}, C' = \frac{60 \sin L}{\sin D \cos S}, E' = \frac{60 S L}{L D}$$

$$A = u A', B = v B', C = v C', E = v E' \text{ et hinc}$$

$$S'' = v(C' - E') - u(B' - A')$$

Constituenda igitur sunt duae tabulae, quarum quaelibet habet haec duo argumenta $D = \varphi$ et L seu $S = \psi$; angulus φ ponitur in

extrema

in extensione a 20° usque ad 90° et ψ a 11° vel 5° ad 89° . Numeri
primae tabulae erunt quoti $\frac{\sin \psi}{\sin \varphi}$, numeri secundae tabulae quoti $\frac{\sin \psi}{\sin \varphi}$
omnes multiplicati per 60. Ex prima habebimus A' assumendo ar-
gumentum L et E , assumendo S ; ex secunda habebimus $C \cos S = G$
cum argumento L et $B \cos L = H$, cum argumento S .

Quoniam autem numeri G et H se extendere possunt a $60 \sin 5^\circ = 5''$ usque
ad $\frac{60}{\sin 20^\circ} = 175''$, possumus construere tertiam tabulam pro quotibus nu-
merorum, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100.

Divisorum per cosinus omnium angularum inter 5° et 89° , ex qua
sumantur B cum argumento A et L , et C cum argumento G et S .

Atque ratione inventae sunt quantitates A' , E' , B' , C' , quarum duae ulli-
mae semper sunt positivae, A' et E' sunt negativae pro $D > 90^\circ$.

Hinc habendo $C \pm E'$ et $B \pm A'$, signum superius pro $D > 90^\circ$ inferius
pro $D < 90^\circ$, multiplicari debet $C \pm E'$ per v , $B \pm A'$ per u quod dat

$$D' = v(C \pm E') - u(B \pm A').$$

Haec methodus igitur tantummodo exigit tres tabulas. Ut vidimus,
termini secundae ordinis, qui habent factorem M , neglecti sunt; vi-
diamus nunc, ad quam magnitudinem possint ascendere hi termi-
ni, quos designabimus per D' , illos autem, qui sunt independentes
a quantitate M , per D'' . Ad hunc finem determinare debemus
relationem, quae existit inter arcus D , L et S .

Cum D sit latus aliquis trianguli, cuius duo cetera latera sunt
 $90^\circ - L$ et $90^\circ - S$, et cum in quolibet triangulo, summa duorum
laterum multo major sit tertio latere, erit:

$$D + (90^\circ - L) > (90^\circ - S) \quad \text{et} \quad (90^\circ - L) + (90^\circ - S) > D$$

Ex prima conditione sequitur, D semper esse maiorem quam $L - S$
vel $S - L$, et ex secunda, D semper esse minorem quam $180^\circ - (L + S)$;
hinc $L - S$ seu $S - L$ et $180^\circ - (L + S)$ sunt limites inter quos D semper
est contenta.

His positis, quaeramus nunc maximum valorem quantitatis M .

Ad hoc faciendum sit simplicitatis causa

$\frac{L}{2} = x$, $\frac{L+S}{2} = x$, $\frac{L-S}{2} = y$ seu $\frac{S-L}{2} = y$ Dein habebimus, substituta
do in aequatione priori, $\cos a \cos b \sin c \sin d = M$ valores

$$M = \cos(x+x) \cos(x-x) \sin(x+y) \sin(x-y) = (\cos^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \sin^2 x) (\sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y) \\ = (\cos^2 x - \sin^2 x) (\sin^2 x - \sin^2 y) = \cos^2 x \sin^2 x - \cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 x (\sin^2 x - \sin^2 y)$$

Quum nos vidimus, D semper esse majorem quam $L-S$, seu $x > y$,
 $\cos^2 x \sin^2 x$ erit maximum, seu limus, quum M non attingit, quam si x
et y sunt aequales, zero; hinc M maximum suum habebit valorem,
si L et S aequantur zero vel minimo possibili. h. e. 5° . Termini

S^m aequationis prioris, quum sint multiplicati per $\frac{1}{\sin^2 D}$ evadunt
infiniti, si $D=0$; ex quo sequitur, illos habere suum maximum
valorem, si D habet suum minimum h. e. si $D=20^\circ$.
faciend igitur $D=20^\circ$ et $L=S=5^\circ$ erit

$$L=10^\circ, x=5^\circ, y=0 \text{ et hinc}$$

$$M = \sin^2 10^\circ \cos 15^\circ \cos 5^\circ$$

et terminus maxime considerabilis quantitatis S^m

$$\frac{2M(p-1) \text{ by } 20^\circ}{\sin^2 20^\circ \cos 5^\circ} = \frac{(p-1)^2 \text{ by } 20^\circ \cos 15^\circ}{2 \cos 10^\circ \cos 5^\circ}$$

pro $L=5^\circ$, $p-1$ potest aspicere ad $52'$ quod dicit

$$S^m = \frac{1560'' \sin 52' \cos 15^\circ}{\text{by } 20^\circ \cos 10^\circ \cos 5^\circ} = 644'' 8$$

Dein adhuc addi debent ceteri termini quantitatis S^m qui sunt
multiplicati per S^2 et per $(p-1)S$. Ex hoc dividere propumus,
negligendo quadrata refractionum et parallaxium, ubi hoc fieri
potest solit in constructione tabularum, committi posse errorem, qui
major est uno minuto primo, qui error procedit in longitudi-
nem errorem dimidii gradus. --

Adhuc hic data alicujus exempli ex Delambre (I. p. 629) quod qui-
libet resolvit. --

$$D=30^\circ, L=18^\circ, S=6', p=58', l=3', S=8' 20''$$

$$L'=18^\circ 55', S'=5^\circ 51' 40'', I=12^\circ, \theta=24^\circ$$

$$b=3^\circ, c=21^\circ, d=9^\circ, L+S=e=12^\circ 23' 20''$$

Resultatum: $S=+23' 26.16$

Formula celeb. Horner deducta e consideratione refractionis,

$$\text{est: } S'' = (m-1) \left\{ \lg \frac{D}{2} - \lg \frac{L}{2} + (1 - \cos S)(\cos L - \cos D) \right\} + \frac{(S-1) \sin S}{\sin D}$$

ubi $L = L - S, L' = L - l, S' = S - s, m = \frac{\cos L' \cos S}{\cos L \cos S'}$

Hec formula facile ex nostra derivari potest, ponendo $p=0$ quia hic tantum agitur de refractione, et $M=0$, quia Horner negligit quædrata refractionum. - His positis nostra æquatio

$$S'' = (p-1) \left(\frac{\lg L}{\lg D} - \frac{\sin S}{\sin D \cos L} \right) + \left(\frac{\sin L}{\sin D \cos S} - \frac{\lg S}{\lg D} \right) \text{ dat}$$

$$S'' = \cos D \left\{ \frac{(\sin L - \cos D \sin S)}{\cos S} + \frac{1(\sin L - \cos D \sin S)}{\cos L} \right\}$$

substituendo pro $\sin L, \sin S \cos(L-S) + \cos S \sin(L-S)$

pro $\sin S, \sin L \cos(L-S) - \cos L \sin(L-S)$ erit

$$S'' = \cos D \{ (\cos S - \cos D) (\lg S + \lg L) + (S-1) \sin S \}$$

$$= \cos D \left\{ \frac{\cos S - \cos D}{\cos L \cos S} (\cos L \sin S + \sin L \cos S) + (S-1) \sin S \right\}$$

sed quia $L' = L - l, S' = S - s$ erit, negligendo quædrata refractionum

$$\cos L' = \cos L + l \sin L, \cos S' = \cos S + s \sin S \text{ tunc}$$

$$\cos L' \cos S' = \cos L \cos S + s \cos L \sin S + l \sin L \cos S,$$

quæ substituitur in ultima æquatione dabit

$$S'' = \frac{(\cos S - \cos D)(\cos L' \cos S' - \cos L \cos S) + (S-1) \sin S}{\sin D \cos L \cos S}$$

vel $S'' = \frac{(m-1)(\cos S - \cos D) + (S-1) \sin S}{\sin D}$

Per substitutionem $\lg \frac{L}{2} = \lg L - \lg 2$ et $\lg \frac{D}{2} = \lg D - \lg 2$ hæc æquatio transibit in æquationem adductam celeb. Horner, qui hanc ad hunc finem construxit & tabulas. -

Horner

Determinatio Azimuthi objectorum terrestrium.

Ex altitudine poli Q , Declinatione D et angulo horario t solis, invenire altitudinem h et Azimuthum w .

Ultimus, est $\sin h = \sin Q \sin D + \cos Q \cos D \cos t$

ex qua aequatione igitur h inveniri potest, quae aequatio autem, introducendo angulum auxiliaarem, ad calculum aptior reddi potest; nimirum, ponendo $\sin M = \cos D \cos Q$ erit

$$\frac{\sin M}{\cos M} = \frac{\cos D \cos Q}{\sin Q} \quad \text{hinc} \quad \cos t \cos Q = \frac{\sin Q \sin M}{\cos M}$$

et substituendo

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin Q \sin D + \frac{\sin Q \sin M \cos t}{\cos M} \\ &= \frac{\sin Q \sin D \cos M + \sin Q \cos t \sin M}{\cos M} \\ &= \frac{\sin Q}{\cos M} \sin(M + D) \end{aligned}$$

et Azimuthum invenitur ex nota aequatione

$$\sin w = \frac{\sin t \cos Q}{\cos h}$$

vel

$$\lg N = \frac{\lg \cos t}{\cos t}$$

$$\lg w = \frac{\cos D \lg t}{\sin(Q - N)}$$

$$\cos h = \frac{\cos D \sin t}{\sin w}$$

ab initio habuimus

$$\lg w = \frac{\sin t}{\sin Q \cos t - \lg D \cos Q}$$

dividendo per $\cos t$ erit

$$\lg w = \frac{\lg t}{\sin Q - \frac{\lg D \cos Q}{\cos t}} \quad \text{et pro } \frac{\lg D \cos Q}{\cos t}$$

substituendo valorem $\lg N$ fuit aequatio in contextu

Ex hac calculata vera altitudine solis h , invenitur apparenz per

$$h' = h + \text{Refraction} - \text{Parallax altitudinis}$$

ubi refraction pro appropinquata altitudine queri debet.

Si den h'' observata altitudo objecti terrestris et Δ observata distantia solis ab hoc objecto, den invenitur ad Horizontem reducia distantia Δ' solis ab hoc objecto per sequentem expressionem

$$\sin \frac{\Delta'}{2} = \frac{\sin \frac{\Delta + h' - h''}{2} \sin \frac{\Delta - h' + h''}{2}}{\cos h' \cos h''}$$

(nimirum ex triangulo cuius tria latera sunt cognita). - Vid. quoque Pluissant Traité de géométrie Vol. 2 p. 152 et Vol. 1 p. 174.)

Si Δ' fere est 90° , melius erit, sumere expressionem similem pro $\cos \frac{\Delta'}{2}$, dum est questum. Azimuthum ω objecti, respectu is equali sum, mae aut differentis quantitalum ω et Δ' . —

Determinatio Azimuthi ω , praecipue dependet a determinatione tem-
poris, quae facile videre possumus, si assumamus alium se non mul-
tum differentem angulum horarium; in nostris latitudinibus error
minutus, secundi in tempore, jam producit $10''$ in azimutho, hinc
et pro nomina principalis debet esse, ut quam accuratissime de tem-
poris sumus tempus. — Si desideramus Azimuthum magna cum
praecisione, totis & instantiis, Theodolita, vel circuli multiplici-
tores adhiberi debent, quae instrumenta ad hunc finem accuratiora,
rehabilitata, praebent, si hi circuli multiplicatores habent majorem cir-
culum horizontalem; dum immediate cum his instrumentis men-
suratus distantia azimuthalis Δ' objecti a sole, et ex dato tempore,
re observationis azimuthum obliquo per calculum derivatur, ubi
dum, uti prius, summa vel differentia quantitalum Δ' et ω ,
questum Azimuthum dat. — Si autem plures tales distantias
 Δ' sunt mensuratae, vel si Theodolita multiplicat, has observatio-
nes simili modo tractare possumus, uti attulerimus circummeridionali-

Sit t angulus horarius qui pertinet ad azimuthum ω , dum per-
tinet ad angulum horarium $t + \Delta$ azimuthum $\omega + \Delta\omega$, ubi habemus

$$\Delta\omega = \Delta \frac{d\omega}{dt} + \frac{\Delta^2}{1.2} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{\Delta^3}{1.2.3} \frac{d^3\omega}{dt^3} + \dots$$

Si n est numerus observationum, dum medium omnium azimu-
thorum, quod ad angulos horarios $t + \Delta$, $t + \Delta'$, $t + \Delta''$...
pertinet, erit aequale

$$\Delta\omega = \frac{\Delta + \Delta' + \Delta''}{n} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2}{1.2.n} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \dots$$

Si autem assumitur t pro angulo horario, qui pro medio omnium
temporum observationum valet, dum $\Delta + \Delta' + \Delta'' + \dots = 0$ sum est, si
altiores potestates negligantur.

$$\Delta\omega = \frac{d^2\omega}{ndt^2} \sum \frac{\Delta^2}{2}$$

Si retinemus priores significationes, est

$$\sin \phi \cos t \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{\sin \phi \cos t \frac{d^2\omega}{dt^2}}{\sin t}$$

hinc

hinc $\frac{dw}{dt} = \frac{\sin \varphi - \sin \delta \sin h}{\cos^2 h}$ et

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \left(2 \frac{\sin h (\sin \varphi - \sin \delta \sin h)}{\cos^3 h} - \frac{\sin \delta}{\cos h} \right) \frac{dh}{dt}$$

Ad $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$, hinc quoque

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{\cos h}$$

ergo $\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin t}{2 \cos^3 h} \{ (\sin \varphi + \sin \delta) \sec^2 \frac{1}{2} \varphi - (\sin \varphi - \sin \delta) \sec^2 \frac{1}{2} \delta \}$

ubi $\varphi = 90 - h$

Si nunc nominemus $\frac{d^2w}{dt^2} = M$, erit

$$\Delta w = \frac{M}{n} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} \delta}$$

et quantitates $\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} \delta}$, $\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi}$ etc. sumi possunt ex tabula, quae quoque est constructa pro altitudinibus circummeridionalibus. Haec ratione calculi arithmetici evadit ita simplicis, uti si simpliciter sumi redueas observatas distantes ad Horizontem, uti quoque omnis respectus ad refractionem etc. non habet locum.

Loco solis etiam stella polaris vel quaecumque stella in vicinia poli adhiberi potest, si objectum serripere noctis tempore illuminatus. Si eligatur sempiterna, quando stella polaris est in suis maximis digressionibus, et designetur per φ et δ angulus horarius et arimuthum momento huius maxime digressionis, dein est ex trian-

$$\sin \varphi = \sin \delta \sin h$$

$$\sin w = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}$$

$$\sin t = \frac{\cos h}{\cos \varphi}$$

Ad valores substituendos in prioribus, inveniuntur

$$\frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = - \cos \delta, \quad \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{\sin w \sin \delta}{\sin t}$$

Si arimuthum a parte boreali Meridiano numeratur, ergo erit

$$\Delta w = - \frac{\sin w \sin \delta}{n \sin t} \sum \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} \delta}$$

ubi w et t inveniuntur ex aequationibus

$$\sin \alpha = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}$$

$$\cos t = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$$

(vi.) Monatliche Correspondenz 1812 Junij Götting. Comment. XI. Tom. Soldners
 neue Methode Beobachtete Himmels zu reduciren München 1813,
 et Berliner Jahrbuch 1818 p. 125. Zeitschrift für Astronomie
 III. B. p. 82.)

Si azimuthum aliquis Objecti per se bene determinationem, et
 hoc quoque notus est situs Meridiani pro loco observatoris. Jamque
 (dicitur) etiam hic situs innotuit per observationes cum Theodolito,
 si nimirum et ante et post culminationem Solis aut aliquis
 stellae aequalis altitudines observantes, ubi medium inter ambas ob-
 servationes, vel medium arcus per tubum in circulo horizon tali descri-
 ptis hunc situm lineae Meridianae indicat. In observatione Solis
 vero quoque respicere debemus variationem in declinatione. Commo-
 disimum autem et simplicissimum medium autem supponit ut
 minationum. Sed et ope Sestantium, situs lineae Meridianae
 ad plura milliaria accurate determinari potest per methodum quam
 D. B. Zach. — Eundem applicatio hujus methodi pro practi-
 ca magis est utilis, breviter hanc methodum indicabo. —

In distantia aliqua, ad libitum assumpta, a loco observa-
 tionis ponantur in paucis nota directione Meridiani aliquae
 signa, et observentur in quolibet horum signorum et ante et
 post Meridium aliquae correspondentes distantiae solis ab his signis.
 Meridie binorum temporum, dat incorrectum Meridium, qui pro-
 pter variationem declinationis Solis, ubi altitudines correspondentes
 corrigi debet. Si φ est altitudo poli, δ declinatio,
 t semper intervallum temporis de variatio declinationis in tempore
 t , tandem h altitudo signorum, deinde est correctio meridii secundum
 data priora

$$\frac{d\delta}{dt} \left(\frac{\sin \varphi \cos \delta}{\sin \delta} \right) - \tan \delta \tan \varphi$$

locum

Eodem die observatas quae correspondentes altitudines Solis, ex quibus obtinuit correctus verus meridianus.

Evidens est, meridianum signum coincidere cum hoc vero meridiani altitudinem correspondentium, si situs signi revera est in Meridiano, et meridianum illam signum esse, si signum magis orientem versus respectu meridiani, sicut, et vice versa. Ex his differentiis meridianum et ex his notis differentiis. Si status signum inter se, facile distinguere tum determinari potest, ubi signum debuit esse, et revera sit in Meridiano.

Hae ratione invenit R. Hach 7. April. 1801 Seebergi.

Sign.	in corr. merid.	Correctio	Correct. Meridius
I sign.	11° 55' 34.92	+ 17.39	11° 55' 52.31
II sign.	11 56 1.25	+ 17.39	56 18.64
III sign.	56 31.18	+ 17.39	56 48.57

Ex altitudinibus correspondentibus autem inventus est correctus verus meridianus 11° 56' 52.20

Atque tertium signum 3.63 a Meridiano in ejus parte orientem, si distat. Primum autem signum distabat a tertio 68.6 polly et secundum a tertio 36.5 polly meridianus primus et tertius signum differunt inter se 36.26 secundum et tertium 29.93. Si ergo x distans tertium signum a Meridiano, dicitur ex primo et tertio

$$x = 3.63 \left(\frac{68.6}{56.26} \right) = 4.426$$

ex secundum et tertio

$$x = 3.63 \left(\frac{36.5}{29.93} \right) = 4.424$$

In medio agitur ex his determinationibus tertium signum 4.425 polly distat a Meridiano in parte orientali, et tunc huc quantitate signum magis orientem versus moveri debet ut revera sit in linea Meridiana loci observationis.

(Vide Monathliche Correspondenz 1801 April, May, August et 1803 Junii.)

Determinatio Ascensionis rectae siderum, Obliquitatis eclipticae, et distantiae eorum coelestium a terra.

Observatio et determinatio Ascensionis rectae aliquis sideris
maximi momenti est in astronomia; quia ex hac tantummodo
per differentias ascensionum rectarum, ascensiones rectas cetero-
rum siderum facile derivari possunt.

I. Invenire absolutam Ascensionem rectam Solis.

Sit δ observata declinatio Solis observati non longe post aequinocti-
um vernum, et δ' declinatio ante aequinoctium autumnale. Si
in ambobus diebus differentia Ascensionis rectae Solis cum eadem
fixa, cuius Ascensio recta ipsa inaequalitas est, observetur, residuum
harum differentiarum, si respiciatur ad Precessionem, Nutationem
et Aberrationem, dabit motum Solis α in recta ascensione in inter-
vallo temporum inter ambas observationes.

Nominetur nunc inaequalitas Ascensio recta Solis in prima observatione
 α et in secunda β dein est, si e obliquitatem eclipticam
significat,

$$\sin \alpha \cos e = \sin \delta$$

$$\sin \beta \cos e = \sin \delta'$$

Nunc $\sin \alpha : \sin \beta = \sin \delta : \sin \delta'$ ex quo sequitur

$$\text{ergo } \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin(\delta - \delta')}{\sin(\delta + \delta')} \text{ chy } \frac{\alpha}{2}$$

Si hic vicinus arcus $\frac{\alpha - \beta}{2}$ addatur a) $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$, habetur
 α seu prima Ascensio recta, et si addatur

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \text{ ad } 180 - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2} \text{ habetur } 180 - \beta \text{ seu secundam}$$

Ascensio recta Solis, et quoniam ambobus diebus quoque differen-
tia Solis et illius fixae observata est, nota est quoque Ascensio rec-
ta fixae. (Vide Berl. Jahrb. 1791. p. 203 et Correspond. astr. Vol. XVIII. I.)
Haec methodus ut videmus dependet ab obliquitate eclipticae etc
ita, ut erroneae suppositiones, notabilem influum in inveniendum

ref. p. 1.

resultaturus, habeat. Error eclipticus, fere totus evitari potest, si
 observationes instituantur in vicinia æquinoctiorum.

II. Quam determinatio primæ absolute, & æquationis rectæ maximi mo-
 menti est, et quasi Basis totius Astronomiæ practicæ efficiat,
 necessarium est, præcipuam methodum ad hunc finem, accurate
 indicare. Primum officium erit determinatio tantum
 differentiarum. Ascensionum rectarum plurimarum fixarum.

Ad hunc finem observantur, quoties fieri potest, earum culminatio-
 nes in culminatorio. Si diu a fuerint una harum fixarum
 quoad suam Ascensionem rectam; ex bonis observationibus aliis,
 rum Astronomorum, quæ data, per hoc innotescunt quoque Ascensio-
 nes rectæ communem æternam; sed omnes hæc Ascensiones rectæ
 erant affectæ communi errore; nimirum illo stellæ fundamentalis,
 differentie autem Ascensionum rectarum; ex observationibus,
 quæ nullis erroribus affectæ supponuntur. Sic communis error
 Ascensionum rectarum nostri catalogi fixarum, fit dA.

Quilibet dies, quo Sol et una vel plures fixæ in culminatorio ob-
 servatæ sunt, dat differentiam Ascensionis rectæ Solis et stellæ,
 et si Ascensio recta stellæ sumitur ex catalogo, Ascensionem rec-
 tam Solis, quam nominamus α , et quæ hinc etiam illo commu-
 ni errore catalogi affecta erit. Ex hac Ascensione recta et obli-
 quitate eclipticæ apparenti, invenitur Declinatio Solis per
 Solis B. $\text{Sine } \alpha \text{ et } \gamma \text{ vel si quoque respiciamus latitudinem}$

$$\delta = \alpha + B \cdot \cos \epsilon$$

Si diu ϕ est altitudo poli loci observationis, ex determinato δ
 invenitur, vera distantia ætheris per

$$Z = \phi - \delta$$

Quum autem secundum præiora α quantitate dA sit erronea,
 et quum et altitudo poli et obliquitas eclipticæ quantitatibus
 d ϕ , & de erroneæ esse possunt, loco ultimæ equationis, proprie habebimus

$$Z = \phi - \delta + d\phi - d\epsilon \frac{\sin \alpha}{\sin 2\epsilon} - dA \frac{\sin 2\phi}{\sin \alpha}$$

Li

Si autem eodem die etiam distantia a Zenith z' Solis iuxta
diat est observata, debet esse $z = z'$, h. e.

$$0 = z' - (\varphi - \delta) - d\varphi + de \frac{\sin 2\delta}{\sin 2\epsilon} + d\delta \frac{\sin 2\delta}{\sin 2\epsilon}$$

Hac ratione obtineamus tot aequationes conditionales formas
adductas, quot habemus dies, quibus Sol in circulo multipli-
catori et Sol et fixa in culminatorio observatae sunt. —

Si diu haec aequationes tractentur secundum methodum quadra-
torum minimorum, maxime probabiles valores quantitatum
 $d\varphi$, de et $d\delta$ obtineantur, h. e. determinatur exactitudo
suppositae altitudinis poli per $d\varphi$, suppositae obliquitatis
eclipticae per de et determinatur quoque error $d\delta$ ascensionum
rectarum, qui omnibus stellis asserviti catalogi communis est.
Tota operatio hinc se reducit ad sequentia:

Quolibet die, quo una ^{fixa} stellarum catalogi, vel plures simul
cum Sole observatae sunt in culminatorio et praeterea, Sol
cum circulo multiplicatore, derivatur primo ex observationibus
in culminatorio Ascensio recta Solis, et ex hac, per calculum Solis
distantia a Zenith. Et haec cum illa per circulum observata distantia
comparata, dabit quaevis aequationem conditionalem huius diei.

Ad etiam inverse ex observationibus cum circulo, Ascensio recta Solis
derivari, et opus huius ex observationibus in culminatorio ascensionem
per stellae inveniri potest, et deinde, si respiciuntur omnes correctio-
nes, ita proceditur:

Ex observata in circulo distantia a Zenith z Solis queratur (cum hy-
pothetica altitudine poli φ , refractione r et paralleli horisonta-
li δ Solis) declinatio Solis.

$$\text{Decl.} = \text{Alt. pol.} - \text{Dist. a Zenith}$$

Ex hac declinatione Solis ejus latitudine et hypothetica obliqui-
tate eclipticae ϵ , queratur per calculum ascensio recta α Solis. —

$$\text{Est nimirum } \tan \alpha = \frac{\tan \delta}{\tan \epsilon} = \frac{\tan(\varphi - z)}{\tan \epsilon} \text{ et hinc quoque}$$

$$d\alpha = d(\varphi - z) \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan \epsilon} - de \frac{\tan \alpha}{\tan \epsilon}$$

Ex hac ascensione recta Solis et ex eodem die observata in
 eclipatorio differentia ascensionum rectarum Solis et unius
 harum stellarum, quaeratur ascensio recta hujus stellae. Pro
 pto hoc ratione esse inventam ascensionem rectam hujus stel-
 lae aequalem α , dum proprie est vera ascensio recta hujus stellae,
 ubi facile invenitur.

$$= 1 + (d\varphi + d\pi \sin \zeta - dr - dz) \frac{2\lg \alpha}{\sin 2\alpha} - de \frac{2\lg \alpha}{\sin 2\alpha}$$

ubi dr est error hypotheticae suppositae refractionis
 de Obliquitatis eclipticae
 $d\varphi$ altitudinis poli
 $d\pi$ Parallaxis horizontalis Solis, et
 dz (divisionis aut observationis) circuli multiplicatorum.

Secundus finis est observationis in signo opposito eclipticae sub
 eodem distantia a Zenith Solis, dat, quoniam nunc ascensio recta Solis
 est $180 - \alpha$, veram ascensionem rectam illius fixae, si reducat
 per praecisionem, nutationem et aberrationem ad primum diem
 observationis

$$\alpha' = (d\varphi + d\pi \sin \zeta - dr' - dz') \frac{2\lg \alpha}{\sin 2\alpha} + de \frac{2\lg \alpha}{\sin 2\alpha}$$

Dimidia summa amborum est

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2} + (dr - dr' + dz - dz') \frac{\lg \alpha}{\sin 2\alpha}$$

Quoniam in hac ultima expressione correctiones $d\varphi$, $d\pi$ et de evanescent
 si ergo ambobus diebus observationum error ascensionis rectae
 et instrumenti sibi sunt aequales, vel si $dr' - dr + dz' - dz = 0$
 tunc est dimidia summa amborum prius inventarum ascensionum
 rectarum $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$ quaerita vera ascensio recta stellae.

Hoc igitur supponit, ambobus diebus observatas distantias a Zenith
 Solis esse ejusdem magnitudinis, vel saltem fere ejusdem magnitudi-
 nis, quia alias dr et dr' non sunt aequales dz et dz' .

Si autem supponimus $dr + dz' = dr' + dz$ dum differentia priorum
 expressionum est

$$0 = (\alpha - \alpha') + (d\varphi + d\pi \sin \zeta - dr - dz) \frac{4\lg \alpha}{\sin 2\alpha} - de \frac{4\lg \alpha}{\sin 2\alpha}$$

vel

$$d\varphi - d\chi - d\psi = -\frac{(a-a')}{2\sin\alpha} \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} + de \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = d\pi \sin 2\alpha$$

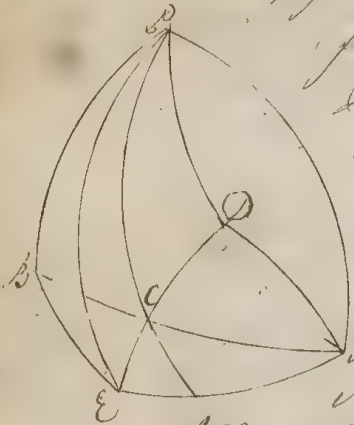
et ex hujus aequationis, in qua $\frac{a-a'}{2\sin\alpha}$ semper quæ notum et $d\pi = 0$ supponi potest, inveniantur ex observationibus Solis errora $d\varphi$, de , $d\chi$ et $d\psi$.

III. Hæc ratio ascensionis rectæ aliujus sideris est inventa, dein facile ex differentiis ascensionum rectarum etiam absolute ascensionis rectæ utrorumque inveniri potest. Etiam possumus, si plures stelle quas suam positionem notas sunt, per observatas distantias harum a b aliis, ascensionem rectam et declinationem ultimarum invenire, quæ methodus quoque ad cometas applicari potest, si v. c. tantummodo distantiam sumus instructi, si illarum distantias a ductus notis stellis fixis observantur. Ex his distantiis et ambobus temporibus observationum invenire ascensionem rectam et declinationem, tantummodo remanet ad solutionem similibus problematis, quæ jam prius habuimus, nimirum ex duabus distantis a tenitis aliujus quas suam positionem notas stellæ et ex temporibus observationum invenire altitudinem poli est statum horologii.

Aligua quoque dicere debemus de methodo antiquiorum determinandi positionem cometarum nimirum per se dictum (Alignement). Necessaria est cognitio hujus methodi, si volumus calculare cometas observatos per Tychonem et alios astronomos sui ævi. Hæc methodus potissimum consistit in sequentibus: Tenet filum ad oculum, et facimus scire hoc filum cometam aut fixis, in quibus positionem volumus determinare. Si hæc filum eodem tempore transit per duas stellas cognitæ, nos sumus convicci cometam esse in eodem verticali cum his stellis; sed hoc non sufficit, inveniri adhuc debent duæ aliæ stellæ, quas etiam filum tegit, quod transit per centrum cometæ, dein cometa erit in intersectione horum duorum arcuum circuli maximi, qui conjungunt hæc stellæ. Ad calculum harum observationum sequens methodus adhiberi potest.

Supponamus per primam positionem (Alignement) cometam esse inventum in C in arcu circuli maximi AB, per secundam in

in arcu DE; A, B, D, E, sunt stelle cognite; B potest potius vel
 aequatoris vel eclipticæ quoad volumus determinare vel ascen-
 sionem rectam et declinationem vel potius longi tudinem et lati-
 tudinem. — In triangulo DBA calculatur anguli BDA;
 BDA, per analogias Neperi; determinatur quoque AD



In triangulo BBA calculatur angulus BBA. In triangulo
 BDE calculatur angulus ad D, dein habetur, in triangulo DAC,
 AD, $\angle C = \angle A - \angle BDA$, $\angle C = 360^\circ - \angle BDA - \angle BDC$;
 ex his calculatur ED; dein habetur stans AD, ED et
 BDC ex quibus et DBC. — DC erit distantia ve-
 laris cometæ, et DBC angulus ad polum in his stel-
 lis tam cognitis D et cometæ C. Loca triangulorum
 ABD, BDA et BDC, potius sumere triangula AB E

ACE et B E. — similes conclusiones potamus facere circa punctum
 B. (Vide exemplum hanc methodum in Comographia de Gigni tom II p. 223)
 Sed hæc methodus est admodum complicata, ut videre possumus in eodem
 pto adducto; necessaria sunt quing. triangula et 43 logarithmi.

Sequens methodus non est tam complicata; quæ methodus brevitate
 et commoditate sese commendat. Nulla figura necessaria est et tantum
 33 logarithmi exiguntur. — Sit Declinatio cometæ, C ejus ascen-
 sionem rectam, A, A' ascensionem rectam stellarum primæ positionis, A'' ascen-
 sionem rectam stellarum secundæ positionis, D, D' declinationes, A'' declinationes.

Ex trigonometria habemus æquationem quæ exprimit relationem in-
 ter tria puncta ejusdem circuli maximi, quæ ergo est pro nostro casu:

$$\frac{\log D' \sin(A'' - C) + \log D \sin(C - A)}{\sin(A' - A'')} = \frac{\log D' \sin(A'' - C) + \log D \sin(C - A')}{\sin(A' - A''')}$$

 ex quo

$$\log D' \sin(A'' - A'') \sin(A' - C) + \log D \sin(A' - A'') \sin(C - A) = \log D' \sin(A'' - A'') \sin(A' - C) + \log D \sin(A' - A'') \sin(C - A')$$

 vel

$$\log D' \sin(A' - A'') \sin A'' \cos C - \log D' \sin(A' - A'') \cos A'' \sin C + \log D \sin(A' - A'') \cos A'' \sin C - \log D \sin(A' - A'') \sin A'' \cos C =$$

$$= \log D' \sin(A' - A'') \sin A'' \cos C - \log D \sin(A' - A'') \cos A'' \sin C + \log D' \sin(A' - A'') \cos A'' \sin C - \log D \sin(A' - A'') \sin A'' \cos C;$$

 Dividendo per $\cos C$ erit

Löst man die zwei Dreiecke
 $m \delta$, $m \delta'$ auf, so ist

$$\lg \eta = \frac{\lg b}{\sin w} = \frac{\lg b'}{\sin(a'-a+w)}$$

oder $\frac{\lg b'}{\lg b} = \frac{\sin(a'-a+w)}{\sin w}$ also

löst man die Tangente in $\sin a'$ los. auf
 so bekommen wir

$$\frac{\sin b \cos b}{\sin b \cos b'} = \frac{\sin(a'-a+w)}{\sin w} \text{ oder}$$

$$\sin b' \cos b : \sin b \cos b' = \sin(a'-a+w) : \sin w$$

$$\sin(b'+b) : \sin(b'-b) = \sin(a'-a+w) + \sin w : \sin(a'-a+w) - \sin w$$

Jetzt hat man $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
 $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$

also $\frac{\sin(b'+b)}{\sin(b'-b)} = \frac{\sin(a'-a+w) + \sin w}{\sin(a'-a+w) - \sin w} = \frac{2 \sin(w + \frac{a'-a}{2}) \cos \frac{a'-a}{2}}{2 \sin(\frac{a'-a}{2}) \cos(w + \frac{a'-a}{2})} = \lg(w + \frac{a'-a}{2}) \lg \frac{a'-a}{2}$

daher $\lg(w + \frac{a'-a}{2}) = \lg \frac{a'-a}{2} \frac{\sin(b'+b)}{\sin(b'-b)}$

Aus dem Geſchloſſene ziehe man auf dem Halbierungspunkte von $mm' = 2E$
 den Bogen gz so wird $pz = x$

denn, wenn man die zwei Dreiecke $m \delta p$ u. $p \delta m'$ auflösen wird
 so erhält man $\lg \theta = \lg \eta \sin(E-x) = \lg \theta \sin(E+x)$

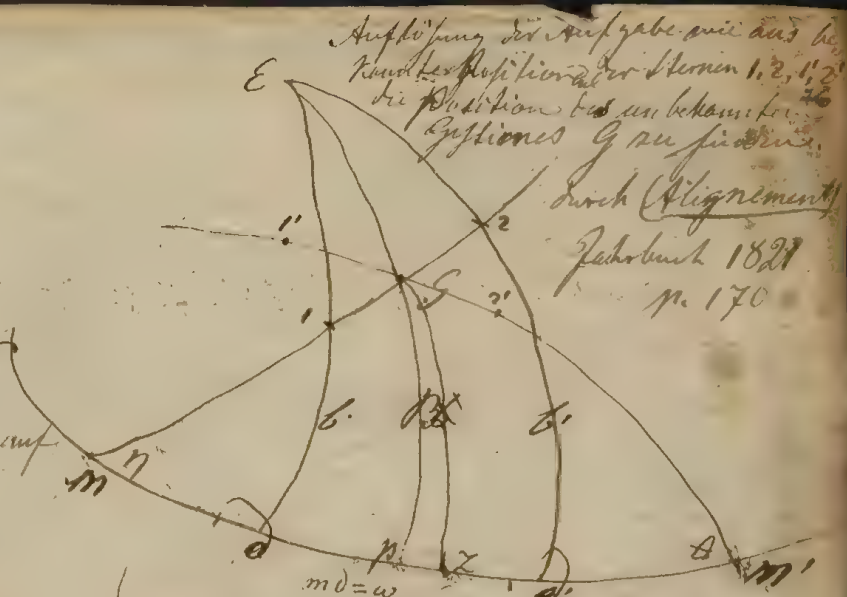
$$\lg \eta : \lg \theta = \sin(E+x) : \sin(E-x)$$

$$\lg \eta + \lg \theta : \lg \eta - \lg \theta = \sin(E+x) + \sin(E-x) : \sin(E+x) - \sin(E-x)$$

$$\frac{\lg \eta + \lg \theta}{\lg \eta - \lg \theta} = \frac{\sin(E+x) + \sin(E-x)}{\sin(E+x) - \sin(E-x)}$$

$$\frac{\sin(\eta + \theta)}{\sin(\theta - \eta)} = \frac{2 \sin E \cos x}{2 \sin x \cos E} = \lg E \lg x$$

$$\lg x = \lg E \frac{\sin(\theta - \eta)}{\sin(\theta + \eta)}$$

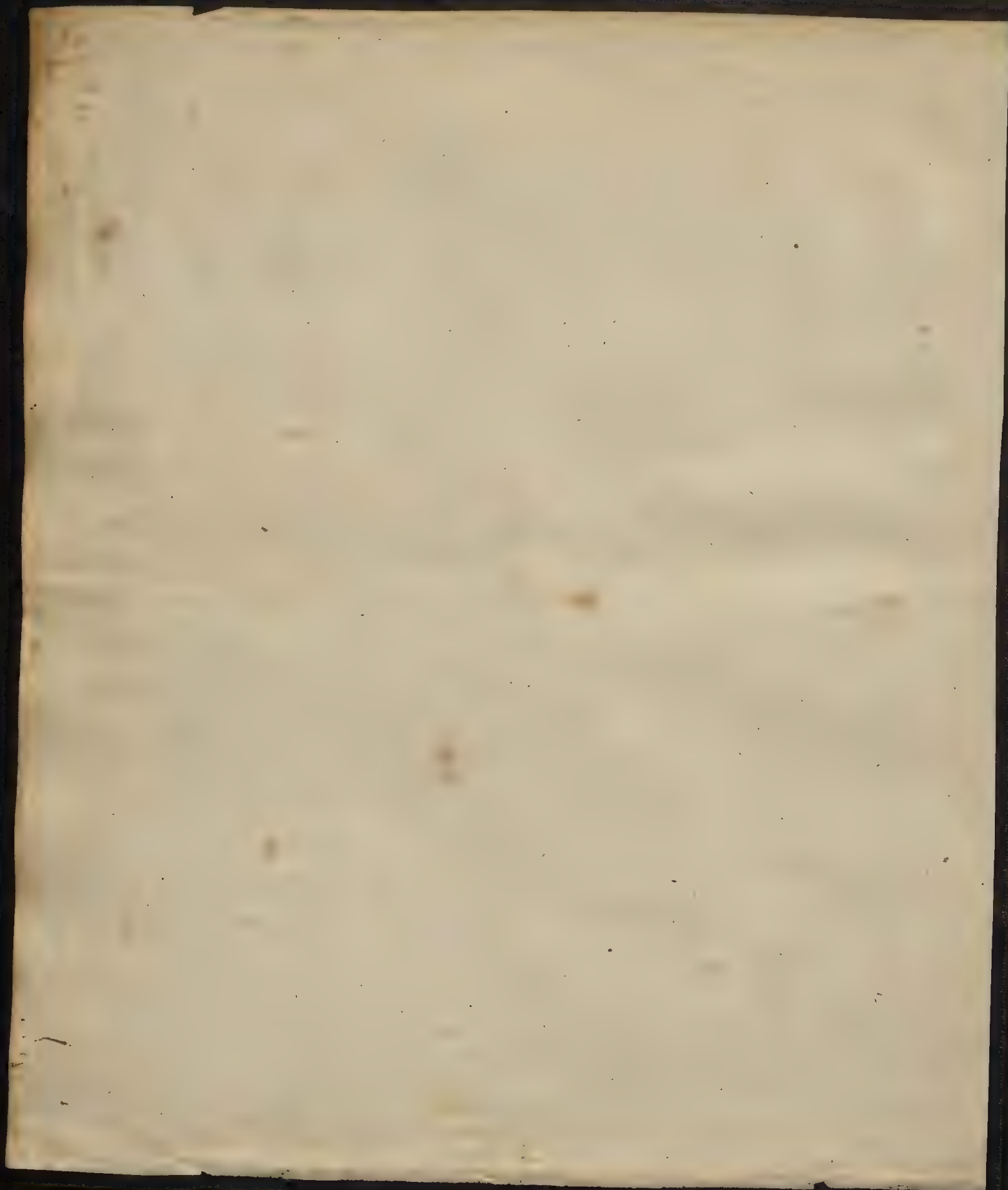


Auflösung der Aufgabe mit dem
 Neuker'schen Propositionen 1, 2, 12
 die Position des unbekannten
 Geſchloſſenes g zu finden.

durch (Klignement)

Jahrbuch 1821

p. 170



$$\begin{aligned} & \lg D \sin(A'' A''') \sin A'' - \lg D \sin(A'' A''') \sin A'' - \lg D \sin(A'' A''') \sin A'' + \lg D \sin(A'' A''') \sin A'' = \\ & = \lg D \sin(A'' A''') \cos A'' - \lg D \sin(A'' A''') \cos A'' - \lg D \sin(A'' A''') \cos A'' + \lg D \sin(A'' A''') \cos A''; \text{ et} \\ & \lg C = \frac{\lg D \sin(A'' A''') \sin A'' - \lg D \sin(A'' A''') \sin A'' - \lg D \sin(A'' A''') \sin A'' + \lg D \sin(A'' A''') \sin A''}{\lg D \sin(A'' A''') \cos A'' - \lg D \sin(A'' A''') \cos A'' - \lg D \sin(A'' A''') \cos A'' + \lg D \sin(A'' A''') \cos A''} \end{aligned}$$

equatio cuius symmetria est mirabilis.

Inventa hac ratione aspergione recta C, invenitur declinatio per unam priorum aequationum pro $\lg D$.

Si stellae sunt datae quoad suas longitudines et latitudines, quod in observationibus antiquorum fere semper locum habet, tantummodo, ^{comparat} D in λ et omnes A in λ mutari debent; invenitur hac ratione

$$\lg D = \frac{\lg \lambda \sin(L'' C) + \lg \lambda' \sin(C - L') - \lg \lambda'' \sin(L'' - C) + \lg \lambda''' \sin(C - L''')}{\sin(L'' - L''')}$$

et

$$\lg C = \frac{\lg \lambda \sin(L'' - L''') \sin L'' - \lg \lambda' \sin(L'' - L''') \sin L' - \lg \lambda'' \sin(L'' - L''') \sin L'' + \lg \lambda''' \sin(L'' - L''') \sin L'''}{\lg \lambda \sin(L'' - L''') \cos L'' - \lg \lambda' \sin(L'' - L''') \cos L' - \lg \lambda'' \sin(L'' - L''') \cos L'' + \lg \lambda''' \sin(L'' - L''') \cos L'''}.$$

(Sin est C longitudo et λ latitudo cometae)

Bessel reduxit priorem methodum celeb. Delambre ad breviores et simpliciores formulas (Astron. Jahrbuch 1821 p. 170. 171) et Olbers dedit adhuc simpliciorum methodum.

Sint longitudines primarum duarum stellarum α, α' sequentium α, α' ; β, β' latitudines. Primo querantur puncta in intersectione horum duorum circulorum maximorum cum ecliptica ex sequentibus notis formulis

$$\lg(\alpha + \frac{\alpha' - \alpha}{2}) = \lg \frac{\alpha' - \alpha}{2} \cdot \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin(\beta - \beta')}$$

$$\lg(\alpha' + \frac{\alpha' - \alpha}{2}) = \lg \frac{\alpha' - \alpha}{2} \cdot \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin(\beta - \beta')}$$

et longitudines horum puncti intersectionis N et N' sunt $N = \alpha - \alpha'$

$N' = \alpha' - \alpha$. Inclinationes horum circulorum versus eclipticam inveniantur ex $\lg \eta = \frac{\lg \beta}{\sin \alpha}$, $\lg \theta = \frac{\lg \beta'}{\sin \alpha'}$. Et nunc ponatur $N - N' = 2E$ et facimus $\lg x = \lg E \cdot \frac{\sin(\theta + \eta)}{\sin(\theta - \eta)}$ latitudo innotescit ex aequatione cuius est

$N + E + x = N' - E + x$ longitudo ignota astri et latitudo innotescit ex aequatione $\lg B = \lg \eta \sin(E + x) = \lg \theta \sin(E - x)$. — Ad has formulas tantum 26 logarithmi sunt necessarii.

Alias non minoris momenti ^{sunt} observationes obliquitatis ellipticae.
 Si h est altitudo solis tempore solstitii aetivi, δ ejus maxima de-
 clinationis et φ altitudo poli, dñi est $h = 90 - \varphi + \delta$ et eadem ratione
 pro solstitio hiemali $h' = 90 - \varphi - \delta$, hinc dñi dñi summa $\frac{h+h'}{2}$
 amborum altitudinum est aequalis altitudini in aequatoris, et sum-
 ma differentia $\frac{h-h'}{2}$ est aequalis δ h.e. e obliquitati ellipticae
 Et ista methodus recte applicatur, notandum est, raro coincidere
 altitudinem solis tempore solstitii cum proxima altitudine ~~hiemali~~
 meridionali, ergo non sumi potest proxima altitudo meridionalis
 pro altitudine solstitiali, hinc tempore meridii in ista ob-
 servatio, reduci debet ad tempus solstitii. Praeterea haec
 obliquitas elliptica, propter quam diminutionem secularem,
 et propter mutationem variationi huius est obnoxia, hinc in con-
 junctione duorum proximorum solstitiorum respici debet ad varia-
 tiones.

Mutatio igitur declinationis ad declinationem solstitii sumi po-
 test ex sequenti aequatione

$\log \delta = \log e \sin \alpha$ ubi δ est observata declinatio
 et α correspondens ascensio recta solis. Haec aequatio dat
 quoque pro reductione ad solstitium

$$\begin{aligned}
 e - \delta &= \delta^2 \sin 2e - \frac{\delta^4}{2} \sin 4e + \frac{\delta^6}{3} \sin 6e \\
 \text{vel etiam} \quad e - \delta &= \delta^2 \sin 2\delta + \frac{\delta^4}{2} \sin 4\delta + \frac{\delta^6}{3} \sin 6\delta
 \end{aligned}$$

ubi $\delta = 90 - \alpha$

Prima haec expressio multo commodior est quam secunda, si
 vellemus facere reductionem $e - \delta$ independentem a vera longitudine
 solis, habebimus: $\sin \delta = \sin e \sin \alpha$

et hinc quoque $\frac{\sin e - \sin \delta}{\cos e} = 2 \log e \sin^2 \frac{90 - \delta}{2}$

Si haec aequatio comparatur cum expressione $\frac{\sin \alpha - \sin \delta}{\cos \alpha} = \tau$ (quam
 habuimus, quando sumo fuit de altitudinibus cum meridione libus)

erit quoque
$$e - \delta = \tau - \frac{\tau^2}{1.2} \log e + \frac{\tau^3}{1.3} (1 + 3 \log^2 e) + \dots$$

ubi $\tau = 2 \log e \sin^2 \frac{90 - \delta}{2}$

Nunc transibimus ad methodos per quas distantia corporum celestium a terra seu eorum parallaxis inveniri possunt.

2. Simplicissimum medium, quod se offert ad hunc finem, est observatio ejusdem sideris ex duobus quoad punctum situm bene determinatis vel ex se invicem distantibus locis terrae, qui fere sub eodem jacent Meridiano. — Si supponitur terra quae sphaerica, quae per rotationem ellipsoidea circa ejus axem minorum orta est, et nominatur pro primo loco observata distantia a Zenith Z , observata altitudo poli φ , et geocentrica altitudo poli $\varphi - \omega$, radius terrae pro hoc puncto r at \tan , deinde α angulus linea visualis cum linea, quae centra sideris et terrae coniungit, et pro altero loco eadem quantitates cum signis, deinde in huiusmodi facile distantia A centrorum sideris et terrae per sequentem duplicem expressionem:

$$A = \frac{r \sin(Z - \omega)}{\sin \alpha} = \frac{r' \sin(Z' - \omega')}{\sin \alpha'}$$

et praeterea $\alpha + \alpha' = (Z + Z') - (\varphi + \varphi') = m$

Ex his duabus equationibus sequitur

$$\lg A = \frac{r \sin(Z - \omega) \sin m}{r' \sin(Z' - \omega') + r \sin(Z - \omega) \cos m}$$

$$\lg A' = \frac{r' \sin(Z' - \omega') \sin m}{r \sin(Z - \omega) + r' \sin(Z' - \omega') \cos m}$$

$$\begin{aligned} r' \sin(Z' - \omega') \sin \alpha &= r \sin(Z - \omega) \sin \alpha' \\ \text{pro } \sin \alpha' \text{ ponatur valor erit} \\ r' \sin(Z' - \omega') \sin \alpha &= r \sin(Z - \omega) \sin(m - \alpha) \\ \text{vel} \\ r' \sin(Z' - \omega') \sin \alpha &= r \sin(Z - \omega) \sin m \cos \alpha - r \sin(Z - \omega) \sin \alpha \cos m \\ \text{et hinc} \\ (r' \sin(Z' - \omega') + r \sin(Z - \omega) \cos m) \sin \alpha &= r \sin(Z - \omega) \sin m \cos \alpha \\ \text{ergo } \lg A &= \dots \end{aligned}$$

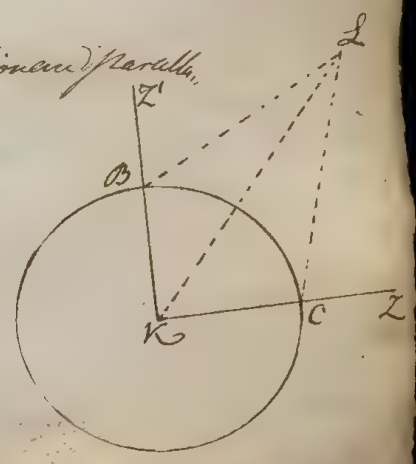
Si deinde π est parallaxis horizontalis sideris pro Aequatore terrae et A radius Aequatoris, deinde est $\sin \pi = \frac{A}{A'}$

vel approximative $\pi = \frac{A \cdot m}{r \sin(Z - \omega) + r' \sin(Z' - \omega')}$

La Caille et Lalande usi sunt sequenti methodo ad determinationem parallaxis lunae et Mercurii. — Sit C promontorium bonae spei,

Z ejus Zenith; B . Berolinum; Z' ejus Zenith, L luna. Observator in centro terrae observaret $\angle KCL$ distantiam a Zenith in promontorio, et $\angle KBL$ Berolini, summa $\angle KBL$ erit differentia latitudinum, seu distantia revera observata, sicut $\angle CL = \angle KCL + \angle CK$; $\angle BL = \angle KBL + \angle CK$ quantum summa dat $\angle CL + \angle BL = (\angle KCL + \angle KBL) + \angle CK + \angle CK =$

$$\begin{aligned} &= \angle KCL + \pi \sin \angle CL + \pi \sin \angle BL \quad \angle K + \angle L = A + A' + \pi(\sin \angle K + \sin \angle L) \text{ et hinc} \\ \pi &= \frac{(Z + Z') - (A + A')}{\sin Z + \sin Z'} = \frac{(Z + Z') - (A + A')}{2 \sin \frac{1}{2}(Z + Z') \cos \frac{1}{2}(Z - Z')} \end{aligned}$$



Expressio superior pro π supponit ambos observatores esse in diversis
 partibus Aequatoris, si sunt in eadem parte, minor altitudo poli
 negativa debet assumi uti ejus w . Si fidus est pro ambobus in eadem
 parte Zenithi, dñ minor Marcæ distantiam a Zenithi etiam est
 negativa. Si tandem loci observationum non accurate fuerint sub
 eodem Meridiano, respici debet ad variationem delibatio eius in
 intervallo temporis, quoniam observationes non amplius sint tautochronæ.
 Hæc ratione determinavit Lacaille in promontorio bonæ spei et
 Salente Berolini parallasin Lunæ et Martis. Aliam methodum
 calculandi hæc observationes, vidit Dusejour in Mémoires de
 l'Acad. des sciences, année 1782, p. 321 et 1783, p. 263. (Delambre
 2. vol. p. 292. p. 42.)

Si fidus autem non valde distat a terra, ex observationibus
 in uno eodumque loco ejus parallaxis derivari potest. —

Sit α et α' vera ascensio recta et declinatio lunæ, α' ejus appa-
 rens parallaxis afflata, et A Zenithi ascensio recta, q geocentrica
 altitudo poli et r distantia observatoris a centro terre, radius
 æquatoris pro unitate assumpto, dñ calculi parallaxis est

$$\alpha - \alpha' = r, p \sin(A - \alpha') \frac{\cos q}{\cos \delta}$$

ubi p est parallaxis horizontalis in Aequatore.

Posito igitur $r \sin(A - \alpha') \frac{\cos q}{\cos \delta} = b$ et $\alpha - \alpha' = d\alpha$, erit

$$d\alpha = b, p \quad \text{et eadem ratione pro secunda obser-}$$

$$natione \quad d\alpha_1 = b_1, p_1 \quad \text{hinc}$$

$$p = \frac{d\alpha_1 - d\alpha}{b_1 - b} \quad \text{--- (I)}$$

et in hac ultima æquatione $d\alpha_1 - d\alpha$ seu differentia paral-
 laxium est nota, ergo potest quoque inveniri valor quantita-
 tis p . —

Quæritur nimirum in ambabus observationibus differentia
 ascensionis rectæ Lunæ et alius fixæ in ejus vicinia, ex qua
 apparentis ascensionis rectæ Lunæ flumit, quarum differentia
 sit m . Ex tabulis lunæ vero, invenitur motus lunæ in ascensio-
 ne

ascensione recta, in intervallo temporis, vel differentia in
 amborum verarum ascensionum rectorum sunt, et erit

$$d\alpha - d\alpha' = m' - m$$

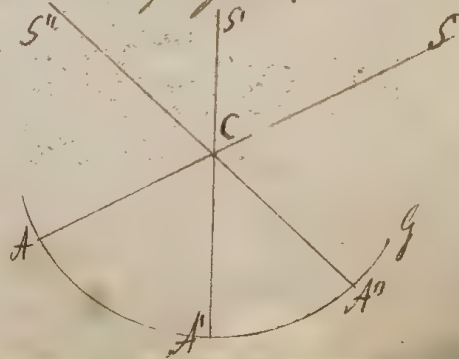
Ex generali expressione pro δ videmus, hanc methodum huiusmodi,
 quum debere adhiberi, si δ est maximum, et si ambo obser-
 vationes in diversis partibus Meridiani et quidem in vicinia
 primi verticalis sunt institutae; hac ratione minimum aequi-
 ruat δ , et δ maximum. suum valorem; et unum erit negativum.
 In observationibus ipsis filum micro metri, quod correspondet in-
 ter parallelo, cum directione stellae non tunc parallela esse debet,
 quia declinatio tunc velivideri se matet et directio sui motus non
 amplius aequatori parallela assumi potest. (Comp. in de l'hoë p. 233. Vol. I)

Parallaxis solis seu ejus distantia a terra, a qua, uti videri
 mus, nostra cognitio distantiarum absolutarum ~~communi~~ plene
 terrarum et cometarum a sole et inter se dependit, propter suam ma-
 gnitudinem distantiam a terra per priorem methodum non potest deter-
 minari, sed illa exigit speciales considerationes, ad quas jam redi bi-
 mus, quando sermo erit de transitu inferiorum planetarum ante
 discum solis.

Quum propter precessionem, nutationem et aberrationem, fere in qua-
 libet fixa adhuc alius eff. parvus motus observatus est, cujus reges
 non noscimus, cujus directio autem secundum opinionem aliquorum
 astronomorum aliquid commune habent, hi crediderunt, ejus causam non
 esse motum proprium harum stellarum, sed motus solis ejusque motus
 Systematis planetaris. (Vid. Berol. Ephemer. 1767 p. 224)

Si nostrum systema solare, quod in his disquisitionibus quapud hunc
 consideratur, in uno saeculo Arcum AA' 5"

quae magnae orbis area commune aliquod con-
 transgravidatis describit, arcum, qui hic spectari
 potest quae linea recta; et si C est stella, quae in
 hoc puncto immobilis assumitur, diu haec stella
 in ambobus sitibus nostri systematis, a terra vel
 sole videtur in S et S'



Set $AA' = \pi$ parallaxis speculoris nostri systematis, et angulus $CA'G = m$,
 praeterea $AA' = r$ et $AC = \xi$, dein est $\sin \pi = \frac{r}{\xi} \sin m$, hinc $\frac{r}{\xi}$ erit medi-
 mus valor parallaxis (qui maximus valor $\sin m$ est unitas), si AC perpen-
 diculariter insistit $CA'G$. —

Sed r et ξ sunt quantitates incognitae, et probabilitate etiam manebunt
 incognitae. Atque quoque impossibile est, absolutam valorem parallaxis
 inveniri. Sed directio lineae AA'' potest ex observationibus derivari
 potest. —

Ad hunc finem querere posuimus, an directiones li-
 nearum AC , AC' , AC'' ... quae designant apparentes lineas vi-
 suales, omnes ab una sola linea ite sequantur. —

Sint α , δ , ξ , ascensio recta, declinatio et distantia stellae a terra
 vel Sole, et si reduitur huius stellae positio ad tres perpendiculares
 coordinatas x , y , z , quarum x est in linea aequinoctiorum et xy
 in plano Aequatoris, dein est

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \delta \cos \alpha \\ y &= \xi \cos \delta \sin \alpha \\ z &= \xi \sin \delta \end{aligned}$$

Si observatus v.c. post centum annos iterum eadem stella et nominetur
 α' , δ' , ξ' ascensio recta, declinatio et distantia huius stellae hac observatio-
 ne obtenta, et per praecipuum ad priorum epocham reduita, dein est

$$\begin{aligned} x' &= \xi' \cos \delta' \cos \alpha' \\ y' &= \xi' \cos \delta' \sin \alpha' \\ z' &= \xi' \sin \delta' \end{aligned}$$

ubi tunc suppositum est, quantitates α' , δ' et ξ' tantum differre propter
 motum stellae systematis planetarii. —

Sint nunc X , Y , Z analogae coordinatae puncti caeli versus quod
 motus nostri systematis planetarii directus est, quod punctum brevi-
 tatis causa propter nomen nolumus, et si per oculum observationis
 et per ista loca apparentiae stellae imaginatur planum ductum, hoc pla-
 num quoque transibit per istum punctum. Si aequatio huius plani
 est $Z = Mx + Ny$, dein aequationes, quae exprimunt conditionem, istud
 planum transire per haec duo loca stellarum et per punctum, sunt

$$\begin{aligned} x &= Mx + Ny \\ x' &= Mx' + Ny' \\ z &= Mx + Ny \end{aligned}$$

Nunc eliminari debent quantitates M et N .

$$M = \frac{x - Ny}{x} = \frac{x' - Ny'}{x'} = \frac{Z - NY}{X}.$$

hinc $(x - Ny)x' = (x' - Ny')x$, ex quo

$$N(yx' - y'x) = xx' - x'x \quad \text{et} \quad N = \frac{xx' - x'x}{y'x - yx'} \quad \text{ulterius}$$

$$(x' - Ny')x = (Z - NY)x' \quad \text{et} \quad N = \frac{x'Z - Nx'}{y'x' - y'x} \quad \text{hinc}$$

$$(x'x' - Nx')(y'x - yx') = (xx' - x'x)(y'x' - y'x)$$

$$Zxx'y' - x'xxy' - Zx'y + x'x'yx' = y'xx'x' - y'x'x' - Nx'y'x' + Nx'y'x'$$

$$Z(xx'y' - x'y) + N(x'x'y - x'y'x + x'y'x' - x'y'x') + Y(x'x'x' - xx'x') = 0$$

$$(xy' - x'y) + \frac{X}{Z}(yx' - y'x) + \frac{Y}{Z}(x'x' - xx') = 0$$

et ponendo $B = \frac{X}{Z}$ et $C = \frac{Y}{Z}$ erit

$$(xy' - x'y) + B(yx' - y'x) + C(x'x' - xx') = 0 \quad \text{sem}$$

$$B(yx' - y'x) + C(x'x' - xx') = xy' - yx$$

Secundum problema debent omnes stellae dare eundem valorum pro B et C , et quoniam eliae stellae sufficiant ad determinationem harum quantitate, omnes ceterae stellae vel comprobabunt, hanc hypothese, necne. — Si in hac aequatione substituatur pro x, y, \dots eorum valores, et pro d, d' introducantur distantiae a polo p, p' erit.

(1. lumen) $B(\xi r' \cos p' \sin p \sin \alpha - \xi r' \sin p' \cos p \sin \alpha') \quad \text{sic} \quad (\xi r' \text{ ubique se tollunt})$

$$2 \cos p' \sin p = \sin(p' + p) - \sin(p' - p) \quad \text{et} \quad 2 \cos p \sin p' = \sin(p' + p) - \sin(p - p')$$

(nimirum $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ et ponendo $\frac{\alpha + \beta}{2} = p'$, $\frac{\alpha - \beta}{2} = p$)

$$\text{hinc} \quad \frac{1}{2} \sin \alpha \{ \sin(p' + p) - \sin(p' - p) \} - \frac{1}{2} \sin \alpha' \{ \sin(p + p') - \sin(p - p') \}$$

quoniam autem $p' - p$ est admodum parvum, est

$$\frac{1}{2} \sin \alpha (\sin 2p - (p' - p)) - \frac{1}{2} \sin \alpha' (\sin 2p - (p - p')) \quad \text{quod datur}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2p (\sin \alpha - \sin \alpha') + \frac{1}{2} (p - p') (\sin \alpha + \sin \alpha'), \quad \text{ex quo}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2p (2 \cos \frac{\alpha + \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2}) + \frac{1}{2} (p - p') (2 \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2})$$

et propter parvitatem differentiae $\alpha - \alpha'$ est

$$\frac{\alpha - \alpha'}{2} \cdot \sin 2p \cos \alpha + (p - p') \sin \alpha \quad \text{et quia} \quad \sin 2p = 2 \sin p \cos p, \quad \text{erit}$$

$(\alpha - \alpha') \sin p \cos p \cos \alpha + (p - p') \sin \alpha$ quae quantitas adhuc multiplicari debet per B , et dat primam partem nostrae aequationis. Eadem ratio et cum ceteris. —

Hinc

$$\text{Hinc } Q\{(p'-p)\sin\alpha + (\alpha'-\alpha)\sin p \cos p \cos\alpha\} - Q\{(p'-p)\cos\alpha - (\alpha'-\alpha)\sin p \sin p \sin\alpha\} =$$

$$= (\alpha'-\alpha)\sin p.$$

Si nunc nominemus A , D , Q , ascensio recta, declinatio et distantia
 poli, erit $\text{est } X = Q \cos D \cos A$

$$Y = Q \cos D \sin A$$

$$Z = Q \sin D$$

Hinc quoque $P = \text{est } Q \cos A$; $Z = \text{est } Q \sin A$; et substitutis his omnibus
 valoribus in priori aequatione, est

$$(p'-p) \text{est } Q \sin(\alpha - A) = (\alpha'-\alpha) \sin p - \sin p \cos p \text{est } Q \cos(\alpha - A)$$

Et haec aequatio est admodum commoda ad determinationem rationis motus,
 nam $\frac{p'-p}{\alpha'-\alpha}$ omnium stellarum, fit et D jam sunt notis. Si igitur uti-
 tima aequatio pro pluribus stellis resolvitur, videbimus, an resultata obser-
 vationum consentiant cum supposita hypothese, nec ne.

Exemp. Anno 1766 observatum est α Aurigae

$$\alpha = 74^\circ 44' 59'' \quad p = 44^\circ 16' 24'' 5$$

Si ad hos numeros applicetur pro casu pro 42 annis

$$+ 26' 1'' 243 \quad \text{et} \quad - 3' 35'' 604$$

Dein habebimus pro anno 1802.

$$\alpha = 75^\circ 31' 0'' 743 \quad \text{et} \quad p = 44^\circ 12' 51'' 896$$

Ad eodem anno observatum est

$$\alpha' = 75^\circ 31' 14'' 400 \quad \text{et} \quad p' = 44^\circ 13' 12'' 40$$

hinc est. 42 annis

$$p' - p = + 20'' 564 \quad \text{et} \quad \alpha' - \alpha = + 13'' 654$$

Si hi valores in aequatione $Q\{(p'-p)\sin\alpha + \dots\}$ substituantur et pone-
 tur pro medio $\alpha = 75^\circ 8'$ $p = 44^\circ 15'$ erit

$$20'' 085 P + 1'' 732 Q - 6'' 649 = 0$$

Eodem modo inventum est ex observationibus sequentium

$$\text{Sirius } 49'' 072 P + 12'' 479 Q + 16'' 139 = 0$$

$$\text{Procyon } 40'' 478 P + 12'' 774 Q + 28'' 621 = 0$$

$$\text{Arcturus } 29'' 076 P + 78'' 312 Q - 43'' 222 = 0$$

$$\text{Aldebaran } 4'' 966 P + 0'' 062 Q - 7'' 250 = 0$$

$$\text{Megaes } 12'' 216 P - 6'' 466 Q - 1'' 000 = 0$$

$$\text{Pollux } 5'' 177 P + 12'' 213 Q + 24'' 391 = 0$$

Ad accuratam determinationem quantalium P et Q eligi debent istae stellae,
 quarum motus apparent est maximus. Summa aequationum pro Sirio et
 Procyone dat $89'' 500 P + 25'' 253 Q = - 44'' 760$ et per haec aequatio
 cum illa pro Arcturo conjungitur, obtinebunt.

$$P = \text{et } \log D \text{ sit } A = -0.311738$$

$$Q = \text{et } \log D \text{ sit } A = -0.667604$$

$$\text{hinc quoque } A = 244^{\circ} 58' \quad D = 53^{\circ} 31'$$

et valor quantitas A et D huiusmodi aliquot minutis, ille autem pro D 13 gradibus differt ab illis valoribus quos dedit Herschel pro his duabus stellis. — Sed cum hoc ceterae aequationes pro aliis stellis non consentiant ita, ut ex systemate praecedentium aequationum multum valores quantitatum P et Q inveniri possint, qui omnibus tantummodo ad partem satisficerent. Nihil aliud igitur restat, quam istas mutationes colorum, stellarum fixarum, propriis motibus attribueret, et hos semper observare, forsitan posteritas erit diuturni felix, ut delectet hominum motuum causas et leges. —

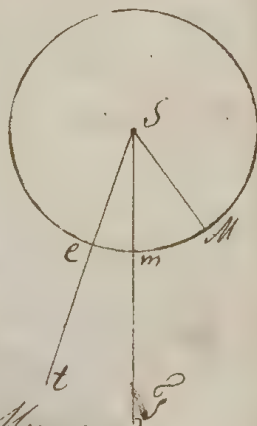
De maculis Solis

Maculae solis, sunt partes puncta diversa, magis lucidis, nigra et irregularia, quae saepius in superficie Solis apparent. Propter has maculas, denotat quoque in superficie Solis puncta, quae magis lucent, quam ceterae partes, et quae nominantur Faculae. Quia hic dicitur de maculis, quoque valet de faculis, quia diversus pro color nihil mutat nec in observatione, nec in calculo.

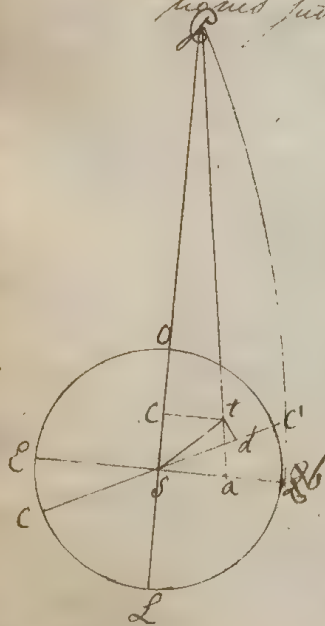
Si macula Solis est in medio disci solaris, videtur in sua forma naturali, quia hic est in superficie, quae non magnam curvaturam habet, et quae perpendicularis est ad radium visuale. Eadem macula, quando venit per rotationem ad unum limborum disci visibilis, ea apparebit admodum obliqua; illa perdit multum a sua magnitudine sine mutatione altitudinis. Igitur, ut bene observetur macula tempore semi-revolutionis visibilis, observari quoque debet, limbus superior, inferior, praecedens et sequens. — Sed haec forma non tantummodo est irregularis, ea quoque est variabilis. Atque maculae sunt plures vel minores nigrae, limbi non sunt bene terminati et variabiles; saepius debemus centrum figure observare, et haec centrum ipsum non semper manet eundem. —

Ad determinationem loci alicujus maculae, sumitur differentia in
 ascensione recta et declinatione cum uno vel ambobus limbus; ex hac
 concluditur ^{distancia} maculae a centro Solis, et per hoc proficitur maculae
 respectu eclipticae h. e. longitudo et latitudo.

Sit S centrum Solis, T terra, M macula in superficie
 Solis et in ecliptica seu ejus vicinia. Dum terra
 ex T in t movetur, macula progreditur motu magis
 rapido ex M ad m; si terra manifeste immobilis, ma-
 cula adventa in m appareret in conjunctione; sed
 terra progressa est ad t, ergo angulus ad Solem;
 qui erat MS, nunc est mSt; ergo imminutus est
 arcus Mm et auctus arcus me, vel imminutus arcus (Mm-me)



Circulus Mm, quem describit macula, potest considerari quae orbita
 alicujus planetae inferioris; si si maculae sunt adherentes superficiem
 motus iste non est proprius maculae; iste pertinet ad corpus, cui ad-
 heret macula h. e. ad Solem, et hoc etiam semper supponemus; si autem
 istae maculae non sunt adherentes, earum revolutiones erunt inaequales
 erunt parvi planetae qui moventur in vicinia Solis, et quorum revolu-
 tiones sunt inter se uti potuerit $\frac{1}{2}$ eorum distantiarum



Sit nunc CEd circulus visibilis Solis, EQ Aequalor, CEd cir-
 culus declinationis qui transit per centrum S, t macula.
 Observatur momentum, quo macula est sub filo instrumenti
 et quoque momentum, quo limbus praecedens et sequens Soles
 transit per filamentum. Differentia temporum dabit nobis an-
 gulum ad polum S inter maculam et limbum Solis vel
 angulum ad B et hic angulus est expressus in tempore.
 Quolibet die noscimus tempus quo in d' get radius Solis ad
 transitum per meridianum, h. e. angulum SPB, ergo
 quoque notus est angulus SBA

Differentia distantiarum a Zenith in limbum Solis et
 maculam t, dat OC et hinc SC = OS - OC vel at = Pt - Ba =
 = Pt - PB, hinc habetur Sa = PB sin PB = B (tempus de B a los decli-
 ty x = ty t Sa = $\frac{at}{Sa}$, St = $\frac{Sa}{\cos t Sa}$

Exempl. Secundum Laland (Astron. III edit. n. 3260.) erant
 Jun. 1775. heliocentricae longitudines et latitudines aliquarum macularum
 solis sequentes:

14 Jun.	$7^s 8' 34'' 21''$	$0^{\circ} 36' 6''$	ang. tr.
18 —	$9 \ 5 \ 48 \ 51$	$7 \ 30 \ 8$	
21 —	$10 \ 19 \ 0 \ 14$	$11 \ 35 \ 16$	
nunc $\frac{1}{2}a =$	$28^{\circ} 34' 15''$	$d = 90^{\circ} 36' 6''$	
$\frac{1}{2}a' =$	$30 \ 12 \ 56.5$	$d' = 97 \ 30 \ 8$	
		$d'' = 101 \ 35 \ 16$	

ex quo

$$\log \sin m = 12.1064421$$

$$\log \sin m' = 12.0684433$$

Quoniam nunc $\sin \frac{d+d'}{2} \sin \frac{1}{2}a$ sit quantitas negativa et
 $\sin \frac{d-d'}{2} \sin \frac{1}{2}a$ — — — — — positiva,
 m cadit in secundum quadrantum, et est

m =	$90^{\circ} 26' 53''.14$
m' =	$90 \ 29 \ 23.08$
nunc e =	$119 \ 4 \ 8.14$
e' =	$140 \ 42 \ 19.58$
e - e' =	$-10 \ 49 \ 5.72$
$\frac{e+e'}{2} =$	$129 \ 53 \ 13.86$

$$\log \sec Z = 9.9982406 \quad Z = 44^{\circ} 53' 9''.31$$

$$\log \sec(x - \frac{e+e'}{2}) = 8.0171606, \quad x - \frac{e+e'}{2} = -0^{\circ} 35' 45''.7$$

$$x = 129^{\circ} 17' 28''.2 = 4^{\circ} 9' 17' 28''.2$$

$$\text{prima longitudo maculae} = 7 \ 8 \ 34 \ 21$$

$$\text{Longitudo poli septentr. solis} = 11^{\circ} 17' 51' 49''.2$$

Quoniam ex m. et s. $y = \begin{cases} 7^{\circ} 15' 11''.7 \\ 7 \ 15 \ 11.7 \end{cases}$ angulus, sub quo Aequator Solis
 eclipticam facit.

Tres conijunctae observationes igitur sufficient ad solutionem huius proble-
matis; quoniam autem parvi errores observationum in aelarium, magnos erro-
res in geographia h. e. in ipsi aequatoris solaris et in tempore revolutionis
eis producant, majore numero observationum superflui debent esse deper-
titiones, ut minimis probabiles errores observationum. Si autem
luminatis plures observationes, quam revera sunt necessarias, ordinemus
plures aequationes, quarum occurrunt incognitis, et problema eradit plus quam
determinatum. Quia talia problema in astronomia saepe saepe
occurrunt, praecipua de resolutione problematum huius generis adferam.

Methodus, quam prius Astronomi adhibuerunt, resolvendi talis requi-
sitionis, quarum numerus superat numerum incognitorum, consistit in eo,
ut omnes aequationes datas combinentur tales se ad determinationem alicuius
incognitis, ut factor huius determinandi, quantitas lam magnus, ut fieri
possit, et e contrario factores omnium reliquarum lam parvi, ut fieri possit
evadant. Deinde minimis parvi errores, qui forsitan in determinatione
reliquarum incognitorum adhuc contenti sunt, ad determinationem huius
incognitis parvum expriment influxum; quia reliquarum factor est admodum
parvus, et factor incognitis quia diversus reliquarum est admodum magnus.
Ad obtinendum hanc combinationem, mutantur omnia signa omnium
aequationum ita, ut factor primus incognitis in omnibus aequationibus sta-
beat idem signum. Summa omnium hac ratione mutatarum aequa-
tionum dabit quaesitam combinationem. Hae ratione proceditur etiam
cum ceteris aequationibus, et ita habentur tot aequationes, quot
sunt incognitis, ex quibus deinde facile valores omnium incognitorum
derivari possunt.

Sint e. g. sequentes aequationes datas

$$0 = 3 - x + y - 2z$$

$$0 = 5 - 3x - 2y + 5z$$

$$0 = 21 - 4x - y - 1z$$

$$0 = 14 + x - 3y - 7z$$

Ad obtinendum aequationem pro x , in ultima aequatione cum tantis
signis, et deinde summa omnium aequationum

$$0 = 15 - 9x + y + 2z$$

Eadem ratione pro y

$$0 = 37 - 5x - 7y$$

et tandem pro z

$$0 = 33 - x - y - 14z$$

eliminando ex his tribus aequationibus x, y, z erit $x = 2.486, y = 3.517$
 $z = 1.928$ et hi valores assumuntur pro maxime probabilibus quan-
 titatibus x, y, z . Hi valores autem dantur leguntur errores
 procedentium aequationum:

pro prima 0.145 loco 0
 pro secunda 0.148
 pro tertia — 0.143
 pro quarta 0.151

• Similiter temporibus ex cogitantur et hinc omnia per exactam methodum
 resolvendi hoc problema, de qua notabiliter asseram.

Sint plures datae aequationes formae

$$\begin{aligned} \Delta &= m + ax + by + cz + \dots \\ \Delta' &= m' + a'x + b'y + c'z + \dots \\ \Delta'' &= m'' + a''x + b''y + c''z + \dots \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (A)$$

in quibus numerus incognitarum x, y, z, \dots minor est, quam numerus aequatio-
 num. Determinandi sunt maxime probabiles valores harum incognitarum
 si res est v. c. longitudo penduli quod in uno minuto secundo unam suam revo-
 lutionem, pro latitudine geographica φ

440.39 — 1.28 log 2 φ (in Paris)

Quia autem si duo numeri adhuc aliquam incertitudinem continere possunt,
 assumere possumus $440.39 = x$ $1.28 = y$ $\log 2 = b$ et hinc
 est pro qualibet latitudine calculata longitudo penduli $m' = x - by$.
 Si autem in eodem loco observata longitudo est m , debet esse $m - m' = 0$,
 si x et y accurate sunt assumptae h. e. debet esse

$$0 = m - x + by.$$

Si autem praesuppositi valores quantitates x, y vel ipsa observatio
 erroribus sunt afflicti, dein haec ultima aequatio non accurate locum
 habebit, sed obtinebitur aequatio formae $\Delta = m - x + by$ et qualibet alia
 observatio dabit similem aequationem $\Delta' = m' - x + by$, ex quibus omnibus
 aequationibus dein valores maxime probabiles quantitates x, y derivari
 debent.

Positis igitur ^{pro expressione} praestitis observationum aequationum $m + ax + by + cz + \dots$
 per calculum inveniendum esse valorem V per observationem autem M ,
 dein est $\Delta = V - M$ error huius aequationis. Eadem ratione obtinebuntur
 pro errore secundae aequationis $\Delta' = V' - M'$ pro tertia $\Delta'' = V'' - M''$ etc.

Supponamus primo, non verum statum fuisse in omnibus observationibus, ut nulla ratio defuit, ut aliam alia minus exaltandam esse suspicemus, sive, ut errores acque magnos in singulis pro acque probabilibus habere oporteat. Probabilitas itaq. cuiuslibet errori Δ tribuenda, exprimitur per functionem ipsius Δ , quam per $Q\Delta$ denotabimus. Jam etiam si hanc functionem pro, ipse assignare non liceat, saltem affirmare possumus, ejus valorum fieri debere maximum pro $\Delta=0$, plerumque aequaliter esse pro valoribus aequalibus oppositis ipsius Δ , denique evanescere, si pro Δ accipiatas ~~maximus~~ ^{error} maximus vel majores valores. Porro probabilitas, errorem jacere inter limites Δ et $\Delta+d\Delta$ differentia infinitae parva $d\Delta$ ab invicem distantes, exprimenda erit per $\int_{\Delta}^{\Delta+d\Delta} Q\Delta d\Delta$, prout generaliter probabilitas, errorem jacere inter Δ et Δ' exprimitur per integrale $\int_{\Delta}^{\Delta'} Q\Delta d\Delta$ a $\Delta=D$ usq. ad $\Delta=D'$ extenditur. Hoc integrale a valore maximo negativo ipsius Δ usq. ad valorum maximum per, Δ terminum sive generaliter a $\Delta=-\infty$ usque ad $\Delta=+\infty$ sumendum necesse, rio fieri debet $=1$.

Supponamus igitur systema aliquod determinatum valorum quantitatuum x, y, z locum habere, probabilis pro V ex observatione predictarum esse valorum M , exprimentur per $Q(M-V)$ substitutis in V pro x, y, z etc. valoribus suis; prout $Q(M-V')$, $Q(M-V'')$ etc. exprimentur probabilis, tatis, ex observationibus resultantes esse functionum V', V'' etc. valores M', M'' etc. Quamobrem quandoquidem observationes tanquam evenlus ab invicem independentes spectare licet, procedendum

$$Q(M-V), Q(M-V'), Q(M-V'') = W$$

exprimit expectationem seu probabilitatem, omnes ipsas valores, sive ex observationibus predictas esse.

Maxime probabilis valor quantitatuum x, y, z etc. haec valores harum quantitatuum, qui errores $\Delta, \Delta', \Delta''$ etc. revera produciunt, natura illis erunt ii, pro quibus probabilitas, illos errores revera locum habere, evadit Maximum, h. e. pro quibus quantitas W ipsa est Maximum. Quam autem quantitas W sit functio quantitatuum x, y, z etc., maxime probabilis valores quantitatuum x, y, z in aequationibus $(\frac{dW}{dx})=0, (\frac{dW}{dy})=0, (\frac{dW}{dz})=0$ etc. erant continui. Ad resolvendas has aequationes primo functio $Q\Delta$ debet esse nota.

$$\text{Sic } \frac{dQ\Delta}{d\Delta} = Q'\Delta \cdot d\Delta \text{ quod dicitur } Q'\Delta.$$

Si genere

Si generatum aliquam quantitas ex pluribus aequae basis observationibus er-
cunda est, sic dictum medium arithmeticum ex summa ^{plurimorum} huiusmodi observatio-
nis maxime probabilium velorem pro hac quantitate habet.

Ex assumptione huiusmodi axiomatica sequitur: $V = V' = V'' = \dots = \psi$ et
si μ est numerus observationum et $\psi = \frac{1}{\mu} (M + M' + M'' + \dots)$

$$0 = \phi'(M - \psi) + \phi'(M' - \psi) + \phi'(M'' - \psi) + \dots$$

Si deinceps proleca supponimus $M = M' = M'' = \dots = M - \mu N$ erit gene-
raliter i.e. pro quovis valore integro positivo ipsius μ , $\psi = M - (\mu - 1)N$
per quod erit prior aequatio

$$0 = \phi'(M - M + (\mu - 1)N) + \phi'(M - \mu N - M + (\mu - 1)N) +$$

$$+ \phi'(M - \mu N - M + (\mu - 1)N) + \dots$$

vel

$$0 = \phi'(\mu - 1)N + \phi'(-N) + \phi'(-N) + \phi'(-N) + \dots$$

i.e. $0 = \phi'(\mu - 1)N + (\mu - 1)\phi'(-N)$

At ex hac aequatione sequitur, quantitas $\phi'(\Delta)$ est comparata ut habet
amur $0 = \phi'(\Delta) + \phi'(\Delta)$, $0 = \phi'(2\Delta) + 2\phi'(-\Delta)$, $0 = \phi'(3\Delta) + 3\phi'(-\Delta)$ etc

ex quo sequitur, $\phi'(\Delta)$ esse aequalem producto aliquius quantitate con-
stantis K in quantitatem Δ , vel $\phi'(\Delta) = K\Delta$.

Prout autem erat $\phi'\Delta = \frac{d\phi\Delta}{d\Delta}$ hinc est

$$\frac{d\phi\Delta}{d\Delta} = K\Delta \text{ vel } \log \phi\Delta = \frac{1}{2}K\Delta^2 + \log K \quad (\text{const})$$

ubi K designat constantem integrationis. Si designatur per e ^{basis} \log ^{flaga}
arithmetica huiusmodi coram, vel \log naturalis $e = 1$ erit

$$\phi\Delta = K \cdot e^{\frac{1}{2}K\Delta^2}$$

Ut autem ψ revera evadat Maximum, quantitas K debet esse nega-
tiva, hinc poni potest $\frac{1}{2}K = -h^2$ et erit

$$\int \phi\Delta \cdot d\Delta = \frac{K}{h^2} e^{-\frac{1}{2}h^2\Delta^2}$$

Ad determinationem quantitate K , notari debet secundum priora

$\int \phi\Delta d\Delta$ a $\Delta = -\infty$ usque ad $\Delta = +\infty$, esse aequale unitati, et integra-
le $\int e^{-\frac{1}{2}h^2\Delta^2} d\Delta$ etiam a $\Delta = -\infty$ ad $\Delta = +\infty$ esse aequale secundum

Laplace $\frac{\sqrt{\pi}}{h}$ ubi π designat semiperipheriam ^{circuli} cuius radius est
unitas. Ex hoc sequitur $K = \frac{h^2}{\pi}$, hinc est prior aequatio

$$\phi\Delta = \frac{h^2}{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}h^2\Delta^2}$$

Prout data expressio pro ψ hinc in sequendum transibit

$$W = \left(\frac{A}{V_n}\right)^n e^{-h(A^2 + A'^2 + A''^2 + \dots)}$$

Sponte patet, ut hoc prodeum W fiat maximum, $A^2 + A'^2 + A''^2 + \dots$ mini-
mum fieri debere.

Systema itaq; maxime probabile, valorum incognitorum x, y, z, \dots id erit,
in quo quadrata differentiarum inter functionum V, V', V'' etc. valoris, o. b.,
probatos et constitutos, summam minimum efficiunt, si quidem in omni-
bus observationibus eam præcisionis gradus præsumendus est.

Hæc principium quod in omnibus applicationibus Mathematicis ad
philosophiam naturalem usum frequentissimum offert, ubiq; axiomatis
toto eodem jure valere debet, quo minimum Arithmetice summa in les plures va-
lores observatos ejusdem quantitatis singulorum valor maxime probabilis
adestatur.

Si igitur functionum priora differentia hujus valoris W respectu quan-
tatis x æquales ponitur zero, habebimus $\left(\frac{dW}{dx}\right) = 0$ seu $A\left(\frac{dA}{dx}\right) + A'\left(\frac{dA'}{dx}\right) + A''\left(\frac{dA''}{dx}\right) + \dots = 0$

et quoniam $\left(\frac{dA}{dx}\right) = \alpha$, $\left(\frac{dA'}{dx}\right) = \alpha'$, $\left(\frac{dA''}{dx}\right) = \alpha''$ etc. sit, hæc æquatio etiam
erit $A\alpha + A'\alpha' + A''\alpha'' + \dots = 0$ ----- (1)

Eadem ratione dat $\left(\frac{dW}{dy}\right) = 0$.

$$Ab + A'b' + A''b'' + \dots = 0$$
 ----- (2)

et $\left(\frac{dW}{dz}\right) = 0$

$$Ac + A'c' + A''c'' + \dots = 0$$
 ----- (3)

etc.
et quoniam habemus æquationum (1), (2), (3) ... etc. quot incognitæ x, y, z, \dots
sunt, hæc ultime per eliminationem & his æquationibus determi-
nantes, et quantitates hæc ratione obtinens, erunt valoris maxime pro-
babilis harum quantitatum, quia illæ pro summa quadratorum errorum
 A, A', A'' etc. dant Minimum.

Si brevitas causa precor

$$Jam = am + am' + am'' + \dots etc$$

$$Ja^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots etc$$

$$Jab = ab + ab' + ab'' + \dots etc$$

etc.

aequationibus (1), (2), (3) ... etiam sequentem formam dare possumus.

$$\begin{aligned} 0 &= sam + x'faa' + yfab + zfac + \dots \\ 0 &= sbm + x'sba + y'sbb' + z'sbc + \dots \\ 0 &= scm + x'sca + y'scb + z'scc' + \dots \end{aligned} \quad \dots (B)$$

et ex his cum quibuslibet valores maxime probabiles per eliminationem derivantur.

Pro nostro exemplo est $m=3$, $a=-1$, $b=1$, $c=-2$.
hinc $sam = -88$, $faa' = 24$, $fab = 6$, $fac = 0$ etc.

ergo erunt aequationes (B)

$$\begin{aligned} 0 &= -88 + 24x + 6y \\ 0 &= -70 + 6x - 18y + z \\ 0 &= 10x + y + 84z \end{aligned}$$

ex quibus invenitur $x = 2.420$, $y = 2.551$, $z = 1.916$.

Ceterum principium, quod quadrata differentiarum inter quantitates observatas et computatas summam quam minimam producere debeant, etiam independenter a calculo probabilitatis sequenti modo considerari poterit. Quoties multitudine incognitarum multitudine quantitate observatarum independentium aequatis est, illis ita determinari licet ut his exacte satisfiat. Quoties autem multitudes illa haec minor est, consensus absolute exactus obtineri nequit quatenus observationes precipue absolute non gaudent. In hoc itaque casu operam dare oportet, ut consensus quam optimus haberi possit, sive sit differentia, quantum fieri potest eximatur. Atque vero notio natura sua aliquando vagi involvit. Etiam si omnino ex data valorum pro incoincidentis quae omnes differentias respective minores reddat, quam alias pro ut dubio huius praeserendum sit, nihilominus etiam casus systemate, quorum alterum in aliis observationibus consensum meliorem offert, alterum in aliis arbitrio nostro quovis modo reliquitur, manifeste, flag innumera principia diversa proponi possunt, per quae consensio prior complatur. Designando differentias inter observationes et calculum per Δ , Δ' , Δ'' etc. conditioni priori non magis sufficit, si $\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \dots$ sit minimum, sed etiam si $\Delta^4 + \Delta'^4 + \Delta''^4 + \dots$ etc. vel $\Delta^6 + \Delta'^6 + \Delta''^6 + \dots$ vel generaliter summa potestatum expro-

sponens capereque parvis in minimum abit, sed ex omnibus
 principis primatum simplicissimum est, dum reliquis ad calculos com-
 plicatissimos deferremus. Ceterum hoc principium et a celeb. Legendre
 in opere "Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des
 comètes" Paris 1805, prolatus est et a milo. Gauss. in opere
 "Theoria motus corporum celestium. Illust. Laplace ad
 solutionem aequationum linearium quarum multitudo major est
 quam multitudo quantitarum incognitarum, principio et hoc utitur qua-
 olim jam a celeb. Boscovich propositum erat scilicet ut differe-
 ntia ipsa sed omnes positive singulae summam minimum efficiant.
 Facile ostendi potest, systema valorum incognitarum, quod ex hoc solo prin-
 cipio erutum sit, necessario, casibus specialibus exceptis, ubi solutio
 quodammodo indeterminata manet, hanc aequationibus et propositarum
 numero exacte satisfacere debere, quod sint incognitae, ita ut reliquae
 aequationes saltem tantum in considerationem veniant, quatenus ad
 solutionem decidendam conservant. itaq. e.g. aequatio $V = M$ est et eorum
 numero, quibus non satisficit systema valorum simulatum illud principium
 inventorum nihil mutaretur etiam si loco ipsius M valor quicumque alius
 N observatus esset, si modo designatus per n valorum compilationem, differe-
 ntia $M - n$ et $N - n$ eodem signo affecta sint. Ceterum illud, si quidem
 principium istud per adjunctionem conditionis novae quodammodo temperat.
 postulatur scilicet, ut summa differentiarum ipsa, quae non tantalis, fiat
 aequalis 0 (res) tunc efficietur, ut multitudo aequationum exacte repre-
 sentatarum unitate minor fiat quam multitudo quantitarum inco-
 gnitarum, verum tamen quod ante observavimus etiamnum locum
 habebit, siquidem duae saltem incognitae affuerint.

Adhuc hic quoque breviter aliqua problemata, quae huc pertinent.
 Datus est alicuius numerus punctorum, quod tandem est aliud pun-
 tum tale, ut summa quadratorum differentiarum hujus puncti a ceteris
 datis punctis sit aequalis quadrato 2^o dato.

Sicut α, β . Coordonatae primi dati puncti, α', β' secundae, α'', β'' tertiae etc.
 α, γ , quales puncti, dicitur erit pro quadratis linearum quae punctum
 quod situm utrum primo, secundo, tertio etc. puncto conjugant

$$\begin{aligned}
 &(\alpha - \alpha')^2 + (\gamma - \beta')^2 \\
 &(\alpha - \alpha'')^2 + (\gamma - \beta'')^2 \\
 &(\alpha - \alpha''')^2 + (\gamma - \beta''')^2 \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

Si haec quadrata addantur, et brevis talis causa ponatur

$$\sum \alpha = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots$$

$$\sum \beta = \beta + \beta' + \beta'' + \dots$$

$$\sum \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots$$

$$\sum \beta^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \dots$$

habebitur, si n est numerus punctorum datorum.

$$x^2 + y^2 = \frac{2x}{n} \cdot \sum \alpha - \frac{2y}{n} \cdot \sum \beta = \frac{2^2}{n} \cdot \sum \alpha^2 - \frac{2^2}{n} \cdot \sum \beta^2 \quad (\text{haec aequatio est}$$

aequatio pro circulo.) ex quo sequitur, in finitis multis punctis
satisfacere problemati, quia hoc problema est indeterminatum, et
omnia haec puncta facere in peripheria alicujus circuli. Sit ni-
mum A, B coordinatae centri circuli, cujus radius est R . datus est
aequatio circuli $\frac{1}{2} \cdot (x-A)^2 + (y-B)^2 = R^2$ vel $x^2 + y^2 - 2x \cdot A - 2y \cdot B = R^2 - A^2 - B^2$
si comparatur nunc haec expressio cum procedenti aequatione, pro
circulo, inveniantur, cujus peripheria omnia nostra puncta continet,
coordinatae centri $A = \frac{1}{n} \cdot \sum \alpha$, $B = \frac{1}{n} \cdot \sum \beta$ et radius

$$R = \frac{1}{n} \sqrt{n(2^2 \cdot \sum \alpha^2 - \sum \beta^2) + (\sum \alpha)^2 + (\sum \beta)^2}.$$

Sed in hoc proble-
mate tantummodo duas coordinatas pro quolibet puncto assumptas
sunt, si autem illa puncta assumuntur non in recta, sed in spe-
cie, accedere debent quoque tertiae coordinatae z, z', z'' et solutio erit
priori similis; habebimus nimirum pro quolibet puncto

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2x}{n} \cdot \sum \alpha - \frac{2y}{n} \cdot \sum \beta - \frac{2z}{n} \cdot \sum \gamma = \frac{2^2}{n} \cdot \sum \alpha^2 - \frac{2^2}{n} \cdot \sum \beta^2 - \frac{2^2}{n} \cdot \sum \gamma^2$$

quae expressio est aequatio sphaerae, ex quo sequitur omnia puncta
jacere in superficie alicujus sphaerae. Sit R radius sphaerae, et
 A, B, C coordinatae centri ubi x, y, z coordinatae alicujus puncti super-
ficii sphaerae, datus est $R^2 = (x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2$ aequatio
sphaerae. — si cum hac aequatione comparatur prior expressio in-
veniantur coordinatae centri quae sit sphaerae

$$A = \frac{1}{n} \cdot \sum \alpha, \quad B = \frac{1}{n} \cdot \sum \beta, \quad C = \frac{1}{n} \cdot \sum \gamma$$

$$\text{et radius } R = \frac{1}{n} \sqrt{n(2^2 \cdot \sum \alpha^2 - \sum \beta^2 - \sum \gamma^2) + (\sum \alpha)^2 + (\sum \beta)^2 + (\sum \gamma)^2}$$

Quoniam quantitas R semper ita determinari potest ut radius R illius
sphaerae datorum valorum acquirat, puncta quaedam eorum omni num-
erum, quae data puncta cum aliquo puncto peripheriae

habet

sphaera conjungunt, quae ex centro in ventis, cum radiis ad libellam assem-
to descripta est, semper ejusdem erit magnitudinis.

Si ergo ad determinationem situs aliquis puncti in spatio per obser-
vationes, per primam observationem coordinatis α, β, γ , possemus nosse.

α', β', γ' per tertiam $\alpha'', \beta'', \gamma''$ inveniuntur, ubi omnes hae quantita-
tes certis erroribus observationum subjectae sunt, et via sumitur,
veras sed ignotas coordinatas hujus puncti esse x, y, z , distantia
puncti, cujus coordinatis sunt α, β, γ , a vero puncto x, y, z , per error
primae observationis, considerari potest, quae distantia est

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}, \dots \text{Eodem modo erit distantia puncti } \alpha', \beta', \gamma'$$

$$\text{a puncto } x, y, z, \text{ vel error secundae observationis } \sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2}$$

$$\text{et error tertiae observationis } \sqrt{(x-\alpha'')^2 + (y-\beta'')^2 + (z-\gamma'')^2}$$

Assumamus nunc, summam quadratorum omnium horum errorum, quam
designare volumus per U vel expressionem

$$U = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 + (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2 + (x-\alpha'')^2 + (y-\beta'')^2 + (z-\gamma'')^2 \text{ etc.}$$

$$\text{Minimum, dicitur est } \left(\frac{dU}{dx}\right) = 0 \quad \left(\frac{dU}{dy}\right) = 0 \quad \left(\frac{dU}{dz}\right) = 0$$

et revera idem ducitur ista differentialia, minimum dat

$$(x-\alpha) + (x-\alpha') + (x-\alpha'') + \dots = 0 \text{ vel } x = \frac{1}{n} \sum \alpha$$

eodem modo pro ceteris

$$y = \frac{1}{n} \sum \beta$$

$$z = \frac{1}{n} \sum \gamma$$

quae quantitates, sunt iidem valores qui superius pro coordinatis
centri A, B, C , sphaerae inventi sunt.

Si valores quantitates x, y, z sunt autem sic dicta media arithme-
tica omnium per observationes datarum coordinatarum, v. c.

$$\frac{1}{n} \sum \alpha = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots}{n} \text{ ut notum est, media arithmetica revera ge-}$$

neraliter esse maxime probabiles valores observationum. Inveniun-
tur igitur maxime probabiles valores quantitates, quae sunt datae.
per plures aequae bonae observationes, si summa quadratorum cujus-
libet erroris observationis, est Minimum.

Omnia priora continent fundamenta methodi minimorum quadratorum.

celeb. Gauss. (Vide Theoriae motus corporum coelestium p. 206. Monthly Correspondence Vol XXV. K. H. Schrift für Astronomie I Vol. p. 185. Laplace Theorie analytique des probab. Götting. gelehrte Anzeiger Jahr 1824 etc.)

Prius enim cum methodus tantummodo ad tales aequationes est applicabilis in quibus quantitates x, y, z etc. in prima potentia occurrunt, sed facile etiam extendi potest ad tales aequationes, in quibus x, y, z, \dots alii quosdam exponentes habent. Sint, nimirum X, Y, Z, \dots approximati valores quantitatibus x, y, z, \dots qui jam per aliam methodum, v. c. illam quae prius in usu erat, inventi sunt, dein pro incognitis x, y, z, \dots in duabus aequationibus (A) valores $x = X + \xi, y = Y + \nu, z = Z + \zeta$ substituuntur, et quoniam quantitates x, y, z jam notae, et incognitae ξ, ν, ζ admodum parvae sint, quadrata aliorumque potentiarum ultimarum negligi, et hae relationes quae sitis aequationes inter ξ, ν, ζ, \dots inveniri possunt, quae dantur incognitas ipsas ξ, ν, ζ, \dots

Ac cum Methodus supponit, uti jam prius dictum est probabilitatem, omnes observationes esse aequae bonas. Si autem observationes sunt ipsae inter se sunt diversi valoris, et si est v. c. eorum valor h, h', h'', \dots dein hoc idem est, ac si per observationes aequae bonae inventi essent errores $h\Delta, h'\Delta', h''\Delta'', \dots$ hinc valores quantitatibus incognitarum determinabuntur ex suppositione $h\Delta + h'\Delta' + h''\Delta'' + \dots$ esse Minimum.

Si v. c. in nostro exemplo valor, seu principis secundae observationis esset duplo maior, quam ille primae observationis, pro

$$0 = 5 - 3x - 2y + 8z \text{ poni deberet}$$

$$0 = 10 - 6x - 4y + 16z \text{ et ita cum ceteris}$$

generatim quantitas si spectari potest qua mensura praecisionis acribitur observationi. Si nimirum probabilitas erroris Δ in aliqua praecisione observationum, uti prius, est $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2}$ dein est probabilitas in aliqua alia serie observationum $\frac{h'}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h'^2 \Delta'^2}$ et probabilitas, errorem pro una priorum observationum jacere inter $-\delta$ et $+\delta$ erit

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta$$

et probabilitas, errorem alicujus observationis in secunda serie, jacere inter $-\delta'$ et $+\delta'$ est

$$\int_{-\delta'}^{+\delta'} \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h'^2 \Delta'^2} d\Delta'$$

primum integrale sumitur a $\Delta = -\delta$ usque ad $+\delta$, secundum a $\Delta = -\delta'$ usque

usque ad Δ'' . Haec integralia autem erunt aequata, si $h\Delta = h'\Delta''$. —
 Si ergo v.c. $h = 2h$, in secunda serie tam faciliter duplex, uti in
 prima serie simplex error committi potest, vel, uti hoc potest exprimi,
 observationes primae serie habeant dupplicem valorem, duplex pondus,
 observationum secundae serie.

Valores quantitatum x, y, z hac ratione inventi quoque inter se habe-
 bunt diversum gradum precisionis, diversum gradum probabilitatis,
 vel aliis verbis, quodlibet quantitas non aequaliter exacte erit deter-
 minata. Cuius autem occurrit casus, ut cuperemus scire gradum
 probabilitatis pro qualibet observatione, facile erimus convicti
 secundum primam de sequentibus.

Si querantur ex aequationibus (I) aliquae quantitates

$$\left. \begin{aligned} X &= \int a\Delta = a\Delta + a'\Delta' + a''\Delta'' + \text{etc} \\ Y &= \int b\Delta = b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + \text{etc} \\ Z &= \int c\Delta = c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + \text{etc} \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

Dein quaelibet harum aequationum (I) erit functio quantitatum x, y, z ...
 et quum harum aequationum tot sint, quot incognitae, facile ex eis per
 eliminationem valores quantitatum x, y, z ... in X, Y, Z queri
 poterunt per quod obtineantur aliae aequationes sequentis formae:

$$\left. \begin{aligned} x &= L + A'X + B'Y + C'Z + \text{etc} \\ y &= L' + A''X + B''Y + C''Z + \text{etc} \\ z &= L'' + A'''X + B'''Y + C'''Z + \text{etc} \end{aligned} \right\} \dots (II)$$

De duabus his aequationibus (III), sunt uti prius, maxime probabiles
 valores quantitatum x, y, z ... $x = L, y = L', z = L''$
 et gradus neque sive probabilitatis horum altimosum valorum
 quantitatum x, y, z ... posita probabilitate observationum aequa-
 li unitati, pro $x = \frac{1}{\sqrt{A}}, y = \frac{1}{\sqrt{B}}, z = \frac{1}{\sqrt{C}}$

In nostro exemplo $q=1 \quad a'=3 \quad a''=4 \quad a'''=1$
 hinc $b=1 \quad b'=2 \quad \text{etc}$

$$\left. \begin{aligned} a\Delta &= -3 + x - y + 2z \\ a'\Delta' &= -84 + 16x + 4y + 16z \\ a''\Delta'' &= 114 + x - 3y - 3z \end{aligned} \right\}$$

ex quo sequitur:
$$\left. \begin{aligned} X &= -88 + 2x + 6y \\ Y &= -70 + 6x + 18y + Z \\ Z &= -10x + y + 54Z \end{aligned} \right\} \text{--- I}$$

Ex his aequationibus invenitur per eliminationem

$$x = \frac{49154 + 809X - 324Y + 6Z}{19899}$$

$$y = \frac{2617 - 12X + 54Y - Z}{737}$$

$$Z = \frac{12707 + 2X - 9Y + 123Z}{6633}$$

Atque sunt maxime probabiles valores quantitatuum x, y, Z , uti prius

$$x = \frac{49154}{19899} = 2.470$$

$$y = \frac{2617}{737} = 3.551$$

$$Z = \frac{12707}{6633} = 1.916$$

et gradus probabilitatis harum determinationum, illa observationum
propterea = 1, pro x $\sqrt{\frac{19899}{809}} = 4.96 = \xi$

$$y \quad \sqrt{\frac{737}{54}} = 3.69 = v$$

$$Z \quad \sqrt{\frac{6633}{123}} = 7.34 = \zeta$$

Item ξ est quoniam maxime accurate determinatum, deinde v et ζ ,
deinde y .

Est nunc $\psi\Delta = \frac{\int 2e^{-\Delta^2} d\Delta}{\sqrt{\pi}}$ (hoc integrale a $\Delta=0$ sumptum)

Si Δ reputa unitatis non est admodum magnus, dicitur sequens sim-
plex series:

$$\psi\Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\Delta - \frac{1}{3}\Delta^3 + \frac{1}{9}\Delta^5 - \frac{1}{9}\Delta^7 + \dots \right)$$

Ex hac expressione facile invenitur $\psi\Delta = \frac{1}{2}$ si est $\Delta = 0.476936$; eadem ratione
invenitur $\psi\Delta' = 6.8427$ pro $\Delta' = 1 = 2.0967\Delta$

$$\psi\Delta'' = 0.9960 \text{ pro } \Delta'' = 1.82139 = 3.81893\Delta \text{ etc}$$

ita ut $\psi\Delta$ cum Δ crescat.

Prius autem vidimus, probabilitatem, errorem aliquis observationis jacere
inter limites D et D' , expressam esse per $\int \psi\Delta d\Delta = \int \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\Delta^2} d\Delta$, sumpto
hoc integrale a $\Delta=D$ usque ad $\Delta=D'$, hinc duplo majus est, quam integrale sumptum
a $\Delta=0$ usque ad $\Delta=D'$, hoc e. probabilitas, errorem observationis jacere inter 0 et Δ
erit $\psi\Delta$.

Sic est v. c. probabilitas, errorem non esse infra $\Delta = \frac{0.476936}{h}$ aequalis $\frac{1}{2}$
vel hac probabilitas simul est probabilitas contrarii. Nominemus hinc

hanc quantitatem $A = \frac{1}{N} = \frac{0.476963}{N}$ errorum probabilem.

Assumamus nunc, errores commissos esse in singulis observationibus, quarum numerus sit N , $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ et inquiramus, quid ex hac conclusi possit respectu valorum quantitatum h et A . Facile inveniri potest, probabilitatem maxime, libet valoris quantitatis h proportionalem esse sequenti expressioni

$$Z = h^N \cdot e^{-h^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)} \quad (\text{ex prioribus, nimirum ex aequatione } W = \dots)$$

Hinc quoque maxime probabilis valor quantitatis h ille erit, pro quo hanc quantitas Z evadit Maximum.

Differentiando hanc expressionem respectu h et Z , et ponendo dein $dZ=0$, erit $Nh^{N-1} - 2h^{N-1}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots) = 0$ vel $N - 2h^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots) = 0$, vel

$$h = \sqrt{\frac{N}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)}} \quad \text{hinc est maxime probabilis valor quantitatis}$$

A seu maxime probabilis error $A = \frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)} =$

$$= 0.6744897 \sqrt{\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)}{N}}$$

Designemus nunc inventum maxime probabilem valorem h seu $\sqrt{\frac{N}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)}}$ per A et volumus probabilitatem, A esse verum valorem quantitatis h , se habere ad probabilitatem, verum valorem esse $A+d$, ubi

$$1: e^{-\frac{N}{2A^2}} : (A+d)^N \cdot e^{-\frac{N}{2(A+d)^2}} \quad \text{seu ubi}$$

$$1: e^{-\frac{N}{2A^2} (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{A} + \frac{1}{4} \cdot \frac{d^2}{A^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3}{A^3} + \dots)}$$

Secundum membrum hunc respectu primi erit sensibile, si $\frac{d}{A}$ est fractio parva; hinc possumus loco adductae rationis ponere $1: e^{-\frac{Nd}{A}}$ hoc si, quifcat proprie, probabilitatem, valorem verum valorem quantitatis h , jacere inter limites $A-d$ et $A+d$, esse approximative $= K e^{-\frac{Nd}{A}}$ ubi K est quantitas constans, quae ita determinari debet, ut integrale $\int_{A-d}^{A+d} e^{-\frac{Nd}{A}} dA$ inter limites quantitatis A sumatur, evadat aequali unitati. Loco horum limitum, hic, ubi propter quantitatem N quantitas $e^{-\frac{Nd}{A}}$ evadit insensibilis, quando $\frac{d}{A}$ definit esse parva fractio, solum est, assumere limitum $-\infty$ et $+\infty$ ex quo oritur $K = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{N}{2}}$. — Hinc est probabilitas, verum valorem quantitatis h jacere inter $A-d$ et $A+d$, $= \sqrt{\frac{2}{N}}$ ergo est hanc probabilitas aequalis $\frac{1}{2}$, si $\frac{1}{\sqrt{N}} = A = 0.476963$ est vel si $A = \frac{1}{\sqrt{N}}$. — Hinc annuo contra unum, ponere possumus, verum valorem quantitatis h jacere inter limites $A(1 - \frac{1}{\sqrt{N}})$ et $A(1 + \frac{1}{\sqrt{N}})$, ergo quoque verum

valores

valorem quantitatis A inter limites $A(1 - \frac{\Delta}{\sqrt{N}})$ et $A(1 + \frac{\Delta}{\sqrt{N}})$ vel approximative etiam ponere possumus $A(1 - \frac{\Delta}{\sqrt{N}})$ et $A(1 + \frac{\Delta}{\sqrt{N}})$. — Si denique, talis causa ponitur $S = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots$, $B = 0.4769368 \cdot \frac{A}{\sqrt{N}}$ denique est maxime probabilis valor erroris ejusque observacionis

$$\epsilon = 0.67449 \sqrt{\frac{S}{N}} \quad \text{--- (I)}$$

et probabilis limitis hujus erroris observacionis

$$A \pm B = A(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}) \quad \text{--- (II)}$$

(Quantitas B nunciat aliud est quam incertitudo quantitatis A)

Exempl. Pro altitudine poli perculis astronomicis Baden calib. Altrou invenit sequentia resultata

$47^\circ 29'$	11.5
	12.2
	12.8
	11.2
	11.8
	12.3
	11.5
	11.9
	12.4
	12.5

Media $47^\circ 29' 12.0$

Sua errors $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ejuslibet observationis a summa propius differuntur a, ejuslibet observationis ab isto modo. Sic est

$$\text{pro prima } \alpha = 12.0 - 11.5 = (0.5)$$

$$\text{pro secunda } \beta = 12.0 - 12.2 = (-0.2) \text{ etc}$$

hinc $S = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots = 2.42$, $N = 10$ et hinc error probabilis ejuslibet observationis $A = 0.67449 \sqrt{\frac{2.42}{10}} = 0.33$

probabilis incertitudo quantitatis A hinc $B = 0.47694 \sqrt{\frac{A}{10}} = 0.04977$

et hinc probabilis error resultatis finalis $47^\circ 29' 12.00$ aequalis

$$\frac{A}{\sqrt{N}} = \frac{0.33}{\sqrt{10}} = 0.104$$

et generatim est error unius observationis f et F error resultati p observationum, vel si g est precisio unius observationis et G precisio resultati p observationum, denique est

$$F = \frac{f}{\sqrt{p}} \text{ et } G = g \cdot \sqrt{p}$$

Ad applicationem praedictarum ad aequationes formae

$$0 = m + ax + by$$

$$0 = m' + a'x + b'y$$

$$0 = m'' + a''x + b''y$$

etc

quae tamen modo unam continent incognitam, denique est proposita

omnes observationes esse ejusdem valoris, maxime probabilis valor quan-
titatis x seu $X = - \frac{\sum ma}{\sum a^2} = - \frac{(ma + m'a' + m''a'' + \dots)}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}$
et praecipio ξ huius ultimi valoris X quantitatis x , si praecipio immediata
observationis ponitur aequalis unitati, $\xi = \sqrt{\sum a^2} = \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}$ ubi
et maxime probabilis error huius valoris X est aequalis $\frac{0.67449 \sqrt{\sum a^2}}{\sum a^2}$
ubi S et X priorem significationem habent.

Si haberemus aequationes pro duobus incognitis. seu

$$\begin{aligned} 0 &= m + ax + by \\ 0 &= m' + a'x + b'y \\ 0 &= m'' + a''x + b''y \end{aligned}$$

ubi est maxime probabilis valor quantitatis x seu $X = - \frac{(\sum mab' - \sum mb'ba)}{(\sum a^2b' - \sum ba'ba)}$
et praecipio huius valoris quantitatis X est $\xi = \sqrt{\frac{\sum a^2b' - \sum ba'ba}{\sum a^2}}$
et praecipio huius valoris quantitatis y $\eta = - \frac{(\sum mb'a - \sum ma'ba)}{(\sum a^2b' - \sum ba'ba)}$
et praecipio huius valoris quantitatis y $\eta = \sqrt{\frac{\sum a^2b' - \sum ba'ba}{\sum a^2}}$

et si de aliis a, b , plures occurrunt incognitis.
Interca, ubi jam dictum est, clarum est, omnes has determinaciones eo magis
ad veritatem accedere, quoniam est numerus N observationum seu aequatio-
num. Si autem numerus harum observationum est secundum magnum,
simplificatus calculus, si istas aequationes distribuamus in classis, et
sancimus n. c. summas de eorum valoribus $\sum m, \sum a, \sum b$ et observationum quoniam, ubi
dum tribuitur valor 10. ubi

$$\begin{aligned} 0 &= m + ax && \text{medium ex } p \text{ observationibus} \\ 0 &= m' + a'x && p' \\ 0 &= m'' + a''x && p'' \end{aligned}$$

dum invenitur facile ad prius, maxime probabilis valor quantitatis
 x seu $X = - \frac{\sum map}{\sum a^2p}$ et praecipio huius determinaciones
 $\xi = \sqrt{\sum a^2p} = \sqrt{a^2p + a'^2p' + a''^2p'' + \dots}$

Eadem ratio est ex sequentibus aequationibus

$$\begin{aligned} 0 &= m + ax + by && \text{medium ex } p \text{ observationibus} \\ 0 &= m' + a'x + b'y && p' \\ 0 &= m'' + a''x + b''y && p'' \end{aligned}$$

maxime probabilis valor quantitatum x et y seu

$$X = - \frac{(smap/bp - subps/bap)}{(sap/bp - sbap/bap)}$$

$$Y = - \frac{(subps/sap - smap/sbp)}{(sap/sbp - sbap/sbap)}$$

et præcisio horum determinationum quantitates X et Y

$$X = \frac{Vsbp/bp - sbap/sbp}{sbap/sbp}$$

$$Y = \frac{Vsbp/sap - sbap/sap}{sbap/sap}$$

et sic porro pro similibus casibus.

Hæc rationes igitur corrigi possunt errores observationum qui a casu
dependunt, sed non constanter errores vel tales, qui omnibus obser-
vationibus communes sunt.

Secunda pars

De Planetis

Phaenomena generalia Planetarum

Planetae se distinguunt a stellis fixis, per suam maiorem tranquillitatem lucem, per suas dimensiones sensibiles et ante omnia per suum motum proprium.

Orbitae omnium Planetarum exceptis illis, qui temporibus suis, restrictis sunt directi, nunquam se extendunt ultra 8^o vel 9^o ab equatore terre, ita, ut planetae sint semper in zona quae vocatur ecliptica ex utraque parte in distantia 9^o et quae zona vocatur Zodiacus. Quamvis terra ipsa sit in motu, naturaliter motus apparentes Planetarum, vade differt ab illorum motu vero; quoniam autem iste motus modificatus per verum motum terre et Planetarum, per problema inversum, verus motus Planetarum inveniri potest, datis seu motu apparente et motu terre vero. Primo determinanda est dispositio orbitae generaliter, centrum verum quod facit concavitas orbis, et ordo successioneis qui locum habet inter plures orbitas, quae habent centrum aliquod commune. Et in hoc consistit sic dictum systema mundi.

Ubi quilibet facile sibi imaginari potest, est iste motus apparentis Planetarum, quoniam compositus ex motu vero terre et Planetarum, quoniam ultimus adhuc est ignotus, quoniam irregularis. Inter omnes Planetas, quos ad maximam partem suam orbitarum, progredientes ita ut terra vel sol a dextra sinistram versus, h. e. ab occidente orientem versus, et hoc est, quod nominant motum directum. Ille motus autem semper est semper retardatus, donec evadit nullus, et tunc vocantur Planetas stationarii. Post aliquot tempus directio huius dicti motus est priori opposita, vel motus est Retrogradus. Haec phaenomena singularia quae antiquiores nominant secundam inaequalitatem, reverunt semper in eodem ordine et

fini

sufficiunt, nos convincendi, terram non posse esse centrum eorum
orbitalium, nam difficile esset invenire alium punctum ubi eorum
motus apparerent magis irregularis. —

Atque phenomena sunt communia omnibus planetis, sed dantur quoque
alia, quae planetas inter se ita distinguunt, ut possimus eos dividere
in duas classes. Mercurius et Venus semper sunt in vicinia solis
vel in parte orientali vel occidentali, usque ad certos limites, qui
sunt horum planetarum maximae digressiones, quae digressiones
nequaquales sunt in qualibet revolutione, maxima digressio Mercurii
est variabilis a $17^{\circ} 26'$ ad $28^{\circ} 20'$, illa Venere a $44^{\circ} 52'$ ad
 $47^{\circ} 48'$. Post hanc digressionem appropinquant se ad solem, de
inde p[er]tinent illi in conjunctione, et in his conjunctionibus solent
sepius fieri, ut transire videantur inter solem et terram. Observan-
do hos planetas continuo in hac epocha, in qua appropinquantur soli,
dantur disparent, exacte determinari potest directio et celeritas planetarum
in hac epocha, et facile videri potest, a qua directio transeat per solem,
vel supra vel infra, h. e. an latitudo in conjunctione est plus vel
minus major quam semidiameter solis. Per istam, si directio transeat
per discum solare, celeritas observata serviet ad calculandum
tempus quando planeta d[er]ibit esse ante, vel post solem; et in
hac epocha videbuntur transitus planetarum infra discum solis et in
disco solis sub forma maculae nigrae ejusdem fere magnitudinis uti
erat mensuratus, et secundum directionem, et cum eadem celeritate,
quae erat calculata. Post aliquod tempus d[er]ivatum apparet
in prolongatione directionis praecedentis, continuans suum motum cum
eadem celeritate, quam habuit ante disparitionem, et quae dein certum
est, istam visam in disco solare maculam, fuisse ipsum planetam. —

Hi transitus Venere et Mercurii per discum solis, pro Astronomia sunt
maximi momenti; transitus Mercurii sepius locum habent, illi autem
Venere sunt admodum rari, ita ut in uno saeculo tantummodo duo
accidere solant, qui se sequuntur in octo annis. — Praecedentes obser-
vationes dant locum ad plures conclusiones notabiles:

- 1^a Isti planetae sunt corpora opaca, quae habent suum lucem a Sole. —
- 2^a Centrum eorum orbitalium non est terra sed Sol, et eorum orbites
sunt contentae inter illam terram et solem. —

82
 Deducitur formula $\lg Q = A \cos(C-K)$ ex aequationibus

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin Q \sin d + \cos Q \cos d \cos(p-k) \\ \sin h &= \sin Q \sin d' + \cos Q \cos d' \cos(p'-k) \end{aligned} \quad \dots (A)$$

Primum, si prima aequationum datarum subtrahatur a secunda, oritur aequatio sequens: $\lg Q = \frac{\cos d \cos(p-k) - \cos d' \cos(p'-k)}{\sin d - \sin d'}$

$$\begin{aligned} \text{Sed si nunc} \quad \cos(p-k) &= \cos p \cos k + \sin p \sin k = \frac{1}{2}(\cos(p+k) + \cos(p-k)) + \frac{1}{2}(\cos(p-k) - \cos(p+k)) \\ \cos(p'-k) &= \cos p' \cos k + \sin p' \sin k = \frac{1}{2}(\cos(p'+k) + \cos(p'-k)) + \frac{1}{2}(\cos(p'-k) - \cos(p'+k)) \end{aligned}$$

$$\text{ergo} \quad \cos d \cos(p-k) - \cos d' \cos(p'-k) = \frac{1}{2} \cos d \cos(p-k) + \frac{1}{2} \cos d \cos(p-k) - \frac{1}{2} \cos d' \cos(p'-k) - \frac{1}{2} \cos d' \cos(p'-k)$$

Secundum membrum hujus aequationis potest et ita scribi

$$\left\{ \frac{1}{2} \cos d \cos(p-k) - \frac{1}{2} \cos d' \cos(p'-k) \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \cos d' \cos(p'-k) - \frac{1}{2} \cos d \cos(p-k) \right\}$$

Si des permixti decomponentur in sequentes factores add. et subtrah. $\frac{1}{2} \cos d' \cos(p-k)$ et $\frac{1}{2} \cos d \cos(p'-k)$

$$(\cos d - \cos d') \left\{ \frac{1}{2} \cos(p-k) + \frac{1}{2} \cos(p'-k) \right\} - (\cos d + \cos d') \left\{ \frac{1}{2} \cos(p'-k) - \frac{1}{2} \cos(p-k) \right\}$$

$$\text{ergo} \quad \lg Q = \frac{(\cos d - \cos d') \left\{ \frac{1}{2} \cos(p-k) + \frac{1}{2} \cos(p'-k) \right\} - (\cos d + \cos d') \left\{ \frac{1}{2} \cos(p'-k) - \frac{1}{2} \cos(p-k) \right\}}{\sin d - \sin d'}$$

$$\text{nunc} \quad \cos d - \cos d' = 2 \sin \frac{d+d'}{2} \sin \frac{d-d'}{2}$$

$$\cos d + \cos d' = 2 \cos \frac{d+d'}{2} \cos \frac{d-d'}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos(p-k) + \cos(p'-k) &= 2 \cos \frac{p+p'-k}{2} \cos \frac{p-p'}{2} \\ -\cos(p'-k) + \cos(p-k) &= 2 \sin \frac{p+p'-k}{2} \sin \frac{p-p'}{2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dividendo ambo membra harum} \\ \text{et proprium per } 2, \text{ ex altera parte} \\ \text{evenit et prima erit } \frac{1}{2}(\cos(p-k) + \cos(p'-k)) \text{ etc.} \end{array} \right\}$$

$$\sin d - \sin d' = 2 \cos \frac{d+d'}{2} \sin \frac{d-d'}{2}$$

Propter haec valores in ultima aequatione erit

$$\lg Q = \frac{2 \sin \frac{d+d'}{2} \sin \frac{d-d'}{2} \cos \frac{p+p'-k}{2} \cos \frac{p-p'}{2} + 2 \cos \frac{d+d'}{2} \cos \frac{d-d'}{2} \sin \frac{p+p'-k}{2} \sin \frac{p-p'}{2}}{2 \cos \frac{d+d'}{2} \sin \frac{d-d'}{2}}$$

In numeratore et denominatore se tollit, et postea dividendo ambo den. minus fractionis per den. minorem, erit:

$$\lg \varphi = \lg \frac{A'}{2} \cos(p+\frac{p'}{2}-K) \cos(\frac{p-p'}{2}) + \lg \frac{A'}{2} \sin(p+\frac{p'}{2}-K) \sin(\frac{p-p'}{2}).$$

Propos. $A \sin B = \sin(p+\frac{p'}{2}) \lg \frac{A'}{2}$
 $A \cos B = \cos(p+\frac{p'}{2}) \lg \frac{A'}{2}$ --- (B)
 $C = p+\frac{p'}{2} - B$ erit.

$$p+\frac{p'}{2} = B+C \text{ ergo et } p+\frac{p'}{2}-K = B+(C-K)$$

itaq $\sin(p+\frac{p'}{2}-K) = \sin(B+(C-K)) = \sin B \cos(C-K) + \cos B \sin(C-K)$
 $\cos(p+\frac{p'}{2}-K) = \cos(B+(C-K)) = \cos B \cos(C-K) - \sin B \sin(C-K)$

ponendo hos et superiores valores (B) in expressione pro $\lg \varphi$ erit

$$\lg \varphi = A \cos B \{ \cos B \cos(C-K) - \sin B \sin(C-K) \} + A \sin B \{ \sin B \cos(C-K) + \cos B \sin(C-K) \}$$

si revera multiplicemus erit

$$= A \cos B \cos(C-K) - A \cos B \sin B \sin(C-K) + A \sin B \cos(C-K) + A \sin B \cos B \sin(C-K)$$

$$= A \cos(C-K) \{ \cos^2 B + \sin^2 B \} = A \cos(C-K) \text{ quia summa quadratorum} \\ \sinus et cosinus aequatur unitati}$$

hinc $\lg \varphi = A \cos(C-K)$ quae sit formula? ---

Si ad aequationes (A) adjuvemus aequationem $\sin h = \sin I \sin \varphi + \cos \varphi \cos I \cos(p+K)$
 id est si supponamus dentium stellam in eadem altitudine in qua priores
 erant, tunc, aequatione hac a prima aequatione (A) subtracta et simili
 modo aequatione resultantem tractata, habebimus

$$\lg \varphi = A' \cos(C'-K)$$

Haec duo determinationes altitudinis poli dant, si subtractentur

$$0 = A \cos(C-K) - A' \cos(C'-K) \text{ vel, per decompositionem}$$

in factores et substitutiones oritur aequatio

$$0 = (A'-A) \left\{ \cos\left(\frac{C+C'}{2} - K\right) \cos \frac{C'-C}{2} \right\} - (A'+A) \sin\left(\frac{C+C'}{2} - K\right) \sin \frac{C'-C}{2} \quad (1)$$

34

ponamus $\frac{A}{A'} = \lg x$ subtrahendo ambo membra ab unitate et propria addendo ad unitatem erunt duae aequationes, quarum primam dividendo per alteram erit $\frac{A'-A}{A'+A} = \frac{1-\lg x}{1+\lg x} = \lg(45^\circ - x)$ quia $\lg 45^\circ = 1$

dividendo aequationem (1) per $A'+A$ erit $\frac{A'-A}{A'+A} \cos\left(\frac{C+C'}{2} - K\right) \cos \frac{C'-C}{2} - \sin\left(\frac{C+C'}{2} - K\right) \sin \frac{C'-C}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{et per } \cos\left(\frac{C+C'}{2} - K\right) \end{array} \right.$

$$0 = \frac{A'-A}{A'+A} \cos\left(\frac{C+C'}{2} - K\right) \cos \frac{C'-C}{2} - \sin\left(\frac{C+C'}{2} - K\right) \sin \frac{C'-C}{2}$$

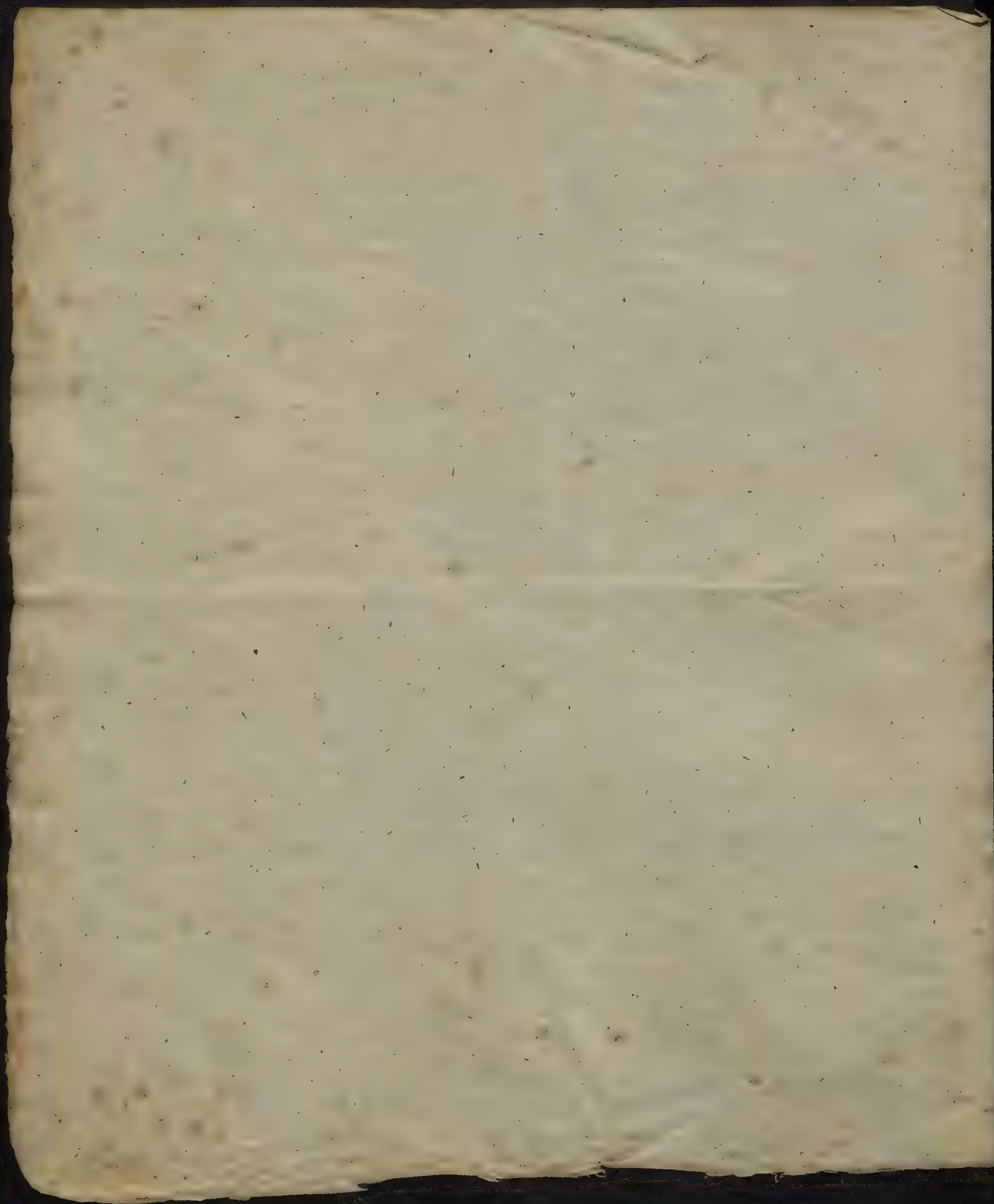
ponamus $\lg y = \lg(45^\circ - x) \operatorname{ctg} \frac{C'-C}{2}$ hinc aequatio ultima divisa per $\sin \frac{C'-C}{2}$ per substitutionem valorum pro $\frac{A'-A}{A'+A}$ et pro $\lg(45^\circ - x) \operatorname{ctg} \frac{C'-C}{2}$

dabit $0 = \lg y - \lg\left(\frac{C+C'}{2} - K\right)$

$$\frac{C+C'}{2} - K = y \quad \text{et hinc } \lg\left(\frac{C+C'}{2} - K\right) = \lg y$$

~~$K = \frac{1}{2}(C+C') - y$~~ sed tangentes horum angulorum aequales sunt zero atque anguli sunt aequales vero si a se subtrahuntur ergo $\frac{C+C'}{2} - K = y$ et inde

$$K = \frac{1}{2}(C+C') - y$$



Ex hac ratione quoque nominantur Planetae inferiores; quando transiunt inter Solem et terram, est conjunctio inferior, si autem Sol est inter planetam et terram, est conjunctio superior. —

3^o Modus dispositionis harum duarum orbitarum est determinatus per maximas digressiones. —

Quam qualibet horum planetarum in sua conjunctione sit in linea recta, quae jungit terram et Solem, ille nobis appar. bit in eodem loco, in quo videtur ex Sole, centro suis orbitis. Observationis conjunctionis dant arcum quem planeta descripsit ab una conjunctione ad alteram, quod prebet medium comparandi eorum celeritates et eorum revolutiones. Hae rationes inveniuntur, ceteri scilicet Mercurii esse fere tribus vicibus majorem illa Veneris, quod nullum dabitur relinquit, illum esse propiorem Soli: occultationes unius horum planetarum per alterum, hoc quoque comprobant. Sic 1^o Mai 1737 Mercurius occultatus est per Venerem, cum erat in sua inferiori conjunctione; ex quo sequitur, Venerem esse propiorem terrae, et hinc magis distantem a Sole quam Mercurium. — Hae veritates antiquioribus jam erat nota sub nomine Systematis Aegyptiorum. —

Ceteri planetae sunt et in oppositione cum Sole, hinc magis distantes ab eo quam terra. — In suis conjunctionibus nunquam videntur transire per discum solarem uti hoc in planetis inferioribus locum habet, et si directio motus transit per Solem; ex hac sequitur, eorum orbitas includere illam terrae et ex hac causa quoque nominantur planetae superiores. —

Ad ex hoc nondum sequitur, Solem non terram centrum esse eorum orbitarum, et si non verisimile sit, eorum motum esse reverentia in regularem, uti apparet ex terra, per alia verba, terram esse centrum eorum orbitarum. Facili autem nos convincere possumus, mensurando eorum diametros apparentes, vel observando eorum parallaxes, eos esse propiores nobis in oppositione quam in conjunctione; inveniuntur quoque differentiam harum distantiarum esse aequalem diametro orbis terrestris. In hoc consistit comprobatio

Geometrica; illos moveri circa Solem, et eorum orbites includere
illam terram. Si terra esset centrum eorum orbitarum, illi deberent
necessarie comitari terram in sua revolutione circa Solem, ita ut
locum haberent duo, loco unus motus. Simpliciter causa igitur
jam supponere debemus, Solem esse centrum commune, circa
quod terra, cujus orbita illas Mercurii et Veneris includit, et dein
ceteri planetes moventur, quorum orbites iterum illam terram inclu-
dunt. Hoc systema prius comprobabitur quoque prius alia ratione. —
Ordo, quo orbites superiorum planetarum includunt Solem et terram,
concluditur eadem ratione, uti prius de planetis superioribus. Si pla-
netes sunt oppositi soli, eorum celeritas apparens, conjuncta cum
vera seu heliocentrica celeritate terre, quae est nota, dabit eorum
celeritatem heliocentricam in ratione illius terre, ex quo deinceps
relatio, quae existit inter celeritates heliocentricas omnium pla-
netarum. — Observationes oppositionum, ubi planeta est in eadem
linea cum sole et terra, dant quoque accuratam ad Solem quem planeta per-
currat ab una oppositione ad alteram, et hinc tempus necessarium
ad unam revolutionem. — Proinde nullum dubium est, planetam
qui describit majorem orbitam, debere habere minorem celeritatem
angularem, quam planetam inferiorem: quod quoque prius jam de or-
bitis Mercurii, et Veneris et terre inventum est. Observationes
nunc praebent hoc resultatam, planetas moveri circa Solem hoc
ordines: Terra, Mars, Jovis, Saturnus, Uranus; periodi eorum
revolutionum circa Solem sunt fere uti 1, 2, 12, 29, 83.
Idem ordo est ex eorum apparenti magnitudine, ita v. c. Mars u-
tius illam variat in oppositione quam Jovis, et sic de ceteris; ex
quo est clarum, variationem distantiae Martis a terra esse majorem
respectu hujus distantiae, vel Martem esse viciniorum terra quam
Jovem. Diametri apparentes in conjunctionibus et oppositionibus
sunt fere in sequenti ratione: quoad Saturnum uti 10 ad 12½,
quoad Jovem uti 10 ad 15, quoad Martem uti 10 ad 48; ex quo se-

quintus

ex quo sequitur, diametrum orbis & terrestris esse ad diametrum orbis,
ranus Saturni, Jovis et Martis, uti differentis priorum numero,
runt ad eorum summam, h. e. uti $2\frac{1}{2}$ ad $22\frac{1}{2}$, uti 5 ad 25, uti 38 ad 58,
vel uti unillies ad numeros $9\frac{1}{2}$, 5 et $1\frac{1}{2}$.

Viam asseramus principales circumstantias motus apparentis, seu
quocumque planetarum, quae erunt servient ad verificationem omnium
systematum, quae nihil aliud sunt quam explicatio praecedentium pha-
nomenorum. — Cumque planetes inferiores pervenerint ad suam ma-
ximam digressionem occidentalem, approximauntur conjunctioni su-
periori, celeritate crescente et motu directo. — In momento ipso
conjunctionis, celeritas motus diracti est in suo Maximo, et incipit de-
cere magis et magis, donec pervenerint planetes ad suam maximam
digressionem orientalem. Post aliquod tempus, planeta evadit station-
arius; post aliquot dies quibus mutavit suum locum in partem eandem, illi
occidit ad suam conjunctionem inferiorem, cum motu retrogrado et ce-
leritate crescente. Post hanc conjunctionem, hic motus retrogradus
imminuitur magis et magis, et aliquot hebdomadas ante suam ma-
ximam occidentalem digressionem, planeta est iterum stationarius
secunda vice. Post aliquot dies, motus iterum evadit directus; sed
quoniam ipse motus est lentior illo Solis, planeta adhuc dimovebitur a Sole,
et non pervenit ad suam maximam digressionem occidentalem,
donec finis motus directus, evadit celerior illo Solis. Deinceps
haec phaenomena reperiuntur eodem ordine, et observatur quod
sequitur:

- 1^o Maximum celeritatis directae in superiori conjunctione est fe-
re duabus vicibus majus quam Maximum celeritatis re-
trogradae in conjunctione inferiori.
- 2^o Motus retrogradus Mercurii durat fere 23 dies et continuatur
in arcu 9° usque ad 16° ; ille Veneris durat fere 42 dies, in
arcu 14° — 17° . Dein in brevissimo temporis inter duas conjun-
ctiones superiores et inferiores, est fere pro Mercurio 116 dies
et

et 584 dies pro Venere; Durationes motus retrogradi et directi sunt fere uti 1 ad 5 pro Mercurio, et uti 1 ad 14 pro Venere. Phenomena, quae representant planetas superiores, sunt eadem substituendo tantum oppositionem pro conjunctione inferiori. Nam, uti quilibet facile videbit, in oppositione planeta superioris videbitur terram in sua conjunctione ac superiori. Motus planetarum superiorum, quando sunt in conjunctione, est directus et celeritas maxima; sed imminuitur semper, si Sol removeatur a planeta versus orientem, propter sua maximam celeritatem, ita ut planeta semper magis et magis dismoveatur occidentem versus. Quando pervenit ad suam occidentalem quadraturam (90° a Sole), vadit ille stationarius, et dein retrogradus. Sic motus retrogradus semper acceleratur ratione, qua appropinquatur oppositioni, ubi ille est in suo maximo. (Dum planeta teritur ad movetur Soli, motus retrogradus imminuitur et devenit zero. Postquam erat dum per plures dies stationarius, planeta vadit ad suam conjunctionem motu directo et celeritate crescente, ita ut sua distantia a Sole orientalis imminuat; Sol vadit orientem versus celerius quam planeta. Post hanc conjunctionem eadem phenomena reperiunt, et observantur sequentia:

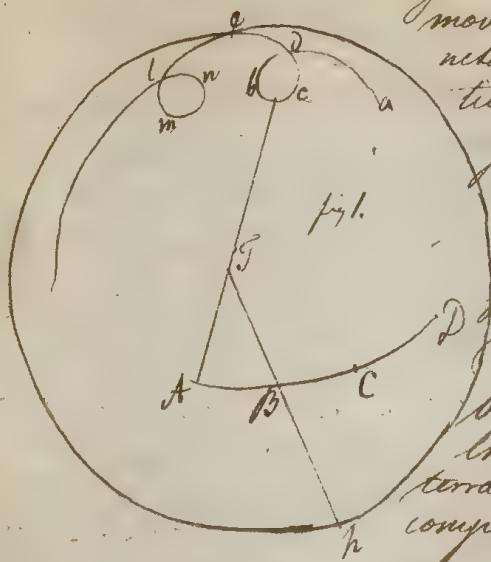
1^o Maximum celeritatis directae in conjunctione, est fere duabus vicibus majus quam celeritas retrograda in oppositione. —

2^o Spatium inter unam et sequentem conjunctionem, est fere 80 Dies pro Marte, 399 pro Jove, 378 pro Saturno et 376 pro Urano. Motus retrogradus horum quatuor planetarum durat 61 — 81, 117 — 122, 135 — 139, 150 — 153 dies, et includit arcus 10° — 20°, 10°, 7° et 3½°. Durationes motuum retrogradorum et directorum Martis, Jovis, Saturni et Urani sunt igitur inter se uti 1:10, 1:2½, 1:1¾, 1:1½.

Diversa Systemata Planetaria

Jam prius Astronomi observauerunt, locum veluti stellae fixae rotari inter 24 horas circa terram a sinistra dextram versus; praeterea animadvertunt, Solem, lunam et quinque alia astra mutare suos ordinis plantas respectu stellarum fixarum, hinc eorum motum non esse parallelum illi aetherorum aethorum seu Aequatori, & quo concludunt, eorum motum apparentem esse in linea spirali. Sed mox viderunt hunc motum simplicari, illum resolvendo in duos alios et attribuendo hos motus planetis, nimirum, unum, qui proprius est omnibus astris, et alterum proprium planetis, qui alius potum, quam potum aequatoris haberet. Unus est perfecte regularis, secundus vero pluribus irregularitatibus est obnoxius, quae jam vidimus in praecedentibus. Iste irregularitas non dependet a longitudine planetarum (puncta nimirum conjunctionis et oppositionis, semper aliis punctis eclipsium correspondunt) sed ab eorum situatione relative ad Solem; et probabiliter ipse motus e Sole visus, magis erit regularis, ubi hoc ex uniformitate retrogradationis etc. uti et oppositionis, sola loca heliocentrica, quae immediate observari possunt, concludi prodest. Et in hoc quoque consistit comprobatio evidens veritatis, Solem esse centrum omnium orbitarum planetarum. —

Observationes retrogradationis, oppositionis etc. praebent nobis novas irregularitates, sed minus considerabiles. — Arcus interrupti et temporis intervalles inter duas stationes, vel oppositiones, et praecipue quoad Martem, non inveniuntur ejusdem magnitudinis. Haec irregularitates dependunt a planetarum longitudine, quod ergo contrarium est prioris irregularitatis. Haec irregularitas apparet esse ejusdem generis, uti irregularitas Solis, cognita sub nomine aequationis centri, nominatur prima irregularitas, secunda est illa, quae solum dependet a situatione apparenti planetarum respectu Solis.



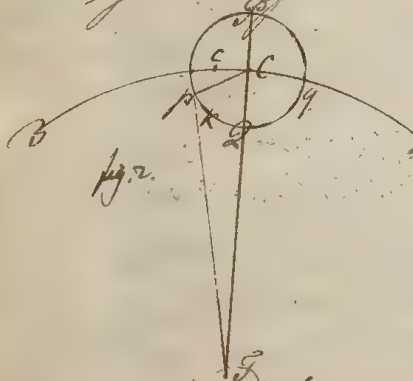
Assumamus in Terram esse in quiete, et Solem moveri ab A per B, C, D, et superiore in aliquem planum per abcd; dicitur planeta a duobus B stationarius, per bc retrogradus et in cd iterum stationarius. Nunc evadit directus et dicitur, velut per def. . . a terra donec sit in h in conjunctione cum Sole, et in maxima distantia a terra. Deinde appropinquatus Soli, venit in oppositionem cum Sole, evadit stationarius, retrogradus etc. et describit in qualibet oppositione similem nodum lmn. Sola orbita planetæ, in supposito ne Terram esse in quiete, evadit igitur admodum complicata, ex innumeris nodis composita linea curva, quæ nunquam in se ipsam redit. —

Kepler relativam orbitam Martis circa Terram ex observationibus per 16 annos institutis accurate determinavit (de Stella Martis c. 1 p. 41) et tantummodo de scriptam figuram adscribere debemus, ut statim videamus, hanc orbitam non posse esse veram orbitam; talis confusio talis dispersio spatii nullibi occurrit in natura. Et hæc confusio adhuc major erit, si respiciatur latitudo planetarum. — Quamvis enim maxima geocentrica latitudo vel inclinatio versus eclipticam, modo major modo minor est, eorum orbita, vel non in eodem plano jacet, hinc duplicem curvaturam habet, vel in duobus partibus eorum plani cum ecliptica, non transit per oculum, h. e. planeta non revolvitur circa Terram, quæ extra planum suæ orbitæ jacet, sed oculus in terra videt ejus orbitam a latere. Prosumus quidem per varias hypothèses hunc complicatum motum planetarum, in plures simplices decomponere, sed absolutus ex omnibus compositus motus, semper manet idem, quando in terra spectamur quiescens. —

Præcipuum problema Astronomiæ "pro quolibet tempore, locum apparentem, seu relativum corporum celestium respectu terræ invenire" videtur ad hoc, determinare punctum in

in relativa elliptica orbita abcedit... in quo determinato tempore
 planeta est. Ad resolutionem hujus problematis, debemus no-
 scere naturam lineae curvae abcedit et legem secundum quam pla-
 neta hanc lineam describit, vel saltem ex observationibus de-
 bent regulae derivari, secundum quas per constructionem vel per
 calculum, relativus motus planetae h. e. sua distantia St et
 angulus Ats inveniri potest. Jam solus aspectus lineae abcedit...
 ostendit ejus magnam similitudinem cum epicycloid: saltem
 nullus simplicior modus imaginari potest, quam assumendo,
 planetam moveri in peripheria circuli seu epicycli cujus cen-
 trum finit describit circulum circa terram. — Illis tempo-
 ribus, ubi ad resolutionem problematum geometricorum tantum
 modo circulum et lineam rectam adhibere solabant, debebant
 Astronomi tentare, an haec hypothesis non ita accommodari pos-
 sit ut satis faciat observationibus. Calculus diu evaserat ad
 modum ~~proprietatis~~ facilis, et non erat necessarium, iterum constru-
 ere hypothesis et inagere novas disquisitiones quoad veram
 orbitam apparentem planetarum; manserunt Astronomi apud
 orbitam apparentem, et hypothesis tantum serviebant ad sim-
 plicationem calculi. — Orbis orbitarum planetarum inter se
 debebat dein quoque ita manere, uti hoc postulabant eorum mo-
 tus apparentes circa terram. Hinc ratione ordinis est systema
Ptolemaicum quod suum nomen accepit a celeberrimo Astro-
 nomo autore antiquioris aevi Ptolemaeo, digno successo-
 re Hipparchi in museo Alexandrino, versus medium se-
 cundi saeculi, qui proposuit hoc systema in suo Almagesto.
 Secundum hoc systema, terra est quiescens in centro orbitarum
 lunae, solis et planetarum. Luna quae in eclipsibus solis
 ante Solem transit, et brevissimam periodum habet, terrae
 debebat esse vicinissima; ceteri planetae distribuuntur

secundum longiorum periodum sequenti ordine: ♀ Mercurius, ♀ Venus,
 ☉ Sol, ♂ Mars, ♀ Jupiter, ♀ Saturnus. Aliqui Graeci philosophi
 v. c. Plato, posterunt statim post orbitam lunae orbitam Solis, et
 ex altera parte Solis Mercurium et Venerem, quia nunquam videmus
 hos planetas ante Solem. Ceterum facile videri potest, secundum
 hoc systema Ptolomeicum idem esse, ac si ponantur hi duo pla-
 netae vel ex hac vel ex altera parte Solis, quia revera diversis tem-
 poribus ex utraque parte Solis exstant. Et hoc est certa obiectio
 maximae momenti contra hoc systema, quod a Ptolemaeo prioris
 aevi attentos facere debuisse, Solem esse centrum omnium
 inferiorum planetarum, si tum ubi hodi nos fuissent di-
 stantes planetarum.



Si planeta circum Solem 2q ab una
 appositione cum sole usq ad sequentem descri-
 bit, et interea circum T huius epicycli
 circa terram T circum A C B deversitatem
 tempore quo planeta unam revolutionem in
 ecliptica facit, ex hoc facile omnia adiecta
 phaenomena explicari possunt. Quia Bille
 est in appositione maxime distantia a terra
 A C B et a Q ad p directus. Quia p sua via
 coincidet cum tangenti p Q, quoniam autem radius epicycli se
 movet secundum ordinem signorum, planeta manet hanc die
 directus, donec ejus motus retrogradus p K, equalis sit disce to
 Cc epicycli ex T visi. Qui conjunctione I qui inferiori opposi-
 tione Q, planeta est A, in maxima vicina terrae, et quam maxime
 celeriter retrogradus; in q iterum est stationarius, et dein di-
 rectus, ubi hoc observationes posulant.

Continua vicinia duorum inferiorum planetarum quod Solera,
 a quo nunquam separantur, est quoque comprobatio illos esse falsi-
 tates Solis et non terrae. Et in hoc consistit systema Aegyptiacum.
 Secundum hoc, luna, Sol, Mars, Jupiter et Saturnus rotan-
 tur circa terram, sed Mercurius, et Venus circa Solem, et cum
 Sole conjuncti circa terram ubi in systemate Ptolemaico.

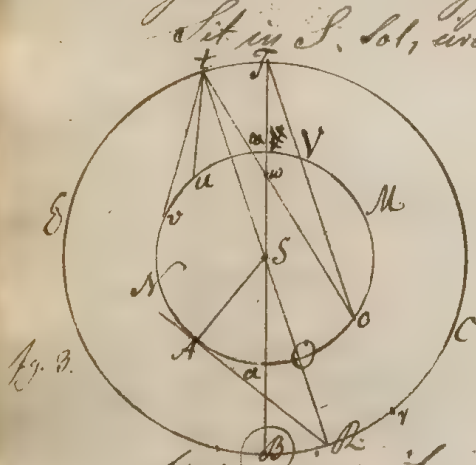
illi describunt circa Solem in centro C epicyclum Spd^2 ,
 ut interea Sol ipse rotetur in universo a H^2 una terram. Hoc
 systema nihil differt a Ptolomeico in hoc, ut secundum hoc sy-
 stemam centrum epicycli C quoad inferiores planetas Sol ipse
 sit, qui secundum Ptolomeicum itaem semper in linea recta
 est, quia planeta in superiori et inferiori conjunctione
 est et etiam in hac linea existit. Sola differentia hic igitur re-
 venit, uti videmus, ad magnitudinem lineae PC , vel potius ad
 rationem huius lineae ad radium orbis Solis; et nos videbi-
 mus, istam secundum Ptolomeum punctum C nihil aliud
 quam locum Solis fuisse, quod autem illi non fuisse probuit, quia
 tum diverse distantiae planetarum adhuc ignotae erant.

Tycho Brahe certe unus celeberrimorum Astronomorum
 se non satis philosophus, profecto perquisit et intellexit
 pulcherrimum systema Copernici, quod suo tempore
 jam a pluribus applausu magno acceptum erat. Quamquam
 minus sit ratio, vel cupido acquirendi nomen immortalis, vel
 timor, ne Theologis displiceret, satis est hoc, illi non se probuit
 resolvere ad assumendum motus terrae. Sua argumenta jam
 suis temporibus tantum parcos convincebant, nostris tempo-
 ribus nulla refutatio suorum argumentorum est necessaria.
 Immensa distantia Stellarum fixarum, quae a parvis debe-
 at, quia non habent parallaxin, de qua nulla probabilitas, ta-
 men gravem pigram inopiam, uti terra habet, habere se tem-
 peritatem in suo motu, praeterca aliquae expressiones in
 biblia sacra, quae videntur supponere motum Solis non ter-
 rae; haec erant notabilia argumenta, quae Tycho nemini
 stabant assumere terram immobilem in centro orbis
 huius et Solis, fuisse quoque rotationem planetarum circa
 Solem qua commune centrum; et hac quidem differentia

orbites inferiorum planetarum minores, superiorum autem
maiores esse orbitas solis, ut illi veniant in oppositionem
quando hi sunt in inferiori conjunctione. Quamobrem appa-
rens motus solis eadem ratione proceditur, vel assumen-
do motum solis circa terram, vel rotationem terre circa solem,
sive mutationem phaenomenorum apparentium tam in sy-
stematico pro orbita solis, motum terre circa solem ponere
possumus, dum coincidit hoc systema cum systemate Co-
pernicano. Omnes motus igitur et in aequali hactenus plane-
tam in ambobus systematibus eodem ratione explicantes.
Ex his promissis quilibet facile derivare poterit argumenta
pro systemate Copernicano. Secundum Ptolemaeum revolvuntur
hii planetes revera non circa terram, sed in epi cyclo, qui terram
non includit, et hactenus modo mediate, et hactenus modo revolvuntur
circa terram, quum conitauerent centrum epicycli. Quale hoc
punctum sit, an hactenus modo punctum mathematicum, vel se-
des aliquid vis matricis, vel aliquod corpus hoc manebat in
systemate Ptolemaico indeterminatum. Quum neq. cogitari
posset motus in circulo circa aliquod punctum in quo nulla esset
vis, nullum corpus, neq. quodlibet posset esse quale corpus sit in cen-
tro. Secunda inaequalitas planetarum, vel eorum motus in epi-
cyclo dependet accurate ab eorum situ versus solem et non ab
eorum motu circa terram; Ptolemaeus igitur assumere debebat
solum semper esse cum terra et centro epicycli in linea recta.
Atque circumstantia in magno gradu probabilitatem debet dare, so-
lem revera esse centrum commune omnium epicyclorum; cer-
titude autem huius potuit adesse, quando accurate per observationes
determinata fuerit ratio radii. Et respectu radii orbitae solis, et
quando dum inventa fuerit inter ambas quantitates aequalitas. Per
talia argumenta per coacti sunt Astronomi ad assumptionem solis
qua centrum orbitarum planetarum; et hac ratione ortum est.

Systema Aegyptiacum; et si hoc extenditur ab inferioribus ad superio-
 res planetas, Systema Syphocianum. Et nunc dicat tantum unus pas-
 sio ad certitudinem, nimirum cognitio motus terrae, cuius argu-
 menta physica quidam tardius sunt detecta, qui autem talis inter,
 nam probabilitatem habet, ut iam antiquissimis temporibus inve-
 niantur vestigia huius Systematis. — Opinio motus diurni terrae
 ab occasu ortum reversus, iam antiquissimis temporibus omnibus com-
 munitas erat, quod quoque elucet ex reputatione quam tenuit Ptolemaeus,
 us (Almag. L. I. Cap. 2.). Vera orbita planetarum in quolibet Systemate,
 in quo terra non conceditur motus annuus, est admodum complicata
 epicyclois, in qua nullus ordo, nulla lex physica ite animo vertitur;
 si autem motus annuus terrae circa Solem assumitur, statim regnat
 ubique ordo, phenomena facile explicari possunt, et ista assumptio
 evadit diu fons pulcherrimarum legum naturae, quas hac ratione
 Newton et Kepler Alexerunt. Neque antiquioribus ^{philosophis} haec omnia pe-
 nitus occulta fuerunt, et nos scimus, Nicetam, Philolaum et
 Aristarchum hoc Systema saltem ex parte assumptum. Nicolaus Syra-
 cusius qui vixit 400 annis ante Christum natum, inter Pythagoricos
 erat primus, qui hoc Systema, saltem quoad motum diurnum, ma-
 gis clare docuit. Cicero in suis Academicis questionibus IV. 39. edi-
 tio Ernesti, ita se explicat: "Nicolaus Syracusius, ut ait Theophrastus,
 caelum, Solem, Lunam, stellas, cetera denique omnia, stare censet;
 nos, praeter terram rem ullam in mundo moveri: quae quidem eadem
 axem se summa celeritate converlat et torquet, eadem effici omnia,
 quasi stante terra caelum moveretur." Nicolaus igitur fuisse hoc Systema
 universales assumptum Systema praeconum temporum, et per se latere,
 primum aliquando adhuc praeconum Astronomiae, cuius argumenta iam
 perita, Theorematum autem relicta fuerint usque ad scholam Alexandri-
 nensium, quum Hipparchus reformationem totius Astronomiae
 suscepit. Atque celeberrimus Astronomus omnes doctrinas subiecit
 novo examini, et rejectit omnia, quae non per observationes ipsas
 demonstrata fuerint, hinc quoque motum terrae cuius argumentu-
 tum

tum adhuc darent, vel forsitan perita fuerant. — Copernicus
 (Thornensis) invenit igitur in scriptis priorum Astronomorum
 per totum suum systema dispersam; collegit igitur omnes has
 singulas ideas in systema et cum suo philosophico indutu, circum-
 spexit, statim simplicem ordinem et istas maxime momenti conse-
 quentias sua hypothesis, et bono animo exstructus erat proponen-
 di veritates inventas contra omnia prejudicia. — Harmonia the-
 oris cum observationibus, absolute probet improbatorem
 sui systematis. Secundum hoc systema igitur Sol est centrum
 commune omnium orbitalium planetarum, qui secundum se-
 quentem ordinem circa solem revolvuntur: $\odot, \text{Mercurius}, \text{Venus}, \text{Tellus}, \text{Mars}, \text{Jupiter}, \text{Saturnus}$.
 Aliqua de explanatione motuum apparentium planetarum
 secundum hoc systema, adferemus.

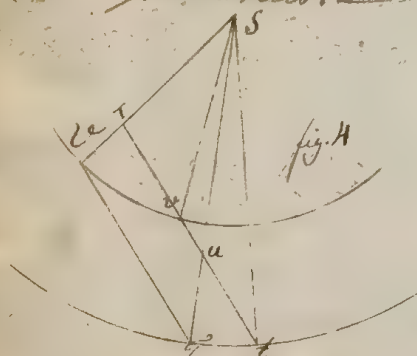


Sit in S. Sol, circa quem aliquis inferior planeta v.c. \odot secundum V.N.O.M
 et terra \oplus in eadem directione TE circulos concentri-
 cos uniformi celeritate describunt, quod hic, ubi sen-
 tum de generali explanatione sermo est, assumi licet.
 Si \odot est in T. et \oplus in O. in superiori conjunctione (O),
 cum movetur ortum versus directionem Oo, movetur
 igitur directe circa terram per angulum OTo si-
 villa. in T esset in quiete; quum autem intra
 terra etiam ortum versus per arcum St progressa
 est, Venus terre apparet tunc in linea tO, et hoc
 linea divergit a linea Syzigiarum TO angulo Owo = Oto + Tot.
 In superiori conjunctione igitur geocentrica, directa celeritas Veneris
 aequatur absolute geocentrica celeritati Veneris, et absolute Vene-
 ricentrica celeritati terre h. e. summa celeritatum angularium
 quam quilibet horum planetarum haberet, si solus circa alium
 moveretur, et hic quiesceret. Si conjungantur puncta S et t, dicitur
 est hac celeritas etiam = Tot = Tto + Sto vel aequalis summa celi-
 ritatum terre vel solis et elongationis Veneris a Sole. Fere 220
 diebus post superiorem conjunctionem Venus est in sua maxima
 digressionem a Sole: quum hoc 37 diebus plus sit quam dimidius an-
 nus, terra jam descripsit semicirculum TEB et est v.e. in R

et si dein ductatur tangens orbitæ Venus Ant , dim $Venus$ est in A , et
 maxima digressio AKS est secundum observationes = 46° . Quum nunc
 in A sit angulus rectus, erit $AS = AS$ in 46° , vel radius orbitæ V ,
 meris est 0.72 radii orbitæ terræ, quod ab accuratissima determina-
 tione 0.72332 , parum differt. Angulus ASR est 44° et BSR
 qua medius motus terræ in 37 diebus est $36^\circ 28'$ hinc $ASR = 72^\circ$.
 Venus igitur descripsit in 220 diebus $360^\circ - 72^\circ = 388^\circ$ circa S ,
 sem, nam O est superior conjunctio a qua incipimus, necessarii
 igitur sunt secundum hanc rationem quatuor dies 16 hore 19 min. p.
 ad describendos gradus 72° que conjunctio cum jam elapsis 220
 diebus, dabitur tempus totius revolutionis Venus circa S ,
 sem, nimirum 224 dies 16 horas, 19 min. p., tempus quod tantum
 mod. fore $22'$ a vera revolutione differt. Hæc ratione secundum
 systema Copernicanum facile nos probandum de meris orbitis
 planetarum convincere possumus.

Quilibet videt motum Venus per totum hoc tempus fuisse di-
 rectum. Nam in initio attingebat linea SO Venerem in
 superiori parte suæ orbitæ, et hæc linea Venerem non potuit
 attingere, potest in inferiori parte, quæ quæcumque veniat in con-
 tactum, et superiori conjunctione O usque ad maximam digressionem
 A , ista linea igitur semper attingit Venerem in superiori par-
 te suæ orbitæ in aliquo puncto S , vel Venus magis distat a
 terra quam S , dein progreditur Venus a puncto A sinistram
 versus, terra autem a B dextram, rursus, hinc Venus eo plus
 sinistram versus, h. e. secundum ordinem signorum progredi
 vidari debet. Hæc casus adhuc quoque erit in A , nam quæcumque V ,
 nus in tangenti puncti A versus a progreditur, terra describit
 arcum Ar , et linea Ar divergit orientalem versus a linea Ant .

Ad mox dabitur tempus, quo linea ex terra ad planetam ducta, in duobus subsequentibus momentis, evadit parallela, hinc apparebit planeta in celo stationary. In suppositione, ambas planetas describere circulos concentricos uniformiter, facile inveniri potest digressio inferioris planetæ a sole in momento, quo est stationary. — Sit S , Sol, circa quem inferior planeta in aliquo



parrvasculo tempore describit arcum Vv , superior planeta autem arcum Tt , et sit tempus stationis TV parallelum st , nominentur tempora revolutionum amborum planetarum Tet , radii concentricorum $ST = R$, $SV = r$ digressio $STV = \varphi$ et angulus $VTt = \psi$, dicitur propter uniformitatem motus $T : t = RV : St$, et propter parallelismum st TV et st $RV = St$ $TV = St + St =$

$\varphi + d\varphi + St$, hinc $d\varphi = - St$. Eadem ratione habemus $\psi = St = St - Vtr = \psi + d\psi - Vtr$, hinc $d\psi = Vtr$ et hoc dat $d\psi : d\varphi = T : t$. Ex triangulo STV est $\sin \psi = \frac{R \sin \varphi}{r}$ hinc $d\psi \cos \psi = \frac{R}{r} d\varphi \cos \varphi$ vel $d\psi : d\varphi = R \cos \varphi : r \cos \psi$, quod cum priori proportionem dat $R^2 \cos^2 \psi = \frac{r^2}{T^2} R^2 \cos^2 \varphi$, si hinc æquationi addatur sequens $r^2 \sin^2 \psi = R^2 \sin^2 \varphi$ dicitur est $\sin \varphi = \frac{\sqrt{r^2 T^2 - R^2}}{R \sqrt{T^2 - r^2}}$ — vel si ponatur $R = \xi$, $\frac{r}{T} = \tau$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(\xi + \tau)(\xi - \tau)}}{(1 + \tau)(1 - \tau)}$$

Pro Venere, uti diximus, erat $\xi = 0.72$, $\tau = \frac{224.64}{365.25} = 0.615$ hinc $\sin \varphi = \frac{\sqrt{1.935 \times 0.105}}{1.615 \times 0.385} = 0.47481$ et $\varphi = 28^\circ 21'$ quod bene concordat cum observationibus.

Quum planeta fuerit in sua statione, φ decrevit, planeta evadit retrogradus, et appropinquatur inferiori conjunctioni V (proæ. figura) —

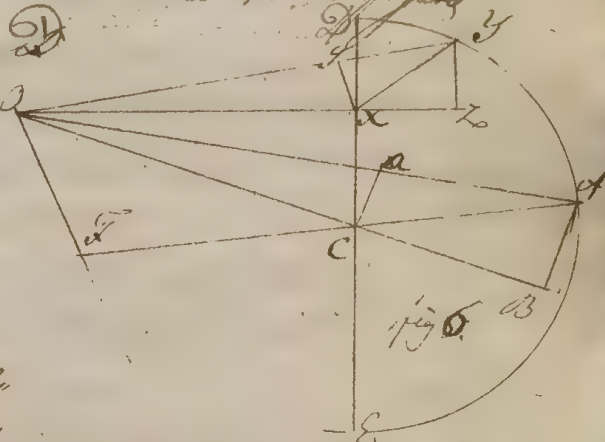
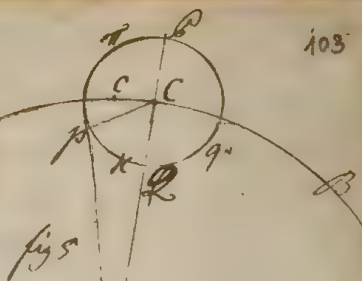
Cum progredietur Venus in Vv, terra in Tt, et quum prior
 motus major sit quam secundus, Venus directione Vv h.e.
 retrograde moveri videbitur. Si nimirum ducatur Lu pa
 rallela ST, Venus retro movetur angulo $\alpha \alpha' \alpha''$ ut $v = Vv -$
 $- Vtu = Vtv - ST$ h.e. differentia amborum motuum
 apparentium, si quoad ambo motus oculos quiesceret, et
 facile videmus, hanc differentiam esse maximam, si $\alpha \alpha'$ vel
 $\alpha \alpha''$ perpendiculariter impetit orbites Venere, ubi ST.
 Motus retrogradus igitur in inferiori conjunctione est
 maximus, et evadit post conjunctionem quando ϕ
 iterum est aequale $28^\circ 21'$. Nam iterum evadit directus
 cum celeritate crescente, quo magis appropinquat
 planula superiori conjunctioni, nam tangens Cto
 ubi et ST, hinc quoque eorum punctum (Nisi proce.) evadit
 eo major, quo vicinior linea ST est directioni perpendi-
 culari ad ambas orbitas in appropinquat. Interim videmus
 impossibile esse tale punctum duarum orbitarum, in
 quo nullus motus retrogradus locum haberet. Si ni-
 mirum ϕ pro puncto stationis evanesuit, dum cadit
 ipsum punctum et in inferiore conjunctionem,
 ipsam et nullus erit motus retrogradus, quia ϕ non
 non amplius minus evadere potest. Hoc locum habet
 $vS = At$ vel $v: A = t: T$ h.e. si distantia plane-
 tarii a Sole se habent ut tempora revolutionum.
 At evaderet $\} vS$ per A $\{ T$, ϕ evaderet imaginaria
 quantitas et etiam nullus motus retrogradus esset.
 Quum autem observationes doceant, omnes Planetas
 habere motum retrogradum, concludere debemus

dari legem universalem pro omnibus planetis, si numerus spe-
 ciei $\frac{1}{4}$ nulli, rationem temporum periodicorum esse eam
 majorem quam rationem distantiarum a Sole. Apud Venerem
 et terram est. $\frac{1}{4} = \frac{1}{0.615} = 1.626$ et $\frac{1}{4} = \frac{1}{0.72} = 1.39$ et non vi,
 debemus in dicere, inter has rationes valere legem universalem
 $\frac{1}{4} = \left(\frac{R}{r}\right)^3$.

Phenomena superiorum planetarum eodem facili modo explicantur
 si tantummodo terram in orbitam VMS et superiores planetam
 (v. c. H) in orbitam TBO transferamus. Dum coincidunt superior
 conjunctio terre in O cum conjunctione Jovis in S , et inferior
 conjunctio terre in V cum oppositione Jovis in S . Terra dum
 apparet Jovi directa in conjunctione stationaria, si ex Jove
 visa digressio terre a Sole, aequalis Q , et retrograda in oppo-
 sitione, facile autem videtur Jovem apparente debere terre di-
 re sunt, stationarium vel retrogradum, si terra Jovi haec ra-
 tione apparet. Geocentrica distantia superioris planetæ a
 Sole momento stationis, vel angulus $MSO = \psi$ (ultima figura)
 invenitur ex equatione $\sin \psi = \frac{R}{r} \sin \phi$, ex qua, uti prius se-
 quitur $\sin \psi = \sqrt{\frac{(T-t)(T-\phi)}{(T+1)(T-1)}}$ ubi R et t distantia et periodus
 pro terra et $\phi = \frac{R}{r}$, $T = \frac{1}{4}$ est. Aliud phenomenon quod
 precipue apud Venerem notabile est, per systema Copernica-
 num eodem modo facile explicatur, et prebet novam demon-
 strationem pro hac systemate. Si Veneris est in superiori
 conjunctione O dum terra T obvertit eandem partem, quæ a
 Sole illustrata est, apparet terre in plena luce; in inferiori
 conjunctione autem obvertit terre non illustratam partem
 et tunc apparet terre, uti hoc in transitibus ante diem S ,
 his videmus, opaca. A superiori usque ad inferiorem conjunctio-
 nem decrescit semper lux, quia terra semper et semper mi-
 norem partem illustrati disci videt; Venus igitur uti duas
 habet suas phases. Ptolemaicum systema se distinguit
 a Copernicano et Tythonico tantum in eo, ut sol quidem semper

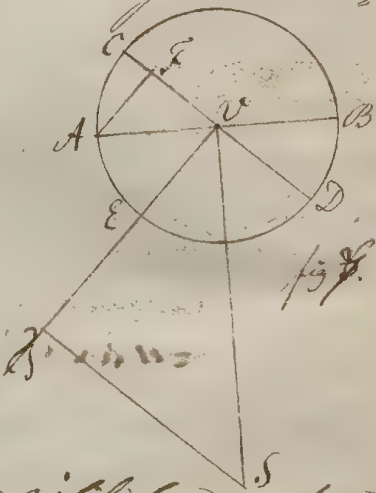
in linea ED sed non ED interne in a planula descripta
epicyclo fit. sed vel ex parte puncti D vel ex parte E
planula B . Dū autem debent phases Veneris,
propter dispositionibus a Sole equalibus, in per-
teriori et inferiori parte quæ orbis ED in π
et κ , esse equalis, et ejus lux non possit a B usq;
ad D decrescere, si Sol esset ultra D vel cis
 D , Venus et in B et in D vel tota opaca vel tota clara. Obser-
vationes igitur tantummodo explicari possunt, assumendo Solem
esse intra epicyclum, vel planula rotari circa Solem. Hæc no-
tionem igitur Copernicanam seu Tychoanicam systema confir-
matum est. Accuratior determinatio diversarum pha-
sinum præponit aliquæ theorematum per se tunc, quæ notabilia
hæc enucleabimus, quum sequens sint necessaria.

Si oculus ab aliquo objecto ita distat, ut non possit distinguere
varias distantias ejus partium, iudicabit omnes partes
habere equalis distantias, vel totum objectum prætere in
plano perpendiculari respectu oculi vel alio verticis; oculus
figurant cum hac equalitate puncti, quæ ex intersectionibus
linearum ad quodlibet punctum objecti ductarum respectum
cum plano, oculi, quæ ad lineam ex oculo ad centrum figuræ
ductam perpendicularare est. Si igitur D
 DAE situlus circa centrum C cum
radio CA ~~descriptus~~ descriptus est, et
oculus est in B , ducatur $BC = c$, et ad
planum oculi perpendicularum BF
laudem F quæ occurrat circulo in A
et diameter DE ad hanc lineam perpen-
dicularis. Dū est $BCF = ACB = \varphi$ in
clinatio lineæ bisualis C versus planum oculi, et DE est
ad planum BCF perpendicularis; hinc sunt BCD , BCF ubi
et ACD , ACE anguli recti. Si dū ducantur ad omnia pun-
ta circuli lineæ CA , CB etc. et imaginetur per DE planum



ad OC perpendicularum, quod a lineis CA, CY in a et y intersectus; dein apparet circulus vultu valde distantis ubi linea $DyaE$ et si YX est perpendicularis ad DE duo sunt OCa, OXY anguli recti. Coordinata circuli igitur sunt $CX = x, XY = y$ et projectiones $CX = x, XY = y$, et nos habebimus pro circulo aequationem $y^2 = a^2 - x^2$. Quoniam enim CA, XY et propter magnam distantiam etiam OC et OX sunt paralleli, est $COX = OCA = 180^\circ - \varphi$ hinc in triangulo XYC , $Y = \sin \varphi$, et si hic valor in priori aequatione substituiatur, erit pro projectione $xy = (a^2 - x^2) \sin^2 \varphi$, quae aequatio designat ellipsin, cuius axis maior $2a = DE$ et minor $= 2Ca = 2a \sin \varphi$ est. A modum distantis ex parte tantum visus circulus apparet igitur ut ellipsis, cuius axis maior se habet ad minorem uti radius ad sinum anguli φ , sub quo linea ab oculo ad centrum circuli se inclinatur versus ejus planum; et axis minor hujus ellipsos Ca jacet semper in plano OCa , quod per lineam visualem OC ad planum circuli perpendicularare est. Si nunc

Vest centrum alterius planctus $ABed$ in e sol in T terra, AB, CD duos circuli maximi per planetam ad NT, TE perpendiculares; ADB representat a sole illuminatum, ACD autem ex terra visum semisphaeram planetae; in terra igitur opaca pars ATC non erit visibilis, sed semicirculus VT terminatus in terra visibilem partem planetae, et apparebit hic limes sub forma dimidiae ellipsos, cuius axis minor ad majorem seu ad apparentem diametrum planetae AB se habet uti $\sin AVT$. Oculis in T videtur igitur dimidiam aream circulearem NTe cum dimidia elliptica area EVt , quae secundum naturam ellipsos, se habet ad priorem uti axis minor ad majorem h.e. uti



Sint $VS:1$ vel si VS ducatur ad D perpendicularem, ut $VS:2$.
 Totus visibilis discus p habet igitur ad totum discum planete
 uti $DS:DC = 1 + \sin AVE:2$ vel uti $1 + \cos Q:2$ si ex plane-
 ta visa distantiā terra a Sole VS ponitur = Q . Si velle
 prius adhibere geocentricam elongationem planete a Sole
 $VS = \psi$, nota esse debet ratio distantiarum $VS = r$ et
 $VS = Q$: dū est $\sin Q = \frac{r}{R} \cdot \sin \psi$ et
 $DS:DC = 1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \psi} : 2$

In superiori conjunctione (vid. fig. 5.) $Q = VS = 0$ et $1 + \cos Q = 2$, ergo
 et illius visibilis discus, et oculo apparebit totus discus planete
 illuminatus. In inferiori conjunctione V , est $Q = VS = 180^\circ$ et
 $1 + \cos Q = 0$, h. e. planeta transiit.

Si terra in A et superior planeta in B est, dū Q non major erit
 potest quam maxima distantiā terra a Sole VS est: dū est:

$\sin Q = \frac{VS}{R} = \frac{r}{R}$, hinc apud Martem ubi $\frac{R}{r} = 1.523$ est maximum,
 $\sin Q = 0.6568$. Hoc dat $Q = 41^\circ 1'$ et $\cos Q = 0.7545 = \frac{3}{4}$: hinc se ha-
 bet apud Martem discus visibilis, si est minimus, ad totum dis-
 cum uti $7:8$. et haec ratio tamen est tam magna, ut revera de-
 crementum lucis et phasos animadverti possint.

Apud Jovem et eo magis apud Saturnum, haec phasos non sunt
 notabiles, quia $\frac{R}{r}$ est admodum magna quantitas: apud Jovem
 e.g. $\frac{R}{r} = 5.2$, $Q = 11^\circ 5'$ et $\cos Q = 0.9813$; hinc se habet mini-
 mus visibilis discus Jovis ad totum uti $198:200$, quod ab aequa-
 litate non multum differt. — Apud nullum planetam istae
 phasos sunt ita notabiles, uti apud Venerem. Nos videmus
 Venerem in superiori conjunctione penitus rotundam, quum
 prius in parte occidentali Solis erat, et quum ergo luxisset ante
 ortum Solis qua Phosphorus seu Lucifer. Post superiore
 conjunctionem est ex orientali parte Solis, et lucet post occasum
 Solis qua Hesperus. Quum enim appropinquatur inferiori

conjunctioni

conjunctione: quia lucidus discus habet formam fatis, & an apparet
 ubi in intervallo fatis, donec tandem in inferiori conjunctione spectetur
 avanceat. Plats Veneris, que terra suam lucem mittit, vadit qui
 tam semper minor, sed quoque lucidior, quia Venus appropinquat
 terra. Clarissimè lucebit igitur in aliqua digressione a Sole, que
 facile sequenti modo inveniri potest, si assumantur orbis que circuli
 concentrici.

Ex photometria præsupponere possumus, illustrationem quam acquirit objectum a liquo a sphaera
 se habere inverse uti quadrata distantiarum. hujus sphaera.
 Quum autem hic terra non a tota superficie sphaerica illuminatur,
 natur, sed tantummodo ab aliqua parte, que se habet ad circum
 tum maximum sphaerae uti $1 + \cos VWS : 2$, ratio illuminationis,
 quam accipit terra a Venere in quolibet situ, erit $\frac{1 + \cos VWS}{2}$,
 quod debet esse maximum. Ponatur $TS = R$, $VS = r$, $TV = x$, dicitur
 est $\cos VWS = \frac{r^2 + x^2 - R^2}{2rx}$ At $1 + \cos VWS = \frac{(r+x)^2 - R^2}{2rx}$ hinc illuminatio
 tio est in ratione $\frac{(r+x)^2 - R^2}{2rx}$

Si hæc expressio differentietur respectu quantitatis x ponendo R
 et r constantes, casus hic maximus dabit equationem

$$0 = x^2 + 4rx - 3(R^2 - r^2) \text{ ex quo dicitur}$$

$$x = -2r + \sqrt{3R^2 + r^2}$$

ponendo nunc $r = R.0.72333$ erit

$$x = R.0.43$$

Ad quum sit $\cos VWS = \frac{x^2 + R^2 - r^2}{2Rx}$ erit $= 0.76913$

At $VWS = 39^\circ 43'$ qui arcus est digressio Veneris a Sole, si quis
 lux maxime splendet. Quum autem Venus in quolibet parte
 Solis habeat digressionem, sic acquirat, aut et post maximam di
 gressionem 46° notare debemus, maximam illuminationem esse
 hic illa digressionem $39^\circ 43'$, que inter maximam digressionem
 et inferiorem conjunctionem cadit quia $x < R$ est.

Orbita planetarum, que se ex utraque parte ab ecliptica removent,
 non potest gærere in plano ecliptico, sed illuminat sub angulo,
 qui vocatur inclinatio orbis planetaris, et qui angulus co
 incidit cum maxima latitudine planct.

Si plerumque orbis planctus per terram transit maximam
 geocentrica latitudo in ambabus partibus eclipticis eundem
 debet esse magnitudinis; si autem hoc ultimum non locum
 habet, sequitur: terram non semper esse in plano orbis pla-
 netae. Quam nunc observationes ostendebant, maximum
 apparentem latitudinem planetarum in quolibet anno,
 variatione admodum diversam esse, et v. c. aequae Venerae
 ab 1° — 8° crescere; quum praeterea haec mutatio maxi-
 me latitudinis non a longitudine planetarum, sed ab eo-
 rum situ versus Solem dependat, ex hoc sequebatur verum
 mathematicum, et generalium argumentum maxime moneri,
 si non tra systema Ptolemaicum, et naturaliter Astro-
 nomia excitari debebant methodum planetarum comparandi
 cum Sole non cum terra. Conabantur igitur Astronomi
 derivare ex observatis latitudinibus, quae propter suam
 irregularem variationem non poterant esse verae, illas,
 quas haberet planeta a Sole visus, et invenirent haec ra-
 tione, maximas rationes heliocentricas omnium planetarum
 ex utraque parte eclipticis semper esse aequales, et generationem
 se mutare, si comparantur cum heliocentricis longitudi-
 nibus, secundum legem, quae locum habet secundum
 doctrinas Geometricas pro duobus se secantibus planis.
 Concludere igitur debuerunt, plana omnium planetarum
 planetarum per Solem et non per terram transire, vel
 planetas revolvi non circa terram sed circa Solem. Haec
 disquisitio autem praesupponit problema, ex geocentrica
 longitudine et latitudine alicujus planetae, heliocentri-
 cam et inverse invenire; et facile videmus, quamlibet ob-
 servationem tantum modo dare aliquem angulum.

Ut autem innotescant ceteri anguli trianguli, ratio laterum debet esse nota: hinc dependet tota theoria planetarum a problema, procurare eorum distantiam a terra vel Sole in ratione distantie terre a Sole. Kepler excoxit pri-
mus methodos resolvendi hoc problema.

• Motus Ellipticus.

Observationes Ascensionis recte et Declinationis Solis dant, uti diximus in prioribus, planum plani, in quo Sol, vel potius terra movetur. Soli est α et δ observata ascensio recta et declina-
tio, ex Sole visa ascensio recta et Declinatio A et D terre, facile derivari potest, si ascensio recta Solis 180° augetur, et ejus declinatio, mutato signo summatur, vel erit $A = \alpha + 180^\circ$
et $D = -\delta$. Quomodo autem invenitur nunc linea curva in hoc plano, in quo revera centrum terre movetur? ad hoc inveniendum, uti in precedentibus diximus, debent esse notae
diversae distantiae Diversis temporibus horum astronomarum. —
Simplicissimum medium nobis suppeditat observatio diametri Solis.

Si apparentes diametri Solis et etiam ejus celeritates (h.e. ejus diurni motus in longitudine) quolibet die anni essent aequales, sequeretur, orbitam Solis esse circulum in cujus centro quiesceret terra vel prope, orbitam terre esse circulum, in cujus centro quiesceret Sol. Sed observationes ostendunt et diametros et celeritates mutari, et acquirere in duobus sibi oppositis punctis maximum et minimum valorum. Spiritus Januarii nimirum, maxima diameter $D = 1955''.6$ et maxima celeritas per diurnos motus in longitudine $dv = 36''.24$. Ad finem Junii autem sunt minimi valores, scilicet quantitas $d = 1891''.6$ et $dv = 3433''.6$.

Possibile est, has variationes celeritatum terre tantum esse

appe apparentibus, vel terram tamen moveri in circulo, h. e. uniformi celeritate, Solem autem non esse in centro hujus circuli. Si autem observata variatio celeritatis terrae talium modo hanc causam habet, et vera celeritas terrae in sua orbita constans. Est, ejus apparentes celeritates debent se habere uti diametri apparentes Solis, vel nos haberemus $\frac{dv}{dr} = \frac{D}{r}$.

Est autem $\frac{dv}{dr} = 10695$ et $\frac{D}{r} = 1.0342$. Hinc non est $\frac{dv}{dr} : \frac{D}{r} = 1$ uti hoc deberet esse secundum hanc hypothesin. Quam autem $\frac{D}{r} = 1.0695$ quoque est $\frac{dv}{dr} : \frac{D}{r} = 1$ vel $\frac{dv}{dr} = \frac{D^2}{r^2}$ vel celeritates crescant et decrescant in duplo majori ratione, quam diametri. Ergitur quod motum terrae si a sole remouetur, locum habet vera diminutio celeritatis, et tunc orbita terrae non est circulus. —

Si autem est r maxima distantia Solis a terra, ad quam celeritas dv et diameter solis d pertinet et R minima distantia, cum est $R = d$ hinc quoque $\frac{dv}{dr} = \frac{dv}{dr}$, et quoniam secundum priora, uti hoc ostendunt observationes, quantitates D, R, dv, p, secundum eandem legem per totam orbitam variant, ultima aequatio quoque valuit, si dv est celeritas cujusvis puncti solis ad quod pertinet distantia r, et quoniam R et dv sunt quantitates constantes, erit generatim $r dv = A$, ubi A est quantitas constans. Quaecumque igitur sit haec linea curva, quae a terra describitur, in quolibet puncto hujus lineae productum ex quadrato distantiae Solis a terra et celeritate terrae, est quantitas constans. —

Omnes mensurationes apparentium diametrorum hujus affini comprobant hoc resultatum. Ubi autem primus $r dv$ est expressio areae quolibet die descripti sectoris orbitae seu arcus per distantiam r in uno die circa terram descripta. Haec area igitur est constans, et tota per distantiam r descripta area, si ab aliqua immobili distantia prima in ipsum, crescit uti numerus elapsorum dierum a momento, quando terra erat in prima distantia, vel aliis verbis:

Arcus per distantias terrae a Sole descriptas temporibus sunt pro-
portionales.

Ad inveniendas rationes harum duarum distantiarum index e-
rit r' distantia in qua celeritas terrae secundum medium valorem
 $dv' = \frac{dv}{2} = 3553.0$ habet, deinde est: $R = r' \sqrt{\frac{dv'}{dv}}$ et $r = r' \sqrt{\frac{dv'}{dv}}$ vel
si haec distantia assumitur pro unitate erit

$$R = 0.9886, \quad r = 1.0172 \quad \text{et} \quad \frac{r-R}{2} = 0.0168$$

per quod maxima et minima distantia Solis in partibus ejus
medias distantias data est. —

et nunc quotidie longitudo Solis ejusque celeritas observatur, quod
primum dat spem, et secundum magnitudinem distantias r , et
si per extrema puncta omnium harum distantiarum ducitur
linea curva, videmus, hanc lineam curvam non accurate esse
circularem. Statim quilibet videt similitudinem hujus li-
neae cum ellipsi, et ex hac ratione fuit haec linea comparata
cum ellipsi, et deinde ex inventa concordantia conclusum est:
Orbitam terrae esse ellipsin, in cujus foco centrum Solis est.

Atque duas fundamentales leges motus, alia via expressius commoda
sunt inventae, cujus enucleatio autem pertinet ad historiam Astro-
nomiae. Tantummodo notare possumus, jam Astronomi prioribus
temporibus potuissent hanc viam persequi, etiam si tunc imper-
fecta instrumenta habuerunt, si fecissent applicationem illius
quod modo dictum est, ad lunam, apud quam mutationes diametri
et celeritatis magis notabiliores sunt, quam apud Solem, uti vide-
bimus inferius. — Si ergo notus est secundum praecedentia
locus orbis terrae et forma lineae curvae in qua movetur, vel ex
centricitas ellipsos, quae prius aequalis 0.0168 partibus mediarum di-
stantiarum Solis a terra inventa est, facile, si unus locus Solis vel terrae
in orbita pro aliquo tempore notus est, ejus locus pro quolibet alio
tempore determinari poterit. — Ad hunc finem nobis imaginari
volumus punctum quod uniformiter in circulo movetur, ejus

centrum est illud terra, et ejus radius est aliqua distantia
Solis a terra v. c. minima harum distantiarum. Nominare
volumus hoc punctum Solis medium. Quum Sol secundum obser-
vationes semper in iisdem intervallis ad punctum minimae di-
stantiae reveriat, quae periodus vocatur ejus revolutio; assumere
volumus, medium Solis habere eandem revolutionem cum vero
et cum hoc simul exire ex illo puncto minimae distantiae. Interea
~~quum~~ quum radius medi Solis uniformiter moveatur circa terram
radius veri Solis differtur, quum semper cum primo
distantia per locos ellipticos describat, qui temporibus sunt propor-
tionales. Ambo radii interea nunquam a se invicem erunt ad
modum distantes, quia excentricitas ellipsos secundum priora
respectu ejus semiaxis est parva.

Simplex additio dabit pro qualibet tempore locum medi Solis,
cujus motus temporis proportionalis est, et si huic loco medi
Solis, addatur angulus, quem ambo radii medi et veri Solis in
centro terrae formant, habebimus locum veri Solis. Determina-
tio hujus anguli autem, est problema maximi momenti, de
quo nunc agere volumus.

Per T volumus designare revolutionem amborum Solium, et cum
incipere volumus in illo puncto orbite, ubi velocitas Solis est maxi-
ma, vel ejus distantia a terra minima. Post aliquod tempus
 t diurnum a transitu utriusq. Solis per hoc punctum, angulus
radii medi Solis cum primo radio erit aequalis $\angle COT = m$.
Et eadem ratione v angulus radii veri Solis tempore t cum
primo radio et r distantia veri Solis in hoc tempore a centro
terrae. Nominetur a media distantia seu semiaxis major a Sole
descriptae ellipsos, ubi et ae ejus excentricitas, Vnde est, uti
fatis notum;

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad \text{aequatio ellipsos}$$

Si autem if est area, quam radius r tempore t , $\frac{1}{2} F$ area, quam
radius tempore T describit, hinc $\frac{1}{2} F$ tota area ellipsos, Vnde
habetur

habemus, quem speciemus præcedentia hoc erit, se habent uti trigon.

$$T:t = \frac{1}{2}f: \frac{1}{2}p \text{ vel}$$

$$f = \frac{2p}{T} \cdot t$$

Est autem $\frac{1}{2}f = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$, ubi π est ratio semi peripheriæ ad radium circuli, hinc quoque $df = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} dt$

et quoniam $df = r dv$, erit, si hi ambo valores quantitatis df sibi æquales ponantur, et pro r prior valor, ubi pro dt suus valor $\frac{2\pi}{T} dm$ substituitur,

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{(1+\varepsilon \cos v)^2}$$

Ut autem hoc ex præfatis facilius integrari possit, ei possumus dare sequentem formam:

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{[(1+\varepsilon) \cos^{\frac{1}{2}} v + (1-\varepsilon) \sin^{\frac{1}{2}} v]^2}$$

$$= \frac{dv}{(1+\varepsilon)^2 \cos^{\frac{1}{2}} v \{1 + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \tan^{\frac{1}{2}} v\}^2}$$

Ut quoque hæc expressio simplicior evadat, fit

$$\tan^{\frac{1}{2}} u = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \tan^{\frac{1}{2}} v \text{ Dein est}$$

$dm = du (1-\varepsilon \cos u)$ et integrale hujus æquationis est

$$m = u - \varepsilon \sin u, \text{ supposito } t \text{ vel } m \text{ finit sum}$$

u et v evanescere.

Quantitas igitur quantitate m ex $m = 360 \frac{T}{f}$, generatur u ex æquatione $m = u - \varepsilon \sin u$ et v ex $\tan^{\frac{1}{2}} v = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan^{\frac{1}{2}} u$ et standum est $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v}$, et per quantitates v , r , hinc veri solis erit determinatus, si situs puncti iudicialis quantitatum m , u , v ... datus est. Vocetur m media anomalía, u excentrica, et v vera anomalía, et r radius vector solis.

Easdem expressiones quoque alia via, immediata et primis legibus motus derivare possumus.

Si situs terre versus centrum solis per coordinates rectangulares x et y datus est, ubi x jacet in linea quæ per puncta maximæ et minimæ celeritatis transit, dein est, si S designet

Data est formula $\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{(1+\varepsilon)^2 \cos^{\frac{1}{2}} v \{1 + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \lg^{\frac{1}{2}} v\}^2}$ et hinc deducenda est simplior

formula $dm = du(1-\varepsilon \cos u)$ si ponatur $\lg^{\frac{1}{2}} u = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \lg^{\frac{1}{2}} v$

1^o Differentiatur aequatio $\lg^{\frac{1}{2}} u = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \lg^{\frac{1}{2}} v$. Differentiale huius aequationis est

$$\lg^{\frac{1}{2}} u \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \lg^{\frac{1}{2}} v \frac{dv}{\cos^{\frac{1}{2}} v} \text{ ita inde } dv = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{\cos^{\frac{1}{2}} v}{\lg^{\frac{1}{2}} v} \cdot \lg^{\frac{1}{2}} u \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{\cos^{\frac{3}{2}} v}{\sin^{\frac{1}{2}} v} \cdot \lg^{\frac{1}{2}} u \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u}$$

proposito hoc valore in aequatione data erit $\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{\cos^{\frac{3}{2}} v}{\sin^{\frac{1}{2}} v} \cdot \lg^{\frac{1}{2}} u \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u}}{(1+\varepsilon)^2 \cos^{\frac{1}{2}} v \{1 + \lg^{\frac{1}{2}} u\}^2} =$

$$= \frac{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \lg^{\frac{1}{2}} u \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u}}{(1+\varepsilon)^2 \cos^{\frac{1}{2}} v \sin^{\frac{1}{2}} v \{1 + \lg^{\frac{1}{2}} u\}^2}$$

Quum autem ex trigonometria scimus $\sin^{\frac{1}{2}} v = \frac{\lg^{\frac{1}{2}} v}{1 + \lg^{\frac{1}{2}} v}$

et $\cos^{\frac{1}{2}} v = \frac{1}{\sqrt{1 + \lg^{\frac{1}{2}} v}}$ ergo $\cos^{\frac{1}{2}} v \sin^{\frac{1}{2}} v = \frac{\lg^{\frac{1}{2}} v}{1 + \lg^{\frac{1}{2}} v}$ propositis

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \lg^{\frac{1}{2}} u \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u}}{(1+\varepsilon)^2 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \frac{\lg^{\frac{1}{2}} u}{1 + \lg^{\frac{1}{2}} u} \{1 + \lg^{\frac{1}{2}} u\}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \frac{\lg^{\frac{1}{2}} u \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u}}{(1+\varepsilon)^2 \{1 + \lg^{\frac{1}{2}} u\}^2}$$

valoribus ex aequatione assumpta pro angulo auxiliaris habebimus $\cos^{\frac{1}{2}} v \sin^{\frac{1}{2}} v = \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \lg^{\frac{1}{2}} u}{1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \lg^{\frac{1}{2}} u}$ ponatur hic valor

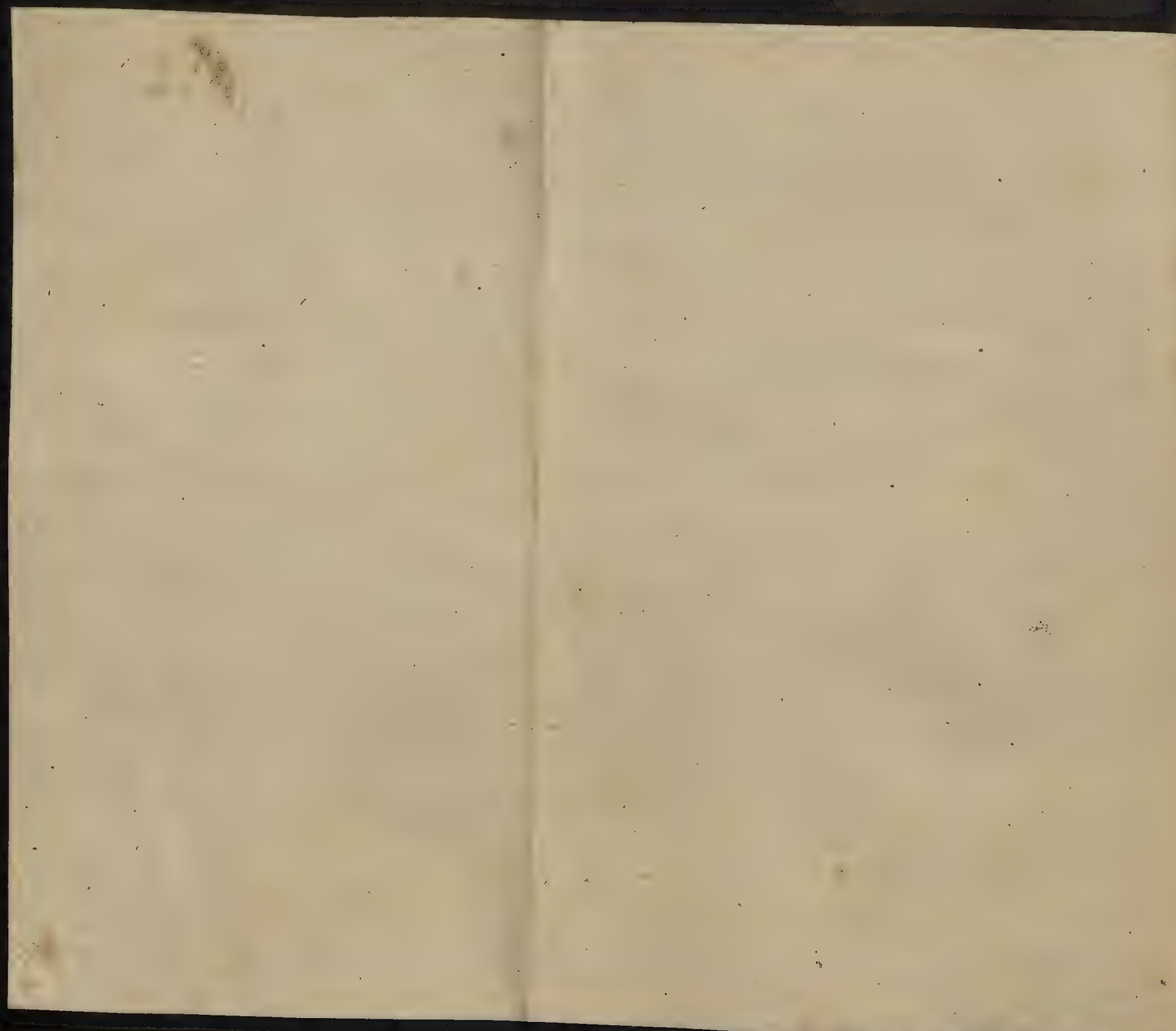
in ultima aequatione pro $\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$ habebimus

$$\text{ergo } dm = \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u} \cdot (1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{\frac{(1+\varepsilon)^2}{1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \lg^{\frac{1}{2}} u} \{1 + \lg^{\frac{1}{2}} u\}^2} = \frac{\frac{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u}}{\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon + (1+\varepsilon) \lg^{\frac{1}{2}} u} \{1 + \lg^{\frac{1}{2}} u\}^2} = \frac{\frac{(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{(1-\varepsilon)} \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u}}{\frac{1}{1-\varepsilon + (1+\varepsilon) \lg^{\frac{1}{2}} u} \{1 + \lg^{\frac{1}{2}} u\}^2} =$$

$$= \frac{(1-\varepsilon) \frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u}}{1-\varepsilon + (1+\varepsilon) \lg^{\frac{1}{2}} u \{1 + \lg^{\frac{1}{2}} u\}^2} = \frac{\frac{du}{\cos^{\frac{1}{2}} u} (1-\varepsilon + \lg^{\frac{1}{2}} u + \varepsilon \lg^{\frac{1}{2}} u)}{(1 + \lg^{\frac{1}{2}} u)^2} = \frac{du(1-\varepsilon + \lg^{\frac{1}{2}} u + \varepsilon \lg^{\frac{1}{2}} u)}{\cos^{\frac{1}{2}} u (\cos^{\frac{1}{2}} u + \sin^{\frac{1}{2}} u)^2} =$$

$$= \frac{du(1-\varepsilon + \lg^{\frac{1}{2}} u + \varepsilon \lg^{\frac{1}{2}} u)}{\cos^{\frac{1}{2}} u (\cos^{\frac{1}{2}} u)^2} = \cos^{\frac{1}{2}} u du(1-\varepsilon + \lg^{\frac{1}{2}} u + \varepsilon \lg^{\frac{1}{2}} u) = du(\cos^{\frac{1}{2}} u - \varepsilon \cos^{\frac{1}{2}} u + \sin^{\frac{1}{2}} u + \varepsilon \sin^{\frac{1}{2}} u) =$$

$$= du(1-\varepsilon(\cos^{\frac{1}{2}} u - \sin^{\frac{1}{2}} u)) = du(1-\varepsilon \cos u) \text{ ergo } dm = du(1-\varepsilon \cos u)$$



designat vim Solis, et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est distantia Solis a terra,
 $S \frac{dx}{dt}$ est haec vis parallela cum axi x , $S \frac{dy}{dt}$ eadem vis parat,
 perpendicularis axi y de composita. Si diu designet dt constans
 elementum temporis, diu habemus pro motu terrae sequentes sim-
 plices aequationes:

$$\frac{dx}{dt} + S \frac{x}{r} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + S \frac{y}{r} = 0$$

ex quibus aequationibus facile inueniuntur

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = A - 2 \int S dr \text{ et } x dy - y dx = B dt \text{ ubi } A \text{ et } B$$

sunt constantia Integrationis.

Ut his expressionibus simpliorem denus formam, fit v angularis
 radii r cum axi x , diu est $x = r \cos v$ et $y = r \sin v$, per quae
 priores aequationes transeunt in sequentes:

$$r \frac{dv^2}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} = A - 2 \int S dr \text{ et } r^2 dv = B dt$$

et haec ultima expressio continet, uti quilibet videt, legem pri-
 mo jam inuentam, spatii a radio descripta esse temporibus
 proportionalia.

Si ex his duabus aequationibus eliminatur quantitas dt ,
 erit

$$\frac{B^2}{r^2} + \frac{B^2 dr^2}{r^4 dv^2} = A - 2 \int S dr$$

et haec aequatio dabit vim S , si linea curva est nota, in qua
 terra movetur. Haec linea autem est secundum observationes
 ellipsis, in cuius foco centrum Solis est. Aequatio ellipsos au-
 tem est: $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v}$ hinc erit $\frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon \cos v}{a(1-\varepsilon^2)}$ et $\frac{dr}{r^2} = \frac{\varepsilon \cos v \sin v}{a(1-\varepsilon^2)}$
 et $\frac{1}{r^2} = \frac{(1+\varepsilon \cos v)^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2}$ et $\frac{dr^2}{dv^2 r^4} = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2}$ praeterea $\cos v = \frac{a(1-\varepsilon^2)-r}{\varepsilon r}$

hinc $\frac{B^2(1+\varepsilon \cos v)^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{B^2 \varepsilon^2 \sin^2 v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} = A - 2 \int S dr$ vel

$$\frac{B^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{2B^2 \varepsilon \cos v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{B^2 \varepsilon^2 \cos v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{B^2 \varepsilon^2 \sin^2 v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} = A - 2 \int S dr$$

$$\frac{B^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{2B^2 \varepsilon \cos v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{B^2 \varepsilon^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} = A - 2 \int S dr \text{ et substitutae}$$

pro $\cos v$ suo valore et abbreviatione facta

$$\frac{2B^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} - \frac{B^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = A - 2 \int S dr,$$

ejus differentiale est $S = \frac{B^2}{g(1-\varepsilon^2)} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{B^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$ ubi $p = a(1-\varepsilon^2)$
 est semiparameter ellipticus. Actio Solis igitur in aliquod circa
 illum motum corpus se habet inverse ut quadratum distantia
 Solis ab hoc corpore. Quantitas $\frac{B^2}{p}$ quae brevitas causa
 ut nominare volumus, est naturaliter inemptas vis in di-
 stantia = 1. — Propterea erat $r dr = B dt$ vel $\int r dr = Bt$. Si
 autem $\frac{1}{2} f$ est area sectoris, erit $f = \int r^2 dr$, hinc $f = Bt$ vel
 $f = t u v p$. Ut ex hac expressione inveniat, p , est pro
 terra, si semiaxis ejus orbitae assumatur pro unitate, area
 totius ellipticae $\frac{1}{2} f = \pi v p$, et secundum observationes ejus
 revolutio circa Solem $T = 365.256384$, hinc

$$\mu = \frac{f}{T v p} = \frac{2\pi}{T} = 0.0172021$$

et μ est distantia in radiis terrae a centro Solis, in quo ejus
 actio est aequalis unitati vel aequalis gravitati in superficie
 nostrae terrae. Haec distantia in radiis terrae ipso expressa,
 erit igitur $\frac{\mu}{\sin \omega}$ ubi ω est parallaxis Solis. —

Si hac ratione vis, seu actio data est, inverse statim hanc curvam
 invenire possumus, quae corpus, in quod haec vis agit, describit. Si
 nimirum in aequationibus fundamentatis pro S ejus valor
 $\frac{\mu^2}{r^3}$ substituitur, erit:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= 0, & \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0 & \text{ex quibus sequitur} \\
 \frac{dx dx}{dt^2} + \frac{\mu x dx}{r^3} &= 0, & \frac{dy dy}{dt^2} + \frac{\mu y dy}{r^3} &= 0 & \text{vel} \\
 \frac{dx dx}{dt^2} + \frac{dy dy}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} (x dx + y dy) &= 0 & \text{vel} & \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu^2}{a} = 0
 \end{aligned}$$

$x dy - y dx = u dt v p$ ubi a et p sunt constantes integrationis.

Si etiam hic ponitur $x = r \cos v$, $y = r \sin v$, priores aequationes tran-
 sibunt in has: $\frac{dr^2 r dv^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu^2}{a} = 0$ et $r dv = \mu dt v p$
 Si ex his aequationibus eliminatur quantitas dt et ponitur sim-
 plicitatis causa $r = \frac{1}{x}$, erit: $dt = \frac{r dv}{\mu v p}$, $dt^2 = \frac{r^2 dv^2}{\mu^2 p^2}$, $\frac{1}{r} = x$, $\frac{dx}{r} = dx$
 ergo $\frac{\mu p (r^2 dv^2 + dr^2)}{r^4 dv^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu^2}{a} = 0$, vel $\frac{\mu^2 p}{r^2} + \frac{\mu p dr^2}{r^4 dv^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu^2}{a} = 0$

vel
$$\mu^2 p^2 z + \frac{\mu^2 p dz^2}{dv^2} - 2\mu^2 z + \frac{\mu^2}{a^2} = 0 \quad \text{multiplicando per } p$$

$$p^2 z + \frac{p^2 dz^2}{dv^2} - 2p^2 z + \frac{p^2}{a^2} = 0$$

$$dv(-p^2 z + 2p^2 z - \frac{p^2}{a^2}) = p^2 dz^2 \text{ ex quo}$$

$$dv = \frac{p dz}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{a^2} - (1-p^2)z^2}} \quad \text{vel} \quad dv = \frac{\frac{p dz}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{a^2}}}}{\sqrt{1 - \frac{(1-p^2)z^2}{1 - \frac{p^2}{a^2}}}}$$

et integrale $v = \text{Arc cos } \frac{1-pz}{\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}}$ et $\cos v = \frac{1-pz}{\sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}}$ ex quo

$$pz = 1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{a^2}} \cos v$$

Si $r=p$ pro $v=90^\circ$ est. Si nunc iterum ponitur $\varepsilon = \frac{1}{a}$ et $1 - \frac{p^2}{a^2} = \varepsilon^2$ erit $\frac{p}{a} = 1 - \varepsilon \cos v$ et $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v}$ pro aequa-

tione quaesita linea curva, quae ergo est sectio conica, cujus se-
 minor major a , semiparameter p et excentricitas ε est.

Hae linea igitur est ellipsis, hyperbola aut parabola, si a
 est quantitas positiva, negativa aut imaginaria, vel etiam, si
 ε minor, major, vel aequalis unitati est.

Si ex aequationibus $\frac{dr^2 + r dv^2}{dt^2} = \dots$ eliminetur dv erit

$$dt = \frac{\sqrt{a^2} \cdot r dr}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (a-r)^2}}$$

Ad simplificationem huius expressionis ponatur
 $r = a(1 - \varepsilon \cos u)$ tunc erit

$$\frac{u}{a^2} \cdot dt = (1 - \varepsilon \cos u) du \quad \text{et integrale}$$

$$\frac{u}{a^2} dt = u - \varepsilon \sin u \text{ si } u \text{ cum } t \text{ evanescit.}$$

Atque ultima aequatio dat u , si t est notum, et ex hoc deinde quan-
 titas r ex $r = a(1 - \varepsilon \cos u)$ et v ex $\cos v = \frac{a(1-\varepsilon^2) - r}{r\varepsilon}$.

Si nunc comparantur ambo valores quantitatis r , erit

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v} = a(1 - \varepsilon \cos u) \text{ ex quo}$$

$$1 - \varepsilon \cos u = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon \cos v} \quad \text{vel} \quad \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} v = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} u$$

Si nunc T revolutio aliquis planctus, et a semiaxis ejus orbis,
 prior aequatio $\frac{u}{a^2} t = u - \varepsilon \sin u$ transibit in hanc simpliciorum?

$$T = \frac{2\pi a^3}{\mu} \quad \text{vel} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu^2} \quad (\because m = a - \varepsilon \sin u) \text{ ubi } \pi \text{ est ratio periph}$$

peripheria ad diametrum circuli. Si neglectur massa planeta-
rum respectu illius admodum maioris, massae Solis, si est quan-
titas, quae pro omnibus planetis et cometis nostri systematis solaris
est constans, tunc sub hac suppositione, quadrata revolutionum
se habent uti cubi axium majorum.

Secundum observationes est:

pro Terra $T = 365.256384$ et $a = 1$

pro Marte $T = 686.979579$ et $a = 1.523693$

Si hi valores Martis et terrae in ultima aequatione substi-
tuantur, erit:

$$\log \frac{4\pi^2}{a^3} = 5.125195 \text{ vel quoniam } \log 4\pi^2 = 1.896360$$

$$\log \mu = 8.235582 \text{ et } \mu = 0.0172621 \text{ uti prius.}$$

Est igitur pro omnibus corporibus nostri systematis

$$T^2_{\text{dies}} = (365.2564)a^3$$

Aequationes fundamentales huius disquisitionis supponunt
orbitam esse lineam curvam planam. Est haec suppositio
propter naturam rei concessa est, quamvis, tantummodo duo
ad se invicem agentia corpora considerantur, tamen indepen-
denter ab illa suppositione hoc problema resolvere possumus.

Si nimirum et tertiam coordinatam respiciamus, primae funda-
mentales leges motus dant sequentes aequationes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \mu \frac{x}{r^3} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} + \mu \frac{y}{r^3} &= 0 \\ \frac{dz}{dt} + \mu \frac{z}{r^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- (A)}$$

Si prima multiplicetur per y secunda per x , earum differen-
tia dat

$$\left. \begin{aligned} xdy - ydx &= c'dt \\ xdz - zdx &= c''dt \\ ydz - zdy &= c'''dt \end{aligned} \right\} \text{--- (1)}$$

ubi c, c', c'' sunt constantes integrationis.

Si priores aequationes respective multiplicandus per $2dx, 2dy, 2dz$, earum summa dat integrato, quoniam

$$\int x dx + y dy + z dz = \int \frac{dr}{r} = -\frac{1}{r} \text{ est,}$$

$$0 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu^2}{r} + \frac{\mu^2}{a} \quad \dots (2)$$

sibi a est constans.

Si autem eadem aequationes multiplicantes per x, y, z et si addatur summa horum trium productuum ad aequationem (2) et notatur, esse

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + x dx + y dy + z dz = d^2 \left(\frac{r^2}{2} \right) = dr^2 + r dr, \text{ erit}$$
$$0 = \frac{d^2(r^2)}{2 dt^2} + \mu^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) dx$$

Si porro prima aequationum (1) per r dr multiplicatur, eique addatur haec ultima aequatio, erit

$$0 = \mu^2 \left\{ dx \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) + \frac{x dr}{r} \right\} + \frac{1}{2} d^2(r^2) \cdot \frac{dx}{dt^2} + \frac{r dr \cdot dx}{dt^2}$$

atque cuius integrale

$$0 = f + \mu^2 x \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) + \frac{r dr \cdot dx}{dt^2}$$

ubi f est quantitas constans.

Aequatio (2) autem dat $\mu^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ praeterea

est $r dr \cdot \frac{dx}{dt^2} = (x dx + y dy + z dz) \cdot \frac{dx}{dt^2}$ hinc ultima expressio trans-

bit in.

$$\left. \begin{aligned} 0 &= f + x \left(\frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) + (y dy + z dz) \cdot \frac{dx}{dt^2} \\ \text{et eadem ratione} \quad 0 &= f' + y \left(\frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} \right) + (x dx + z dz) \cdot \frac{dy}{dt^2} \\ 0 &= f'' + z \left(\frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} \right) + (x dx + y dy) \cdot \frac{dz}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Ita septem aequationum (1), (2), (3), continent septem quantita-

tes constantes c, c', c'', f, f', f'' et a, quae autem ad quinque re-

ducuntur. — Si nimirum prima aequationum (3) per $\frac{r dr - y dz}{dt^2}$ et secunda per $\frac{x dz - z dx}{dt^2}$ multiplicatur, eorum summa dabit

$$0 = \frac{f c' - f' c''}{c} + z \left(\frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} \right) + \frac{(x dx + y dy) \cdot dz}{dt^2}$$

Si haec aequatio comparatur cum ultima aequationum (3) est

$$0 = f c'' + f'' c + f' c', \text{ quae aequatio est prima aequatio}$$

conditionalis inter has constantes. Si brevitate causa ponatur $f^2 + f'^2 + f''^2 = F^2$ et $c^2 + c'^2 + c''^2 = C^2$, dein dant aequationes (3) si elevantur ad quadratum et dein addantur:

$$F^2 - \mu^4 = \left(\frac{2\mu^2}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) \cdot \left(\frac{r^2 dr^2}{dt^2} - \frac{r^2}{dt^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \right) \dots (4)$$

Si eadem ratione tractantur aequationes (1), erit.

$$r^2 \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) - \left(\frac{rdr}{dt} \right)^2 = C^2 \quad (b)$$

hinc erit aequatio (a)

$$0 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu^2}{r} + \frac{\mu^4 F^2}{C^2}$$

et haec comparata cum aequatione (2) dat

$$\frac{\mu^4 F^2}{C^2} = \frac{\mu^2}{a}$$

que aequatio est secunda aequatio conditionalis illarum constantium.

Si nunc multiplicentur aequationes (3) respective per x, y, z earum summa dat:

$$fx + fy + fz = \frac{r^2}{dt^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{rdr^2}{dt^2} - \frac{\mu^2}{r}$$

que cum (b) conjuncta dat

$$-\frac{\mu^2}{r} + C^2 = fx + fy + fz \quad (c)$$

Præterea multiplicentur aequationes (1) respective per $z, -y, x$, earum summa dabit

$$0 = ex - cy + dz \quad (d)$$

et haec ultima aequatio, est aequatio plani, in quo corpus movetur. Si dein κ est angulus, quem linea nodorum hujus plani in plano xy cum axi x format, et n inclinatio horum planorum, dein est (Geom. analyt.)

$$\lg \kappa = \frac{e''}{e'} \quad \text{et} \quad \lg n = \frac{\sqrt{e'^2 + e''^2}}{e'}$$

Duae aequationes (c) et (d) dant eadem ratione

$$\frac{C^2}{\mu^2} - r = \frac{x}{\mu e'} \{ef - e'f''\} + \frac{y}{\mu e'} \{ef' + e'f''\}$$

A hac est generalis aequatio linearum secundæ ordinis. Si nimirum p est semiparameter, e. ratio excentricitatis ad semiaxem majorem, et p distantia nodi a puncto D orbitæ corporis, quæ soli est vicinissimum, dein est, si κ et n suam priorum significationem retineant, generalis aequatio sectionum conicarum.

$$p - r = ex \left\{ \cos \kappa \cos \psi + \frac{\sin \kappa \sin \psi}{\cos n} \right\} + ey \left\{ \sin \kappa \cos \psi - \frac{\cos \kappa \sin \psi}{\cos n} \right\}$$

Si hæc duas representationes inter se comparabimus, obtinetur

$$\lg \psi = \left(\frac{ef'' - e'f'}{ef' + e'f''} \right) (\cos n)^{-1}$$

Si dein φ est angulus lineæ nodorum cum distantia puncti D a Sole in plano xy projecta, est

$$\lg \varphi = \lg \psi \cos n$$

et si π est ad planum xy reducta longitudo puncti D , erit

$\log \varphi = \log (k - \pi)$ ex quo sequitur $\log \pi = \frac{f}{k}$
 Si aequatio (b) coniungatur cum aequatione (2) obtineatur

$$C^2 = r^2 \mu^2 \left(\frac{r}{r'} - \frac{1}{a} \right) - \frac{r dr}{dt^2} \dots \dots (c)$$

pro maximis et minimis valoribus quantitas r est $dr = 0$, tunc
 ultima aequatio $0 = r^2 \mu^2 \frac{r}{r'} - \frac{a C^2}{\mu^2}$ et ex hac aequatione

$$r = a + \frac{a C^2}{\mu^2 r'} \text{ vel } = a - \frac{a C^2}{\mu^2 r'}$$

(A) semiaxis major $\frac{r+r'}{2} = a$, excentricitas $\frac{r-r'}{2} = ae = \frac{a C^2}{\mu^2 r'}$

et semi-parameter $p = \frac{C^2}{\mu^2}$ et $C^2 = \mu^2 a (1 - e^2)$, ergo quoque aequatio (c)

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\mu \sqrt{r - \frac{r^2}{a} - a(1 - e^2)}}{r^2}$$

Si assumitur ad faciliorem integrationem quantitas auxiliaris
 u ita, ut $\frac{r}{a} = 1 - e \cos u$ erit $\frac{dt}{du} = \frac{a^2}{\mu} (1 - e \cos u)$ du, cuius integrale
 uti prius $\frac{\mu t}{a^2} = u - e \sin u$.

Ceteri planetae et omnes cometes in suis revolutionibus circa
 Solem, uti et stellae fixae in suis motibus circa suas primarias
 planetas, praebent nobis similia phenomena, quae igitur pro-
 babilitur iisdem legibus erunt subiecta. quod et observationes com-
 probant. Planetas et cometes igitur etiam moventur in ellipsi-
 bus, in quarum uno foco est Sol. (Planetae in quibus orbita pla-
 neae planum eclipticae fecit, sunt Nodi orbitae, et quidem
 Ascendens α , si planeta post transitum per hoc punctum per-
 elevat supra eclipticam septentrionem versus; alter oppositus
 est Descendens ν , et hos Nodos coniungens linea recta, quae per
 centrum Solis transit, vocatur Linea nodorum. Angulus plani
 orbitae cum plano eclipticae, est inclinatio orbitae. Axis major
 ellipsos est linea apsidum, vel duplex media distantia pla-
 netae a Sole, et puncta extrema huius lineae sunt Perihelium
 quod Soli est vicinissimum, et Aphelium, quod maxime distat
 a Sole; ambo puncta simul vocantur Apsides. Distantia Pe-
 rihelii a Solis centro, est minima distantia, et distantia euiusla-
 bet alii puncti orbitae a Solis centro est Radius Vector huius
 puncti. Angulus ad centrum Solis inter nodum ascendentem
 et minimam distantiam, est distantia Perihelii a nodo, quae con-
 iuncta in nodo ascendente addita, dat longitudinem Perihelii.

Angulus ad Solis centrū inter radium ascendentem et radium
 declorem planetae in quolibet puncto suae orbitae, est argumentum
latitudinis, quod longitudini nodi ascendentis additum dat lon-
gitudinem planetae in orbita. Differentia argumenti latitudi-
 nis et projectionis huius argumenti ad planum eclipticæ est
reductio, quæ longitudini planetae in orbita addita, dat reductam
longitudinem planetae in ecliptica. Tempus tandem, quo descri-
 bit planeta unam circumferentiam, est ejus revolutio seu tem-
 pus periodicum, uti et locus, longitudo planetae in sua or-
 bita pro aliquo tempore vocatur Epocha planetae. Si iterum
 nobis imaginamur in plano orbitæ circa centrū Solis cir-
 culum cum quocumque radio descriptum, in ejus peripheria pun-
 ctum uniformiter movetur ita, ut ejus revolutio illi planetae
 æqualis sit, et ut cum planeta finem per perihelium at Aphe-
 lium transeat, hoc punctum vocatur medius planetae, angulus
 radii vectoris medii planetae ad distantiam minimam, est ano-
 malia medii seu medii anomalia veri planetae, uti et angu-
 lus radii vectoris planetae veri cum minima distantia, vera
anomalia. Differentia veræ et medii anomaliæ est æqua-
 lis orbis vel æquatio centri.

Ex his sequitur: si k est longitudo nodi ascendentis orbitæ
 planetae, p longitudo perihelii, π elongatio perihelii a nodo,
 v vera anomalia, s argumentum latitudinis, l longitudo
 in orbita, l' reducta longitudo in ecliptica, et ϵ reductio, dicitur

$$\begin{aligned}
 p - k &= \pi \\
 s &= v + \pi \\
 s &= v + p - k \\
 l &= s + k = v + p \\
 l' &= l + \epsilon
 \end{aligned}$$

Si præterea nota est media anomalia in planeta, quæ secundum
 priora semper facile inveniri potest, si epocha medii planetae
 seu tempus transitus per perihelium et ejus revolutio nota
 sunt, ex centrica anomalia u , radius vector r et vera ano-
 malia v planetae obtinetur per expressiones

$$m = 11 - 2 \sin u$$

$$\lg \frac{1}{v} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \lg \frac{1}{u}$$

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v} \text{ vel } r = a(1-\varepsilon \cos u).$$

ubi a est semiaxis orbitae, et $a\varepsilon$ ejus excentricitas.

Si nobis cogitemus nunc a planeta per perpendicularum ad axem majorem orbis, per axis majorem inter hoc perpendicularum et centrum ellipticos

$$\text{est } x = r \cos v + a\varepsilon \text{ vel quoniam } r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v} \text{ est } x = \frac{a-r}{\varepsilon}.$$

Si autem nobis imaginemur circulum cujus centrum est illud ellipticos, et cujus diameter est axis major ellipticos, istius perpendicularum pro longitudo peripheriam hujus circuli secabit in puncto, cujus distantia a centro ellipticos cum axi majori format angulum Q ista, ut sit $\cos Q = \frac{x}{a}$, vel si prior valor quantitatis x substituitur, ut $r = a(1-\varepsilon \cos Q)$. — Hinc hic angulus Q aequalis est, h. e. anomalia excentrica.

Nunc videbimus, quomodo inveniri possit pro qualibet tempore media longitudo L et media anomalia planetarum.

Si L est media longitudo, et m media anomalia, erit $p = L - m$ longitudo perihelii pro dato tempore t . Quare hoc media longitudo L et media anomalia m pro quolibet alio tempore t' .

Si T est longus periodicus planetae in diebus ejusq. partibus expressus, $360 = dL$ est ejus motus diurnus in media longitudine.

Assumamus deinde, etiam axem majorem esse mobilem et dp designare diurnum augmentum longitudinis perihelii. Si L' sit intervalum temporis est expressum quocumq. diebus, erit

$$L' = L + (L' - L) dL \text{ et}$$

$$p' = p + (L' - L) dp$$

$$\text{Sed } L = p + m \text{ et } L' = p' + m' \text{ ergo}$$

$$m' = m + (L' - L) dL - (L' - L) dp \text{ vel}$$

$$m' = m + (L' - L) (dL - dp)$$

Sic est pro Saturno 1808 Decembr. 31. $0^h 0' 0''$ Paris. tempore

$$L = 293^\circ 11' 42''$$

$$m = 143^\circ 57' 34'' \text{ ergo}$$

$$p = 89^\circ 14' 5.0$$

Si nunc queratur L' et m' pro 1809 Mart. 18 $3^h 24' 58''$, intervalum temporis est $3^h 24' 58''$ vel $L' - L = 77.142338$ dies.

Motus diurnus in longitudine media est $dL = 120''.5917868$ et motus diurnus longitudinis perihelii $dp = 0''.1688$

hinc

hinc est

$$L' = 233^{\circ} 11' 42'' + 9302'' = 235^{\circ} 46' 45''$$

$$m' = 143^{\circ} 57' 37'' + 9302'' - 13^{\circ} 0' = 146^{\circ} 32' 27''$$

Si motus diurni de et d p referantur ad punctum, a quo omnes longitudes numerantur, h. e. ad punctum æquinoctii verni. Quoniam autem hoc punctum ipsum propter præcessionem sit in motu, quantitas de etiam non exprimit propriè diurnum motum planetæ qui debet respectu aliquis fixi puncti sumi. Revolutio aliquis planetæ respectu talis puncti fixi v. c. respectu stellarum fixarum, vel propria vera revolutio planetæ, vocatur ejus siderea revolutio; nos eam voluimus designare per A. Prius considerata revolutio respectu æquinoctii, vocatur ejus tropica seu periodica revolutio; et si una tantum quantitas est data, facile altera inveniri potest.

Si generatim A revolutio aliquis planetæ respectu aliquis puncti, hinc est $\frac{360}{A}$ diurnus motus respectu hujus puncti. Sit perinde m motus diurnus puncti aliquis fixi respectu primi puncti, hinc $\frac{360}{A} - m$ motus diurnus planetæ respectu hujus secundi puncti, ergo revolutio B planetæ respectu hujus secundi puncti

$$B = \frac{360}{A - m} \quad \text{vel} \quad B = \frac{360}{360 - Am} \quad \text{et} \quad A = \frac{360}{360 + mB} \quad \text{vel}$$

$$B = \frac{360 + Bm}{360} \cdot A \quad \text{et} \quad A = \frac{360 - mA}{360} \cdot B$$

Si punctum secundum respectu planetæ retrograderet, m est quantitas negativa.

Ad calculum magis commodum, sit $a = \frac{360}{A}$ motus diurnus planetæ, uti prius m diurnus motus puncti et $b = \frac{360}{B}$, dein est

$$B = \frac{a}{1 - \frac{m}{a}} = A \left(1 + \frac{m}{a} + \frac{m^2}{a^2} + \frac{m^3}{a^3} + \dots \right)$$

$$A = \frac{B}{1 + \frac{m}{B}} = B \left(1 - \frac{m}{B} + \frac{m^2}{B^2} - \frac{m^3}{B^3} + \dots \right)$$

Hic est pro Marte sidera revolutio $A = 686.979579$ dies

Quia præcessio autem $56''.35 = 0.000038318 = -m$

$$\text{hinc tropica revolutio } B = 686.979579$$

$$- 0.856232$$

$$+ 0.000004$$

$$B = 686.929351$$

Pro Luna terra nostra est sidera revolutio $A = 27.321661$

Motus diurnus æquinoctiorum $m = -0.000038318$ hinc

$$\log a = \log \frac{360}{A} = 1.1197955, \quad \log \frac{m}{a} = 4.46368731 \quad \text{hinc}$$

tropica revolutio $B = \frac{A}{1 - \frac{m}{a}} = 27.321582$. Si tropica revolutio est data $A = 27.321582$ et quæritur revolutio B respectu nodorum

orbis

orbis Luna, diis nris motus tropicus horum duorum est
 $m = -3' 10'' 64 = -0.052455$, ergo $\log m = \log \frac{365}{4} = 1.197966$
 $\log m = 7.601104$ et $B = \frac{1}{m} = 24.2122159$.
 a tropica, revolutio $A = 24.321582$ est data et queratur revolutio
 B respectu Solis h.e. tempus inter duas subsequentes conjunctiones,
 vel inter duas subsequentes oppositiones medii Solis et medii Luna,
 quod tempus vacat. Significa revolutio, vicinus motus tropicus
 Solis est $m = 59' 8'' 33 = 0.98565$, hinc $\log m = 8.8739261$ et $B = 29.53089$.

Ut autem medii longitudes et anomalias commode pro quolibet
 tempore inveniri possint, medii motus sunt reducti in tabulas, quarum
 constructio sequentibus innititur:

Epocha in quolibet anni est media longitudo pro meridie medio primi
 Januarii ejusdem anni, si hic annus est intercalaris, et pro meridie
 medio 31 Decembris precedentis anni, si praesens annus est communis.
 Medius medii Solis ad idem aequinoctium vel idem solstitium est
 secundum precedentia revolutionum tropicam Solis vel annum
 civilem, qui est in usu in nostris officiis. Hi annus habet
 365.2422542 dies

Si assumereamus longitudinem anni civilis majoris simplicis,
 italica causa in numero rotundo aequalis 365 diebus, initium
 hujus anni tropici semper precederet, et percursum temporis per
 curreret omnes aetates anni, et festa ubi et labores agriculturae
 non amplius essent ad determinatas aetates constructi. Ita in
 commodum tollere possemus, si inclinum anni quae per hoc non
 astronomicum consideraretur, et v.c. in vicissimum meridianum
 vel ante vel post aequinoctium poneretur. Sed hac ratione anni
 non facile in dies distribui possunt, initium anni quoad dies
 fas nationum mutaretur, quum quis libet hoc initium determi
 naret, secundum Meridianum suorum maxime notabilium
 locorum. Excogitarunt igitur medicum ad tollendum omnia
 ista incommoda, quod consistit in sic dictis intercalationibus.
 Anno 1582 post Christum nunc usitata reformatio calendarii
 est suscepta. Ante hunc annum sine exceptione, omnes per 4
 sine residuo divisibiles anni sunt anni intercalares 366 dierum,
 ceteri autem anni communes 365 dierum. Anno 1582 omnia
 sunt

sunt 10 dies, quum post A Octobr, statim 15 numeraretur.
 Post annum 1582 iterum annus unus per A divisibilis sunt an-
 ni intercalares; omnes autem seculares anni, uti 1700, 1800, 1900
 sunt anni communes exceptis illis annis qui sunt divisibiles per
 400 uti 2000, 2400 etc qui iterum sunt bissextiles. Per hanc
 constructionem magis nitidè cujuslibet anni civilis post 1582, n.
 ducta est ad $365\frac{25}{100} = 365.2425$ dies, vel annus communis tan-
 tummodo 0.0002458 diebus major est quam annus tropicus. Si pro-
 pterea semper post 4000 annos dies unus supprimeretur, hac ratione
 reduceretur annus ad $365\frac{25}{1000} = 365.24225$ quod tantum 0.000042
 diebus h. e. 0.36288 minus esset.

Secundum hæc præmissa, epochæ omnium annorum secula-
 rum inveniri possunt, si epocha unius est nota.

Si v. c. epocha 1500 vel 1800 data est, si A est tropicus diurnus
 motus, erit

$$\begin{aligned} e_{1900} &= e_{1800} + 365242.5 & \text{vel inverse } e_{1700} &= e_{1800} - 365242.5 \\ e_{2000} &= e_{1900} + 365250 & e_{1600} &= e_{1700} - 365250 \\ e_{2100} &= e_{2000} + 365240 & e_{1500} &= e_{1600} - 365240 \end{aligned}$$

ex quo deinceps epochæ omnium annorum inter hos annos secu-
 laris inveniri poterunt, v. c.

$$\begin{aligned} e_{1743} &= e_{1700} + 43(36524) + 10a & \text{quia } \frac{43}{4} &= 10 + a \\ e_{1876} &= e_{1800} + 76(36524) + 19a & \text{quia } \frac{76}{4} &= 19 \end{aligned}$$

Si deinceps A est epocha alapis annis communibus, epocha 0 Ju-
 narii (31 Decemb, anni præcedentis), est = $A + 6a$ eodem ratione
 est epocha 0 Februarii (31 Jan) = $A + 31a$

$$0 \text{ Martii (28 Feb)} = A + 59a$$

$$0 \text{ Aprilis (31 Mar)} = A + 90a$$

et si quolibet harum epocharum mensualium vocetur B, deinceps
 epocha 1. 2. 3. ... n diei cujuslibet mensis æqualis

$$B + a, B + 2a, B + 3a, \dots, B + na$$

Sic sunt epochæ 5 Januarii, 13 Julii, 24 Novemb, æquales, $B + 5a$

$$B + 104a, B + 2331a \text{ etc. Si autem annus est bissextilis, epo-}$$

cha primi Januarii est $A - a$ vel, epochæ diurnæ primorum
 duorum mensium sunt in hoc anno uno a minoris, quam in
 communi anno, et quum sine Februarii annus bissextilis unum
 diem plus habet, ista differentia inter annum communem
 et bissextilem se tollit, vel epochæ in decem ultimis mensibus
 a me,

amborum annorum sunt eadem. —

Secundum novissimas tabulas solares celeb. lib. Bar. v. Luch
epocha mediae longitudinis Solis pro 1800 meridie vero. Submergi
est $259^{\circ} 52' 36''.58$ et motus in centum annis qui continent
25 annos bissextiles est $100.360^{\circ} + 0^{\circ} 45' 48''.00$ hinc in uno
anno $398.359^{\circ} 45' 40''.40$ | in uno die $0^{\circ} 59' 8''.33$
Lunae $359 31 20.84$ | una hora $0 2 27.85$
3 annis $559 17 1.21$ | uno minuto prim $0 0 2.46$
— secund $0 0 0.04$
etc

epocha anni 1740 — $280^{\circ} 24' 16''$
1795 $280 5 6$
1810 $279 24 37$

et epocha 0 Februarii in anno bissextile $29^{\circ} 34' 10''$ in anno communi $30^{\circ} 33' 18''$

0 Martii in ambobus annis $58 9 11$

0 Aprilis $88 42 30$ etc

ex quo si procedentia continuantur, tota tabula motus mediae
Solis constitui potest, quae ergo ex quatuor partibus constabit,
 quarum prima est epocha annorum, secunda mensium, tertia
dierum mensium, tandem quarta, motus pro horis minutis pri-
mis et secundis. Subsidio huius tabulae, quam facillime media
longitudo Solis pro quocunque tempore determinari poterit.

Queratur v. c. media longitudo Solis pro a. 1795. 14 Aprilis $5^h 48' 12''$ meridie temp. Submergi

I Tabula dat 1795 $280^{\circ} 5' 6''$

II — 0 Aprilis $88 42 30$

III — 14 Aprilis $13 47 57$

IV — $5^h 48' 12''$ — $14 18$

media longitudo = $22^{\circ} 49' 51''$

Vide Tabulae motuum Solis a B. Luch, Gothae 1792

Determinatio mediarum longitudinum igitur ita videmus,
nullis difficultatibus esse subiecta. Ad derivationem autem
verarum longitudinum et distantiarum planetarum a Sole
adhiberi debent prius datae expressiones. Ad calculum au-
tem his expressionibus commodiores formas duc. prosumus,
quarum notabiliores hic adferemus. Si brevitas causa
ponitur $e = \sin q$, obtineamus:

1. $m = u - \varepsilon \sin u$ vel propria $m = \frac{a}{\sin 1''} u - \frac{\varepsilon}{\sin 1''} \sin u$
2. $r = a(1 - \varepsilon \cos u) = \frac{a \cos^2 \varphi}{1 + \varepsilon \cos v} = a \cos \varphi \cdot \frac{\sin u}{\sin v}$
3. $\cos u = \frac{\varepsilon + \cos v}{1 + \varepsilon \cos v} = \frac{a - r}{a \varepsilon}$
4. $\cos v = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u} = \frac{a}{r} (\cos u - \varepsilon) = \frac{a \cos^2 \varphi - r}{r \varepsilon}$
5. $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2}$
6. $\frac{r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{90^\circ - \varphi}{2}}{\sin \frac{v}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \sin \frac{u}{2}}{\sin \frac{v}{2}}$ vel $\frac{\sin \frac{u}{2}}{\sin \frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{r}{a(1 + \varepsilon)}}$
7. $\frac{r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{90^\circ - \varphi}{2}}{\cos \frac{v}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cos \frac{u}{2}}{\cos \frac{v}{2}}$ vel $\frac{\cos \frac{u}{2}}{\cos \frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{r}{a(1 - \varepsilon)}}$
8. $\sin \frac{v - u}{2} = \sin u \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\sin v \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}$
9. $\sin \frac{v + u}{2} = \sin u \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\sin v \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}$

Si in his expressionibus quantitates m, u, v, r ponantur variables, erit:

$$\begin{aligned} du &= \frac{a}{r} dm = \frac{r dv}{a \cos \varphi} = \frac{dr}{a \sin \varphi \sin u} \\ dv &= \frac{a}{r} du \cos \varphi = \frac{a^2}{r^2} dm \cos \varphi = \frac{a dr \cos \varphi}{r^2 \sin \varphi \sin v} \\ dr &= a dm \operatorname{tg} \varphi \sin v = a du \sin \varphi \sin u = \frac{r dv \sin \varphi \sin v}{a \cos \varphi} \end{aligned}$$

Si autem quibz ad variationem quantitatis ε respicitur dat aequatio (5) $\frac{du}{\sin u} = \frac{dr}{\sin v} - \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$ et eadem ratione aequatio (1) dat $dm = (1 - \varepsilon \cos u) du - \sin u \cos \varphi d\varphi$.

eliminando ex his duabus aequationibus quantitates du erit:

$$\begin{aligned} dm &= \frac{r dv}{a \cos \varphi} - \frac{r(a + r - a\varepsilon)}{a \cos \varphi} \sin v d\varphi \text{ et eadem ratione} \\ dv &= \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi dm + \frac{(r + \varepsilon \cos v)}{\cos \varphi} \sin v d\varphi \\ dr &= \frac{r}{a} da + a \operatorname{tg} \varphi \sin v dm - a \cos \varphi \cos v d\varphi. \end{aligned}$$

Ex adductis aequationibus sequuntur resolutiones plurimum problematum.

- I. Si v et ε sunt data, inveniantur u ex (5) vel (8) et m ex (1)
- II. Si ε et u sunt data, inveniantur v ex (5) et r ex (2) vel ex (1) et m ex (8) vel ex (9)
- III. Si ε et m sunt data, inveniantur u ex (1) et r ex (2) et v ex (4) vel (5) vel alio modo.

Ultimum problema est pro nobis, maximis momentis, quomodo vera solent quantitates ε et m esse data. Resolutio huius problematis

problematis exigit resolutionem aequationis

$$m = u - 2 \sin \alpha$$

respectu generalitatis incognitorum. Quamvis proinde occurrant aequationes huius generis, hic locus erit Euclidicae methodum generaliter illam resolvendi.

Sit $X=0$ aliqua functio quantitas x . Invenitur x . Si jam inventum est $\xi = x + \lambda$, ubi λ jam est quantitas parva, assumere possumus $x - m\lambda = 0$, ubi m est quantitas constans. Assumebitur v.c. $\xi = a$, et $\xi' = a'$, et hac ratione invenitur $X = \alpha$ et $X = \alpha'$, dum sunt a et a' hypothese α et α' errores parum typis thesibus. Si isti errores sunt parvi, premere licet $x = m(a - x)$, $\alpha' = m(a' - x)$, hinc est $x = \frac{\alpha a - \alpha' a'}{x - x'}$ vel $x = a - \frac{\alpha(a - a')}{x - \alpha'} = a' - \frac{\alpha'(a - a')}{x - \alpha'}$, et x ita inventum, non multum a veritate differt, si errores α et α' jam sunt parvi. Eandem operationem cum approximatis valoribus quantitatibus a et a' proinde repetere et eo magis et celerius veri latere appropinquare possumus, quo accuratioris valoris quantitatibus a et a' jam primarice sunt assumpti.

Sit v.c. data aequatio $\frac{h^x - 1}{x} = 3.828$, ubi log. natur $h = 1$, hinc est

$$0.43429448x - \log \text{vulg.}(3.828 + 1) = y = 0$$

$$x = 2.2 \text{ dat } y = -0.01868 = \alpha$$

$$x = 2.3 \text{ dat } y = +0.00744 = \alpha'$$

et ex his duobus erroribus α et α' invenitur correctum

$$x = 2.2715 \text{ et hoc dat } y = -0.0000615 = \alpha''$$

Erroribus α' et α'' dat $x = 2.2717337$ et hoc dat $y = -0.0000001$.

tunc assumere possumus pro vero valore $x = 2.2717337$.

Eandem methodum etiam applicari potest ad plures quantitates incognitas. Sit $X=0$ functio quantitatibus x et y et

$$Y=0 \text{ etiam functio } x, y$$

Si invenitur respect $\xi = x + \lambda$ et $v = y + \mu$, assumere possumus, si λ et μ sunt quantitates parvae, $X - m\lambda - n\mu = 0$ $Y - p\lambda - q\mu = 0$

Sic v.c. assumitur $\xi = a = a' = a''$ et $v = b = b' = b''$ et hoc modo invenitur $X = \alpha = \alpha' = \alpha''$ et $Y = \beta = \beta' = \beta''$ dum sunt a, a', a''

et b, b', b'' hypothese, $\alpha, \alpha', \alpha'' - \beta, \beta', \beta''$ eorum errores, hinc erit

$$\begin{aligned} \alpha &= m(a-x) + n(b+y) & \text{et } \beta &= p(a-x) + q(b-y) \\ \alpha' &= m(a'-x) + n(b'-y) & \beta' &= p(a'-x) + q(b'-y) \\ \alpha'' &= m(a''-x) + n(b''-y) & \beta'' &= p(a''-x) + q(b''-y) \end{aligned}$$

ex quibus inveniantur

$$x = a + \frac{p}{\varepsilon}(a'-a) + \frac{q}{\varepsilon}(a''-a)$$

$$y = b + \frac{p}{\varepsilon}(b'-b) + \frac{q}{\varepsilon}(b''-b)$$

proposito $y = \alpha''\beta - \alpha\beta''$ $\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta$, $\varepsilon = y + \delta + \alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$

Ad eandem expressionem quoque alia notabili digna via venire possumus. Si nimirum est $y = f(x)$ et pro x ponatur quantitas $x+w=a$, y transit in sequentem notandam expressionem

$$Y = y + w \frac{dy}{dx} + \frac{w^2}{1.2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{w^3}{1.2.3} \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

Si ead. ratione ponitur pro x quantitas $x+w'=a'$, erit

$$Y' = y + w' \frac{dy}{dx} + \frac{w'^2}{1.2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{w'^3}{1.2.3} \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

Si tantummodo prima membra respiciamus, est

$$Y - y = w \frac{dy}{dx}$$

$$Y' - y = w' \frac{dy}{dx}$$

Sunt autem $Y - y = \alpha$, $Y' - y = \alpha'$ erroris hypothesis, qui sunt orti ex suppositione quantitates a, a' pro x , erit est, si priores aequationes una per alteram dividamus, $\alpha w = \alpha' w'$.

Proterea est $w' - w = (a' - a) - (a - x)$ vel $w' - w = a' - a$ et hinc praecedens aequatio $w = \alpha \frac{(a' - a)}{a' - a}$, $w' = \alpha' \frac{a' - a}{a' - a}$ vel etiam $x = a - w = a' - w' = \frac{\alpha' - \alpha a}{a' - a}$ quod est prior expressio.

Haec ultima solutio huius problematis simul ostendit, cur haec methodus in omnibus casibus ubi x tantummodo primam potestatem continet, statim quæsitum valorem dat, quia pro talibus aequationibus praecedentes suppositiones $d^2x = 0$, $d^3x = 0$ revera locum habent. Si autem haec non habet locum, diu evoluta methodus tantummodo in eo casu resultatum dabit veritatis quam maxime correspondens, si w, w' jam sunt parvi, quia tantum in hoc casu quantitates omnes $w \frac{dy}{dx}$ etc. fere aequalis vero ipsam possunt.

Si autem prima hypothesis, adhuc multum divergit a veritate h.e. si w, w' habent adhuc notabiles valores, tandem eadem methodus per repetitionem nempe supradictam semper majorem approximationem ad veritatem.

Adferam adhuc breviter methodum celeb. Gauss (Theoria motus p. 11)

Supponamus e esse approximationem valorem ipsius quantitatis
 u ita x correctionem illi adhuc adjuvandum, ita ut valor $u = e + x$
 aequationi exacte satisfaciat. Computetur e sine in secundis per lo-
 garithmos, quod dunt per se, simul et tabulis notetur varia-
 tio ipsius $\log. \text{ sine } e$ pro $1''$ variatione ipsius e atq. variatio logistice
 pro variatione unitatis in numero e sine: Sint ha variatio-
 nes sine respectu signorum λ et μ . Quod si jam e ad verum ipsius
 u valorem tam prope jam accedit, ut variationes logarithmi sinus
 ab e usq. ad $e + x$ variationesq. logarithmi numeri ab e sine usq.
 ad $e \text{ sine } (e + x)$ pro aniformibus habere liceat, manifeste statui pro-
 terit $e \text{ sine } (e + x) = e \text{ sine } e \pm \frac{\lambda x}{\mu}$ signis superiori pro quadrante primo
 et quarto, inferiori, pro secundis et tertio valent. Quare quoniam
 sit $e + x = m + e \text{ sine } (e + x)$ fit $x = \frac{\mu}{\mu + \lambda} (m + e \text{ sine } e - e)$, valor verus
 ipsius u sive $e + x = m + e \text{ sine } e \pm \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (m + e \text{ sine } e - e)$ signis ea qua dicti-
 mus ratione determinatis. Etenim facile percipitur, esse jam
 respectu signi $\mu: \lambda = 1: e \text{ cose}$ adeoq. semper $\mu > \lambda$, unde concludi-
 tur, in quadrante primo et ultimo $m + e \text{ sine } e$ jacere inter e et
 $e + x$, in secundo et tertio vero $e + x$ inter e et $m + e \text{ sine } e$.

Si valor suppositus e nimis adhuc a vero aberraret, quom-
 ut suppositionem supra traditam pro satis exacta habere
 liceret, certe per hanc methodum inveniatur valor multo
 propior, quo eadem operatio iterum adhuc, pluriesve si opus
 videtur, repetenda est.

Nullo vero negotio patet, si differentia valoris primi e a vero
 tanquam quantitas ordinis primi spectetur, errorem valoris novi
 ad ordinem secundum referendum fore, et per operationem iterum
 tam ad ordinem quartum, octavum etc. deprimi. Quo minor in se
 per fuerit excentricitas, eo velocius correctiones successive con-
 vergunt. Valor approximatus ipsius u , a quo calculus incipi-
 possit, plerumq. satis obvius erit, praesertim ubi problema
 pro pluribus valoribus ipsius u solvendum est, e quibus qui-
 dam jam absoluti sunt. Differentibus omnibus illis subiectis,
 in statum constat, quod u inter limites m et $m + e$ jacere solet

(excentricitate & in paucis expressa, signaq. superiori in qua
 drante primo et secundo, inferiore in tertio et quarto accepto);
 quavis pro valore initiali ipsius u vel in utrovisque planorum
 declinationem qualemcumq. auctus seu diminutus adaptari
 poterit. Vix opus est monere, calculum primum, quoties a va-
 lore parum accurate in hanc, sua precisione hanc indigen-
 tabulasq. minores, qualis celeb. Haland. curavit, abunde suffi-
 cere. Praeterea, ut calculi commoditati consulatur, talis semper
 valores pro e eligentes, quorum finis & tabulis ipsis absque
 interpolatione excerpere licet.

Omnes his solutiones supponunt, & esse respectu unitatis ad-
 modum parvam. Si autem & fere aequalis est unitati, priores
 methodi non tantummodo evadunt mol. $st.$ sed et incertae, nam
 parvus error in repositio v et r jam magnas differentias
 producere potest. Si autem & fere aequalis est unitati, dein
 orbita planities fere est parabola, et quum fere omnes come-
 tis moventur in tam excentricis ellipsis, ut si simpli ge-
 neratione calculi ejus orbitarum saltem in vicinia perihelionum
 ubi solent esse nobis visibiles, eas qua parabolas assumere
 possimus, volumus motum in parabola simili designa-
 tionem subiceret.

Ut prius, u , ae , q est semiaxis major, excentricitas, et
 distantia perihelii a vicinissimo foco, et si sumantur absissi
 x a perihelio in axi majori, et ordinates y ad illos perpen-
 diculares, dein est aequatio ellipsis $y^2 = q(1 - e^2)x \cdot (2 - \frac{x}{a})$
 Aequatio parabola autem, cujus distantia foci a vertice
 etiam q est, inter similes coordinatas est $y^2 = 4qx$
 ex quo videmus, ellipsin semper eo magis adpropinquare ac
 parabolam, quo major est axis major, si quantitas q ea-
 dem manet, et hanc concordantiam in punctis perihelii vi-
 cinissimis esse maximam.

Si in parabola sumantur absissi x in axi majori a foco, erit ejus
 aequatio $y^2 = 4q(x + q)$, et si etiam hic per r & v vacuum vectorem vel
 distantiam cometes a foco, et veram anomaliam vel angulum inter
 r et q designamus, sit $y = r \sin v$, $x = r \cos v$ et prius aequatio tran-
 siet in sequentem $r = \frac{2q}{1 - \cos v}$

Si igitur est $\frac{1}{2}f$ area sectoris parabolici inter q et r , erit

$$\frac{1}{2}f = \frac{1}{2} \int r^2 dv = q^3 \left(1 + \frac{1}{2} \lg^2 \frac{v}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \lg \frac{v}{2} = q^3 \left(\frac{1}{2} \lg \frac{v}{2} + \frac{1}{6} \lg^3 \frac{v}{2} \right)$$

Si autem t est tempus (in diebus expressum) a transitu cometes per perihelium, deinde est secundum priora $f = \pi t \cdot \mu$ ubi $\mu = 0.017202$ et $p = 29$ semiparameter parabolae.

Hinc substituto valore $f = \text{ut sint}'' 129$ in prioris aequatione

$$\text{erit, } \frac{1}{2}f \lg \frac{v}{2} + 25 \lg^3 \frac{v}{2} = \frac{125 \text{ ut sint}''}{2^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}}} = 0.9122791 \cdot \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}} \quad \text{--- (I) } \begin{array}{l} \text{multiplicando} \\ \text{per } 75 \end{array}$$

$$\text{et nominatim } \frac{125 \text{ ut sint}''}{2^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}}} = 0.9122791 \text{ medius diurnus motus}$$

uti et $0.9122791 \cdot \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$ medius motus comets tempore t . Cometa igitur qui se movet in parabola, in qua q est unitas, quotidiè describit 0.9122791 in suo motu medio, et veram anomaliā $v = 90^\circ$ in $\frac{100}{0.9122791} = 109.615528$ diebus. (Vid. Delambre lin. 33 p. 8)

1. Per aequationem (I) invenitur, si distantia q et tempus t trans, scilicet per perihelium data sunt, pro quolibet alio tempore t' vera anomalia v , si ponitur $t' - t = t$, et radius vector per aequationem $r = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}$ eadem ratione invenitur tempus t' perihelii, si q et v si q et r sunt data.

Ad facilitorem resolutionem huius problematis, prout nota tabula Bartholomaeana quae etiam occurrit apud tractatum celeb. Olbers de methodo facillima orbitam cometæ computandi, et quae continet quantitatem a quae ex aequatione $a = \frac{1}{2}f \lg \frac{v}{2} + 25 \lg^3 \frac{v}{2}$ cum argumento b invenitur. Assumamus $q = \frac{1}{2} \text{ ut sint}''$ deinde est aequatio (I)

$$t = \frac{q^{\frac{3}{2}}}{V_2} \left(\lg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \lg^3 \frac{v}{2} \right) \text{ ubi } \frac{1}{q} = 116.26488.$$

2. Sector parabolici ad quem vera anomalia pertinet est $S = \frac{1}{2} \int r^2 dv = 2 \int \frac{q^2 dv}{(1 + \cos v)^2}$ et ellipticus sector, ad quem vera anomalia $v + \Delta$ pertinet, est $S' = \frac{1}{2} \int r^2 d(v + \Delta) = \frac{1}{2} \int \frac{p^2 d(v + \Delta)}{(1 + \varepsilon \cos(v + \Delta))^2}$ ubi $p = q(1 + \varepsilon)$ est semiparameter. Quam autem, uti videmus, pro aequalibus temporibus areas sectorum se habent uti radices quadraticae ex parametris, erit

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon}}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \text{ vel } \frac{\int \frac{(1 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}} d(v + \Delta)}{(1 + \varepsilon \cos(v + \Delta))^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon}}}{\int \frac{dv}{(1 + \cos v)^2}} = 2 \int \frac{dv}{(1 + \cos v)^2}$$

cujus

ius aequationis integrale est

$$\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^2 \left\{ t + \frac{1}{3} \cdot \frac{2-3\alpha}{2-\alpha} t^3 - \frac{\alpha}{5} \cdot \frac{4-5\alpha}{(2-\alpha)^2} t^5 + \frac{\alpha^2}{7} \cdot \frac{6-7\alpha}{(2-\alpha)^3} t^7 - \dots \right\} = v + \frac{1}{3} v^3$$

ubi brevitatis causa posuimus $t = \sqrt{\frac{v+\Delta}{2}}$, $v = t^2$

At æquatio offerit quoque commodum medium quantitatem Δ per differentiam per & anomaliam in ellipsi quæ non multum differt a parabola, et anomaliam in parabola, hinc etiam, quum vera anomalia parabolis secundum priora facile inveniri possit, eorundem anomaliam ipsam ellipsos determinandi, si est admodum excentrica. Ad hunc finem ordinetur prior æquatio secundum potentias quantitatis α , et absumatur brevitatis causa

$$A = t + \frac{1}{3} t^3, \quad B = \frac{1}{4} (t - t^3) - \frac{1}{5} t^5, \quad C = \frac{1}{32} (3t - 7t^3) + \frac{3}{5} t^5 \text{ dein est:}$$

$$0 = A + B\alpha + (C + D - \frac{1}{3} B)\alpha^2$$

Summe itaque huiusmodi quantitatis v et Δ , transiat a in t , si v transiat in $v + \Delta$, Ergo erit

$$t = a + A \cdot \frac{da}{dv} + \frac{A^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2a}{dv^2} + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3a}{dv^3} + \dots$$

et similes expressiones habebimus pro B et C . Si igitur sunt a, b, c respectivi valores quantitatum A, B, C , si $v + \Delta$ transiat in v , vel si t in t transiat, transibit prior æquatio in sequentem

$$0 = A \cdot \frac{da}{dv} + \frac{A^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2a}{dv^2} + \dots + \alpha (b + A \cdot \frac{db}{dv} + \frac{A^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2b}{dv^2} + \dots) + \alpha^2 (c + A \cdot \frac{dc}{dv} + \frac{A^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2c}{dv^2} + \dots)$$

Si nunc ponatur $A = P\alpha + Q\alpha^2 + R\alpha^3 + \dots$ et substituaturs hic valor in priori æquatione, erit, si quilibet factor quantitatis α ponatur æqualis zero,

$$-P \left(\frac{da}{dv} \right) = b$$

$$-Q \left(\frac{da}{dv} \right) = \frac{P^2 da}{2 dv^2} + P \frac{db}{dv} + c$$

$$-R \left(\frac{da}{dv} \right) = \frac{P^2 d^2a}{2 dv^2} + \frac{P^3 d^3a}{6 dv^3} + 2 \frac{P db}{dv} + \frac{P^2 d^2b}{2 dv^2} + \frac{P dc}{dv} + d$$

et si revera ipsa differentiales deducantur, inveniantur valores quantitatum P, Q et R . Dein est

$$P = \left(-\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v^3 + \frac{2}{5}v^5 \right)$$

Si eadem ratione deducatur Q erit

$$\Delta = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \left(-\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v^3 + \frac{2}{5}v^5 \right) + \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} \left(-\frac{1}{16}v - \frac{9}{16}v^3 + \frac{37}{80}v^5 + \frac{531}{560}v^7 + \frac{13}{35}v^9 + \frac{9}{350}v^{11} \right)$$

quæ series quoque continuari potest et quæ valet et pro positivis, et negativis valoribus quantitatis α h. e. et pro ellipsis et pro hyperbolis. Sed fere in omnibus casibus sufficiunt hæc

hec duo membra, et ad commodum calculum huius generis possumt
factoris quantitatum α et x in tabulis poni, quarum argumentum
erit δ seu vera anomalia parabolica.

Ex.g. Sit $\log q = 9.0886320$, $\log \alpha = 7.3979400$ et tempus a transitu
per perihelium $= 72.99493$. — Ex hoc sequitur ex aequatione (2)

parabolica vera anomalia	149° 48' 56."88
Corructio	
I pars +	0 12 0.24
(II) pars +	2.87

elliptica vera anomalia 149° 59' 59.99

que determinatis est admodum accurata, quum proprie debent esse 150° 0' 0"
(Vide Monatz Correspondenz 1865 septembris)

Aliis methodis veram anomalia et radicem viscerem pro rationem
excentricis ellipsis inveniendi, occurrunt in theoria motus cor,
porum celestium.

Aequationes priores sunt praecipue expressiones in quan-
titatibus m, u, v et r . Eadem aequationes solum fortiter in ad-
modum convergentes series resolvi possunt, et quantitates aequa-
tiones saepius occurrant, hic locus erit generalis methodus ex-
ponendi, quae potissimum ad hanc finem in usu sunt.

1. Si u functio quantitatis x est in seriem resolvenda, quae se-
cundum potentias quantitatis x progreditur, assumere possumus

$$u = u_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + \dots$$

ubi u_0, q_1, q_2 etc sunt quantitates a x independentes.

Ex quo facile videmus u esse valorem quantitatis pro $x=0$, proterea
simas, factorem generalis membri $q_n x^n$ esse $q_n = \frac{(d^n u)}{(dx^n)}$
praesupposito in termino $(\frac{d^n u}{dx^n})$ post differentiationem positum
ipse $x=0$. — Si v.c. $u = \sin x$, invenitur $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$

2. Si u est functio quantitatum x et y , quae debet exponi secundum
potentias et producta quantitatum x et y , assumere possumus

$$u = u_0 + q_{1,0} x + q_{2,0} x^2 + \dots + q_{0,1} y + q_{1,1} xy + \dots + q_{2,2} y^2 + \dots$$

et factor producti $x^n y^n$ erit $\frac{d^{n+n'} u}{dx^n dy^{n'}}$ ubi iterum
post differentiationem x et y ponuntur aequalis zero. Hoc

quoque applicari potest ad functiones plurium inognitarum.

3. Si $u = f(x+a)$ est in seriem resolvenda quae progreditur
secundum

Secundum potentias quantitatis a , erit:

$$f(x+a) = f(x) + qa + qa^2 + qa^3 + \text{etc}$$

et factor q_n termini generalis qa^n erit $q_n = \frac{d^n f(x)}{1.2.3 \dots n dx^n}$

v.c. $u = \log. \text{nat.}(x+a)$ invenitur

$$\log(x+a) = \log x + \left(\frac{a}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3$$

et per hanc methodum statim quoque valore functionis $u = f(x)$ pro illo casu assignare possumus si x transit in $x+a$.

4. Si generatim u est functio quantitatum $x+a, y+b, z+c$ etc invenitur $f(x+a, y+b, z+c, \text{etc}) = f(x, y, z) + \frac{a d f(x, y, z)}{dx} + \frac{b d f(x, y, z)}{dy} + \frac{c d f(x, y, z)}{dz} + \text{etc}$

$$\text{cujus seriei membrum generale fuit } \frac{a^n b^n c^n \dots}{(1.2.3 \dots n)(1.2.3 \dots n)(1.2.3 \dots n)} \cdot \frac{d^{n+n+n \dots} f(x, y, z)}{dx^n dy^n dz^n \dots}$$

et $\frac{d^{n+n+n \dots} f(x, y, z)}{dx^n dy^n dz^n \dots}$ membrum significat $(n+n+n \dots)$ membrum.

5. Sit nunc data aequatio $0 = x - y + x \varphi(y)$. Si ex hac aequatione queratur alia functio quantitatis y quam per $\psi(y)$ designare volumus in seriem resolvenda, qua secundum potentias quantitatis x progrediatur, sit brevitas causa $D\psi x$ seu $\psi'x = \left(\frac{d\psi x}{dx}\right)$ et nos habebimus

$$\psi(y) = \psi x + x \varphi x \cdot D\psi x + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 \{(\varphi x)^2 D\psi x\}}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 \{(\varphi x)^3 D\psi x\}}{dx^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4 \{(\varphi x)^4 D\psi x\}}{dx^4} + \dots$$

Sit v.c. $x - y + y^n = 0$, et si generatur ex hac aequatione valor $\log. \text{nat.}$, dicitur est: $x=1, \psi y = \log. y, \psi x = \log. x, \psi'x = D\psi x = \frac{1}{x}, \varphi y = y^n, \varphi x = x^n$, ergo

$$\log y = \log x + \frac{x^{n+1}}{1.2} + \frac{2n-1}{1.2} \frac{x^{2n+1}}{2} + \frac{(3n-1)(3n-2)}{1.2.3} \frac{x^{3n+1}}{3} + \text{etc}$$

6. Si ad majorem adhuc abbreviationem ponitur generatim

$$\frac{d f \alpha}{d \alpha} = D f \alpha, \frac{d^2 f \alpha}{1.2 d \alpha^2} = D^2 f \alpha, \frac{d^3 f \alpha}{1.2.3 d \alpha^3} = D^3 f \alpha, \text{erit prior aequatio}$$

$$\psi(y) = \psi x + x \varphi x \cdot D\psi x + \frac{x^2}{2} D^2 \{(\varphi x)^2 D\psi x\} + \frac{x^3}{3} D^3 \{(\varphi x)^3 D\psi x\} + \dots \quad (I)$$

Ope hujus theorematidis, magnus numerus problematum resolvitur. Sit v.c. datum $y = x \varphi(a+x)$ et queratur $\psi(a+x)$ ubi a et x a se invicem independentes quantitatis designant, dicitur est:

$$\psi(A+x) = \psi(A) + x(\varphi A) \cdot D\psi A + \frac{x^2}{2} D\{(\varphi A)^2 \cdot D\psi A\} + \frac{x^3}{3} D\{(\varphi A)^3 \cdot D\psi A\} + \dots$$

ubi $Da + D\psi A = 1$ ponitur.

Adhuc magis complicatas expressiones possunt ad invicem tam seriem
(I) reduci. Sit n.c. $u = F(x + x\varphi u)$ et quæritur ser. sin.

functio quantitatis u , quam exprimere volumus per ψu ,

videtur $y = x + x\varphi u$ hinc $u = Fy$ vel $\varphi u = \varphi Fy$ et hinc

$y - x = x\varphi Fy$ vel $0 = x - y + x\varphi Fy$. Si hæc expressio

comparatur cum priori deducta $0 = x - y + x\varphi y$ est.

$$\psi u = \psi Fx + x(\varphi Fx) D(\psi Fx) + \frac{x^2}{2} D\{(\varphi Fx)^2 \cdot D(\psi Fx)\} + \frac{x^3}{3} D\{(\varphi Fx)^3 \cdot D(\psi Fx)\} + \dots$$

per alias considerationes pro eadem quantitate invenitur

$$\text{quoque expressio } \psi u = \psi Fx \cdot \{x + x\varphi Fx + \frac{x^2}{2} D(\varphi Fx)^2 \cdot \psi Fx\}$$

que duas expressiones sibi æquales positis deducunt ad æq.

modum præteritas expressiones, pro quibus autem hic non est locus.

(Vide Arbogast Calcul des Derivations, Strasbourg 1800.)

Nunc possumus hos deductiones quoque applicare ad nostras æq.

quæstiones. Jamque dicitur fuit

$$m - u + \varepsilon \sin u = 0$$

$$\frac{x}{a} - 1 + \varepsilon \cos u = 0$$

Si prima harum æquationum comparatur cum priori gene-

rali expressione $x - y + x\varphi(y) = 0$, erit, si queritur $\cos u$, $x = m$,

$y = u$, $x = \varepsilon$, $y = \sin u$, $\psi y = \cos u$, ergo æquatio (I) prior

$$\cos u = \cos m - \varepsilon \sin^3 m - \frac{\varepsilon^2}{1.2} \frac{d \sin^3 m}{dm} - \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} \frac{d^2 \sin^3 m}{dm^2} - \dots$$

hinc dat secunda æquatio

$$\frac{x}{a} = 1 - \varepsilon \cos m + \varepsilon^2 \sin^2 m + \frac{\varepsilon^3}{1.2} \frac{d \sin^2 m}{dm} + \dots$$

ubi terminus generalis hujus serie est $\frac{\varepsilon^n}{1.2.3 \dots n-1} \frac{d^{n-2} \sin^2 m}{dm^{n-2}}$

sed uti similes, est

$$2^n \cos^n x = \cos nx + n \cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos(n-4)x + \dots$$

ex quo sequitur, si $n-2$ est numerus impar

$$\frac{2^n \cos^n x}{dx^{n-2}} = n^2 \sin nx + \frac{n(n-2)}{1} \sin(n-2)x + \frac{n(n-1)(n-4)}{1.2} \sin(n-4)x + \dots$$

superius sequuntur si $n-2$ habet formam $2(p+1)+1$

inferius $2(2p)+1$

Si

Si autem $n-2$ est numerus impar erit

$$\frac{2^n d^{n-2} \cos^n x}{dx^{n-2}} = n^{n-2} \cos nx + \frac{n(n-2)^{n-2}}{1} \cos(n-2)x + \dots$$

superius signum si $n-2$ habet formam $2(2p)$

inferius $2(2p+1)$

Si igitur assumamus $x = 90 - m$, dein habemus, si sumimus aliquam horum quatuor valorum, v. c. primum

$$\frac{2^n d^{n-2} \cos^n x}{dx^{n-2}} = - \frac{2^n d^{n-2} \sin^n m}{dm^{n-2}} =$$

$$= n^{n-2} \sin n(90-m) + \frac{n(n-2)^{n-2}}{1} \sin(n-2)(90-m) + \frac{n(n-1)(n-4)^{n-2}}{1 \cdot 2} \sin(n-4)(90-m) + \dots$$

Quum autem $n-2 = 2(2p+1) + 1 = 3, 7, 11, 15, \dots$ h. e. quum

$n = 5, 9, 13, 17, \dots$ est, habemus

$$\sin n(90-m) = \cos nm$$

$$\sin(n-2)(90-m) = -\cos(n-2)m$$

$$\sin(n-4)(90-m) = \cos(n-4)m$$

Hinc terminus generalis hujus serie

$$\frac{\varepsilon^n d^{n-2} \sin^n m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1 \cdot dm^{n-1}} = - \frac{\varepsilon^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot 2^n} \left\{ n^{n-2} \cos nm - \frac{n(n-2)^{n-2}}{1} \cos(n-2)m + \frac{n(n-1)(n-4)^{n-2}}{1 \cdot 2} \cos(n-4)m - \dots \right\}$$

ita ut habemus v. c. pro $n=3$, $\frac{\varepsilon^3}{2^3} (3 \cos 3m - 3 \cos m)$ et si pro pro ceteris valoribus quantitatibus n ita, ut tandem ex profecto pro Δ radio videtur fiat

$$\frac{\Delta^n}{a} = 1 - \varepsilon \cos m - \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \cos(2m-1) - \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} (3 \cos 3m - 3 \cos m)$$

$$- \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} (4^2 \cos 4m - 4 \cdot 2 \cos 2m)$$

$$- \frac{\varepsilon^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} (5^3 \cos 5m - 5 \cdot 3^3 \cos 3m + 10 \cos m) - \dots$$

et legens hujus progressionis quilibet facile videbit.

Ad exprimendum v. per u vel inverse, habemus

$$\lg \frac{v}{2} = \lg \frac{u}{2} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

et haec aequatio dat

$$\frac{u}{2} = \frac{v}{2} - b \sin v + \frac{b^2}{2} \sin 2v - \frac{b^3}{3} \sin 3v + \dots$$

$$\frac{v}{2} = \frac{u}{2} + b \sin u + \frac{b^2}{2} \sin 2u + \frac{b^3}{3} \sin 3u + \dots$$

$$\text{ubi } b = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1-\varepsilon}}$$

1. Ex hoc valore quantitatis b sequitur $\varepsilon = \frac{2b}{1+b^2}$ hinc quoque

$$\frac{\varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \cos v} = \frac{b \sin v}{1 + b^2 + 2b \cos v}$$

Hinc assumamus, secundum partem a se in seriem resolutam

$$\frac{b \sin v}{1 + b^2 + 2b \cos v} = \alpha \sin v - \beta \sin 2v + \gamma \sin 3v - \dots$$

Ad determinationem quantitatum α, β, γ , habemus, si haec series multiplicatur per $1 + b^2 + 2b \cos v$, et coefficientes factorum $\sin v, \sin 2v, \sin 3v$ aequales vero ponuntur,

$$\alpha(1+b^2) = b(1+\beta)$$

$$\beta(1+b^2) = b(\alpha+\gamma)$$

$$\gamma(1+b^2) = b(\beta+\delta) \text{ etc.}$$

hinc $\alpha = b, \beta = b^2, \gamma = b^3, \dots$ et hinc

$$\frac{\varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \cos v} = 2b \{ \sin v - b \sin 2v + b^2 \sin 3v - \dots \}$$

Ad quoque $\cos u = \frac{\varepsilon + \cos v}{1 + \varepsilon \cos v}$ vel $\sin u = \frac{\sin v \sqrt{1-\varepsilon^2}}{1 + \varepsilon \cos v}$ vel tandem

$$\frac{\varepsilon \sin v}{1 + \varepsilon \cos v} = \frac{2b \sin u}{1 - b^2} \text{ hinc est}$$

$$\sin u = (1-b^2) \{ \sin v - b \sin 2v + b^2 \sin 3v - \dots \}$$

et haec expressio dat sinus u per v . Si haec expressio conjungatur cum illa, quae dat u per v , dicitur in variis ex aequatione $m = \frac{b}{\varepsilon} \sin u$ sequens series, quae m per v dat:

$$m = v - 2\varepsilon \sin v + 2b(\varepsilon - \frac{1}{2}b) \sin 2v + 2b^2(\varepsilon - \frac{2}{3}b) \sin 3v + 2b^3(\varepsilon - \frac{3}{4}b) \sin 4v - \dots$$

cujus terminus generalis $\pm 2b^{n-1}(\varepsilon - \frac{n-1}{n}b) \sin nv$. — Ex hac inversa

serie possemus quoque per reversionem aliam derivare, quae daret v per m . Quum autem hoc dicitur non modo clarum per se, veretur, volumus querere v per m via directa.

Nos habuimus prius

$$v = \frac{u}{\varepsilon} + b \sin u + \frac{b^2}{\varepsilon} \sin 2u + \frac{b^3}{\varepsilon} \sin 3u + \dots \text{ h. e.}$$

$$v = u + 2 \sum \left(\frac{b^n \sin nu}{n} \right) \dots \dots \dots (I)$$

ubi signum Σ significat, in quantitate $\frac{b^n \sin nu}{n}$ obtemperari

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Haec ultima aequatio continet u et $\sin nu$ quae debent exprimi per m .

1. Pro u . Resumatur ista recurrens prior pro $0 = \pi - u + x \varphi(y)$
in hac est pro nostro casu $\psi y = u$, ergo invenitur

$$u = m + \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2}{1.2} d \sin m + \dots + \frac{\varepsilon^n}{1.2.3 \dots n} d^n \sin m$$

Ad erat $\frac{d^n \sin m}{d m^{n+1}} = -\frac{1}{2^n} (n^{n+1} \sin m - n(n-2)^{n-1} \sin(n-2)m + \dots)$

tunc post integrationem

$$\frac{\varepsilon^n}{1.2.3 \dots n} \frac{d^n \sin m}{d m^{n+1}} = \frac{\varepsilon^n}{1.2.3 \dots n.2^n} (n^{n+1} \sin m - n(n-2)^{n-1} \sin(n-2)m + \dots)$$

et hac ratione invenitur

$$u = m + \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2}{1.2.2} \sin 2m + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3.2^2} (3^2 \sin 3m - 3 \sin m) + \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4.2^3} (4^2 \sin 4m - 4.2^2 \sin 2m) \dots (A)$$

2. Pro $\sin nu$. Sic est $\psi y = \sin nu$, tunc

$$\frac{1}{n} \sin nu = \frac{1}{n} \sin nm + \varepsilon \sin m \cos nm + \frac{\varepsilon^2}{1.2} d (\sin m \cos nm)$$

et terminus generalis hujus serie est $\frac{\varepsilon^n}{1.2.3 \dots n} d^n (\sin m \cos nm)$

secundum priora est

$$2^n \cos^n \alpha \cos nm = \cos n\alpha \cos nm + \frac{n}{1} \cos(\pi-2)\alpha \cos nm + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos(\pi-4)\alpha \cos nm + \dots$$

Si ergo est $\alpha = 90 - m$, tunc est $\pi = 5, 9, 13, 17, \dots$

$$\cos n\alpha = \sin \pi m \dots \cos(\pi-2)\alpha = -\sin(\pi-2)m \text{ etc}$$

et hinc priora series

$$2^n \sin^n m \cos nm = \sin \pi m \cos nm - \frac{n}{1} \sin(\pi-2)m \cos nm + \frac{n(n-1)}{1.2} \sin(\pi-4)m \cos nm \dots$$

vel si producta evolvuntur

$$2^n \sin^n m \cos nm = \sin(\pi+n)m + \sin(\pi-n)m - \frac{n}{1} \{ \sin(\pi-2+n)m + \sin(\pi-2-n)m \} + \frac{n(n-1)}{1.2} \{ \sin(\pi-4+n)m + \sin(\pi-4-n)m \} \dots$$

Si dein comparantur quartae, octavae, 12., 16. ... $(\pi-1)$ differ-
entia hujus expressionis, invenitur:

$$\frac{\varepsilon^n d^n \sin^n m \cos nm}{1.2.3 \dots n d m^{n+1}} = \frac{\varepsilon^n}{1.2.3 \dots n.2^n} \left\{ \begin{aligned} & \{ (\pi+n)^n \sin(\pi+n)m + (\pi-n)^n \sin(\pi-n)m \} \\ & - \frac{n}{1} \{ (\pi-2+n)^n \sin(\pi-2+n)m + (\pi-2-n)^n \sin(\pi-2-n)m \} \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2} \{ (\pi-4+n)^n \sin(\pi-4+n)m + (\pi-4-n)^n \sin(\pi-4-n)m \} \\ & - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \{ (\pi-6+n)^n \sin(\pi-6+n)m + (\pi-6-n)^n \sin(\pi-6-n)m \} \\ & \dots \end{aligned} \right.$$

Si nunc ponitur pro π series numerorum naturalium 0, 1, 2, 3, 4, ...
et pro unitate causa speculativa

$$A^0 = \frac{1}{n} \sin nm \quad A^1 = \sin(\pi+1)m - \sin(\pi-1)m$$

$$A^2 = \frac{1}{1 \cdot 2} \{ (n+2) \sin(n+2)m - 2n \sin nm + (n-2) \sin(n-2)m \}$$

$$A^3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \{ (n+3)^2 \sin(n+3)m - 3(n+1)^2 \sin(n+1)m + 3(n-1)^2 \sin(n-1)m - (n-3)^2 \sin(n-3)m \}$$

et generationem

$$A^n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \left\{ (\pi+n)^n \sin(\pi+n)m - \frac{\pi}{1} (\pi+n-2)^{n-1} \sin(\pi+n-2)m \right. \\ \left. + \frac{\pi(\pi-1)}{1 \cdot 2} (\pi+n-4)^{n-2} \sin(\pi+n-4)m - \cdots \right\}$$

Deinde habemus pro $\sin nu$ si $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ ponitur

$$\sin nu = A^0 \alpha^0 + A^1 \alpha^1 + A^2 \alpha^2 + A^3 \alpha^3 + \cdots \quad (B)$$

3. Adhuc deest evolutio quantitatis b^n in aequatione (I)

Ad hoc solvendum est, aequationis $0 = \frac{\varepsilon^2}{x} + x + 2$ unam rootem

esse $x = 1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{b}{a}$ ubi b priorum significationem habet.

Si haec aequatio comparatur cum priori et ponitur $\psi y = x^n$

erit, si iterum $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ ponitur

$$b^n = \alpha^n \left\{ 1 + n\alpha^2 + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2} \alpha^4 + \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^6 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^8 + \cdots \right\} \quad (C)$$

4. Invenitis hac ratione terminis generalibus quantitatum a ,

$\sin nu$, et b^n vel aequationibus (B), (C), substituemus modo restat

substitutio in aequatione (I), quod dat

$$\alpha \frac{v}{2} = \frac{m}{2} + \sum \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \left\{ n^n \sin nm - \frac{n}{1} (n-2)^{n-1} \sin(n-2)m + \frac{n(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2} \sin(n-4)m - \cdots \right\} \\ + \sum \left\{ \alpha^n A_0^n + \alpha^{n+1} (A_0^n A_1^n + A_1^n A_0^n) + \alpha^{n+2} (A_0^n A_2^n + A_1^n A_1^n + A_2^n A_0^n) + \alpha^{n+3} (A_0^n A_3^n + A_1^n A_2^n + A_2^n A_1^n + A_3^n A_0^n) \right. \\ \left. + \alpha^{n+4} (A_0^n A_4^n + A_1^n A_3^n + A_2^n A_2^n + A_3^n A_1^n + A_4^n A_0^n) + \alpha^{n+5} (A_0^n A_5^n + A_1^n A_4^n + A_2^n A_3^n + A_3^n A_2^n + A_4^n A_1^n + A_5^n A_0^n) \right. \\ \left. + \alpha^{n+6} (A_0^n A_6^n + A_1^n A_5^n + A_2^n A_4^n + A_3^n A_3^n + A_4^n A_2^n + A_5^n A_1^n + A_6^n A_0^n) + \cdots \right\}$$

ubi n secundum ordinem aequale poni debet 1, 2, 3, 4, ...

per hanc expressionem facile factorum aliquos potentias quantitatis $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ deducere possumus.

Ut hoc emulamus, per exemplum volumus factores priorum quantitatum querere. Si designamus A^0, A^1, A^2, \dots valores quantitatis A^0 pro casibus specialibus ubi $n=1, n=2, n=3$ &c.

sin habemus & priori generali expressione pro A^n

$$A^0 = \sin m, A^1 = \sin 2m, A^2 = \frac{1}{2}(3 \sin 3m - \sin m)$$

$$A^3 = \frac{1}{8}(8 \sin 4m - 4 \sin 2m), A^4 = \frac{1}{24}(8^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m)$$

$$A^5 = \frac{1}{6}(25 \sin 5m - 2^4 \sin 3m + 4 \sin m)$$

$$A^6 = \frac{1}{63} \sin 3m, A^7 = \sin 4m - \sin 2m, A^8 = \frac{1}{2}(5 \sin 5m - 6 \sin 3m + \sin m)$$

$$A^9 = \frac{1}{4} \sin 4m, A^{10} = \sin 5m - 3 \sin m,$$

$$A^{11} = \frac{1}{5} \sin 8m.$$

Cum his valoribus habemus ex ultima expressione pro $\frac{v}{2}$

$$\text{pro } n=1, \quad \alpha \sin m + \alpha A^0 = 2\alpha \sin m$$

$$\text{pro } n=2, \quad \alpha^2 \sin 2m + \alpha^2 (A^1 + A^2) = \frac{5}{2} \alpha^2 \sin 2m$$

$$\text{pro } n=3, \quad \alpha^3 (3 \sin 3m - \sin m) + \alpha^3 (A^2 + A^3 + A^4 + A^5) = \alpha^3 \left(\frac{13}{2} \sin 3m - \sin m \right)$$

$$\text{pro } n=4, \quad \frac{4\alpha^4}{3} (2 \sin 4m - \sin 2m) + \alpha^4 (A^3 + A^4 + A^5 + A^6 + A^7 + 2A^8) = \alpha^4 \left(\frac{133}{12} \sin 4m - \frac{11}{3} \sin 2m \right)$$

$$\text{pro } n=5, \quad \frac{\alpha^5}{24} (8^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2 \sin m) + \alpha^5 (A^4 + A^5 + A^6 + 3A^7 + A^8 + A^9 + A^{10} + A^{11})$$

$$= \alpha^5 \left(\frac{8}{6} \sin m + \frac{43}{4} \sin 3m + \frac{1097}{3 \cdot 4 \cdot 5} \sin 5m \right)$$

$$\text{hinc patet: } v = m + 25 \sin m + \frac{5}{2} \epsilon^2 \sin 2m + \frac{\epsilon^3}{2} \left(\frac{13}{3} \sin 3m - \sin m \right)$$

$$+ \frac{\epsilon^4}{243} \left(\frac{103}{2} \sin 4m - 11 \sin 2m \right) + \frac{\epsilon^5}{2^5} \left(\frac{1097}{2 \cdot 3 \cdot 5} \sin 5m - \frac{43}{2} \sin 3m + \frac{5}{3} \sin m \right)$$

Continuata haec series occurrit in Berlin Jahrbuch p. 1820, p. 229

a ulib. Schubert et pro 1821. p. 88. a ulib. Degen?

Si vellemus cum antiquioribus astronomis anomalias m , u , et v non a perihelio, sed ab aphelio computare, deberemus in praecedentibus expressionibus tantum modo ponere quilibetatem & negativam.

Maxima aequatio centri

pro puncto orbitae ubi differentia verae et mediae anomaliae est maxima, h. e. pro loco maxime aequationis centri est $d(v-m)=0$ seu

$dv=dm$, (h. e. motus verus devenit aequalis motui medio). Sed erat

$\frac{dv}{dm} = \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi$, si $\epsilon = \sin \varphi$, vel est $\frac{r^2}{a^2} = \cos \varphi$. Si hic valor substituitur in aequatione $\frac{r}{a} = 1 - \epsilon \cos u$ erit $\cos u = 1 + \sqrt{\cos \varphi}$. (Haec aequatio

(8) dat $v-u = 2 \text{ Arc sin} \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2} \sin u}{\sqrt{\cos \varphi}} \right)$ h. e. secundum aequationem

$$m = u - \epsilon \sin u, \quad v-m = 2 \text{ Arc sin} \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2} \sin u}{\sqrt{\cos \varphi}} \right) + \epsilon \sin u$$

et haec est expressio maxime aequationis centri, si in ea ponitur

pro ut valor ex locu = $\frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$.

Nos posuimus ex hac ultima aequatione maximam aequationem centri $v - m = f$ in serie deducere, quae secundum potentias quatuor-
tatis ε progreditur. Sed facilius oblinetur haec series sequenti
modo. — Erat in precedentibus $dv = \frac{a^2}{r^3} (1 - \varepsilon^2)^{3/2} dm + \frac{(1 + \varepsilon \cos v)}{\cos v} dm$ d q .

Quum autem $dv = dm$, erit: $\frac{a}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, seu $\frac{a}{a} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos v}$ hinc
quoque $(1 - \varepsilon^2)^{3/2} = (1 + \varepsilon \cos v)^2$ et hinc prima aequatio

$$dv - dm = d\varepsilon \sin v \left(\frac{1}{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right)$$

$$\text{Id est } \cos v = -\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - (1 - \varepsilon^2)^{3/2} \right) = -\frac{3\varepsilon}{2} - \frac{3\varepsilon^3}{2^3} - \frac{5\varepsilon^5}{2^5} - \frac{5 \cdot 9 \varepsilon^7}{2^7} - \text{etc.}$$

$$\text{et } \sin v = \sqrt{1 - \cos^2 v} = 1 - \frac{9}{32} \varepsilon^2 - \frac{225}{2048} \varepsilon^4 - \frac{4733}{65536} \varepsilon^6 + \dots$$

et praeterea

$$(1 - \varepsilon^2)^{-1} = 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \dots$$

$$(1 - \varepsilon^2)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{15}{8} \varepsilon^4 + \frac{105}{128} \varepsilon^6 + \dots$$

Atque est

$$\sin v d\varepsilon \left\{ \frac{1}{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right\} = \left(1 - \frac{9}{32} \varepsilon^2 - \frac{225}{2048} \varepsilon^4 - \dots \right) \left(2 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 + \frac{37}{32} \varepsilon^4 + \frac{134}{128} \varepsilon^6 \right) d\varepsilon$$

Productum harum duarum serierum est

$$2 + \frac{11}{16} \varepsilon^2 + \frac{599}{1024} \varepsilon^4 + \frac{599}{1024} \varepsilon^4 + \dots$$

et haec ultima expressio multiplicatur per $d\varepsilon$ et integratur
dein est quae sita maxima aequatio centri

$$f = 2\varepsilon + \frac{11}{48} \varepsilon^3 + \frac{599}{5120} \varepsilon^5 + \frac{14219}{229376} \varepsilon^7 + \frac{2032363}{37748736} \varepsilon^9 + \dots$$

et si haec series invertitur, est

$$2\varepsilon = f - \frac{11}{32} f^3 + \frac{5 \cdot 87}{3 \cdot 5 \cdot 2^{15}} f^5 - \frac{5 \cdot 46583}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2^{21}} f^7 - \text{etc.}$$

quae duae series f per ε , et ε per f dant.

(Vid. Gauss Theor. motus corp. celest. et Berlini (Fabr. 6. 1790. p. 236
et 1804. p. 218 et 1805 p. 147.)

Ex omnibus precedentibus igitur videmus quomodo pro quolibet
tem. ore veram anomaliam v et radium vectorem r planetae
vel aut cometarum invenire possumus. — Si enim quantitati

v addatur longitudo perihelii p , dein invenitur vera longitudo
planetae in orbita; vel si addatur quantitati v elongatio perihelii
a nodo π , invenitur argumentum latitudinis ita ut

$$\delta = v + \pi, \text{ vel etiam } \delta = v + p - K \text{ fit, si } K \text{ est longitudo } R \text{ ascendens.}$$

Ex quantitate δ et inclinatione orbitae n versus planum eclipticae invenitur diu facile ad eclipticam vera longitudo l' et ex centro Solis visa latitudo b planis per sequentes expressiones

$$\lg(l'-k) = \cos n \lg \delta$$

$$\lg b = \lg n \sin(l'-k) \text{ vel}$$

$$\sin b = \sin n \sin \delta$$

$$\cos b = \frac{\cos \delta}{\cos(l'-k)}$$

Figuram sibi qui libet facile construere potest. (Vid. Masquich p. 133. t. I. p. 28)

Hae reductio quoque potest in seriem dari; nimirum est ex aequatione

$$\lg(l'-k) = \cos n \lg \delta \text{ secundum Trigonometricam}$$

$$\delta - (l'-k) = h \sin 28 - \frac{1}{2} h^2 \sin 48 + \frac{1}{6} h^3 \sin 68 - \dots \text{ et}$$

$$\delta - (l'-k) = h \sin 2(l'-k) + \frac{1}{2} h^2 \sin 4(l'-k) + \dots$$

ubi $h = \lg \frac{\delta}{\sin 28}$ et $\delta - (l'-k)$ est reductio ad eclipticam. (Vid. Delambre 2. 241. p. 237)

U. c. $\delta = 12^\circ 5' 55''$, $k = 112^\circ 1' 30''$, $n = 2^\circ 29' 47''$, invenitur reductio quam nominare volumus δ

$$\delta = 94''.2 \text{ hinc } l' = 229^\circ 8' 59''.2 \text{ et } b = +1^\circ 59' 27''.2 \text{ septentr.$$

Ad finem huius materiae adhuc evolvere volumus aequationem temporis, de qua etsi breviter jam erat sermo.

Aequatio temporis est differentia veri et medi temporis seu differentia aperiensuum reitarum veri et secundi medi Solis in partibus medi temporis expressa.

Est L , l , d , media, vera longitudo et vera aperiensio Solis; δ reductio, vera longitudo vis Solis ad aequatorem vel differentia vera longitudo et vera aperiensio rectae Solis, tandem p , longitudo perihelii terrae, omnes haec longitudo computatae a medio puncto verno. Pro vero, mutatione affluente puncto verno sint eadem quantitates signatae. His suppositis habemus

$$\alpha' = l + \delta \cdot 7.18 \sin \alpha \cos \alpha$$

ubi e est obliquitas eclipticae et α longitudo nodi ascendens orbitae lunae. Si quantitas $7.18 \sin \alpha \cos \alpha$ quae valet pro plano aequatoris, reducat ad eclipticam, habemus pro hac reducta quantitate

$$L' = l - (l - d) - \frac{7.18 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin e}$$

et

et aequatio temporis est $dt = \frac{1}{15} (L' - L)$ vel

$$dt = \frac{1}{15} \left((1-L) + \xi + 7.18 \sin 2L (t_{me} - t_{ge}) \right)$$

Si ponimus $e = 23^\circ 28'$, est

$$dt = \frac{1}{15} (1-L+\xi) + 0.099 \sin 2L \quad \text{--- (I)}$$

et tunc expressioni perturbationis adhuc addi debent, quas patitur Terra in suis longitudinibus a planetis. Nos volumus summam harum perturbationum ad tempus reducantur, per $\frac{1}{15} L$ exprimere. Si autem e est ratio excentricitatis ad semiaxis majorem orbis, haec per λ et $\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}$ deinde est secundum priora.

$$(m = v - 2e \sin v + 2e(\frac{1}{2} - e) \sin 2v)$$

$$L - L' = 2e \sin(L-p) - 2\lambda(\frac{1}{2} - \lambda) \sin 2(L-p) + 2\lambda^2(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda) \sin 3(L-p) - 2\lambda^3(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda) \sin 4(L-p)$$

Propterea est, si h est tangens dimidii obliquitatis eclipticae scilicet, cum proccentia ($\xi = h \sin 2e$).

$$\xi = -\frac{h^2}{2} \sin 2L + \frac{h^4}{2} \sin 4L - \frac{h^6}{3} \sin 6L$$

hinc erit aequatio (I)

$$dt = \frac{2e}{15} \sin(L-p) - \frac{h^2}{15} \sin 2L + 0.099 \sin 2L + \frac{1}{15} L \\ - \frac{2\lambda}{15} (\frac{1}{2} - \lambda) \sin 2(L-p) + \frac{h^4}{30} \sin 4L + \\ + \frac{2\lambda^2}{15} (\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda) \sin 3(L-p) - \frac{h^6}{45} \sin 6L$$

Pro 1800.00 sit $e = 0.016791$, $p = 279^\circ 29' 33''$, $e = 23^\circ 28' 57''$

hinc $\log \lambda = 7.9240772$ ergo

$$dt = 461.786 \sin(L-p) - 593.146 \sin 2L + 0.099 \sin 2L + \frac{1}{15} L \\ - 2.907 \sin 2(L-p) + 12.793 \sin 4L \\ + 0.022 \sin 3(L-p) - 0.368 \sin 6L$$

et quantitas L invenitur ex cognita quantitate L' per aequationem

$$L = L' + 6926.54 \sin(L-p) + 72.68 \sin 2(L-p) + 1.66 \sin 3(L-p) + 0.02 \sin 4(L-p)$$

Determinatio harum perturbationum quarum summam nos designavimus per L pertinet ad Astronomicam physicam.

Si planetae huiusmodi actioni Solis obtemperant, describent circa centrum Solis, quae focum, pure ellipticas orbitas, quoniam autem unus in alterum et in solem ipsum agant, oriuntur in motibus ellipticis perturbationes, quae etiam in observationibus innotescunt, et quae accurate

Determinari debent, si volumus construere accuratas tabulas mo-
tum planetarum, problema, quod viro docto analysi transien-
sit, si non nisi iter parva massa planetarum, eorum parvas ex-
centricitates et eorum respectu unitatis non notabiles excentricitates,
nobis suspicatarerit moia, has difficultates vincendi, et istud ac-
modum difficile problema, saltem appropinquando resolvere.

Harum perturbationum positivum sunt duo genera.

Prima mutant elementa ipsa orbitalium, et quum ha pertur-
bationes admodum lentae sint, et post plura secula periodice re-
dunt, nominantur perturbationes seculares. Secundae autem
dependunt a relativis positionibus planetarum tam inter se quam
quoad eorum nodos et perihelia et quum ha positiones generatione
in parvis periodis redeant, earum actiones dominantibus periodicis
perturbationibus. Inter omnia elementa orbitalium ellipticorum
planetarum solum eorum axis major, et hinc etiam quod medius
motus planetarum, est invariabilis, cetera autem, excentricitas,
inclinatio, longitudo perihelii et nodi semper variationibus sunt
obnoxii. Pro orbita terre v. c. nunc est annua variatio longitu-
dinis perihelii $+11''.8$ et annua immutatio obliquationis
orbis versus aequatorem $0''.52$, ex quo ope analysis monstra-
ri potest, perigeeum solis cum puncto aequinoctiali verno ver-
sus annum 4090 ante Christum natum coincidis, epocha,
in quam fere omnes nostrorum Chronologorum creationem
mundi ponunt.

Periodicae perturbationes conosciuntur per sinus et cosinus an-
gularum, a quibus dependunt, representari possunt, quia ha
trigonometricae functiones etiam post quamlibet circumfe-
rentiam, quae sui anguli augetur, periodice redeunt. Pro-
mot. terre praecipue harum periodicarum perturbationum
sunt sequentes, in quibus \odot et \oplus geocentricam longitudinem
lunae et solis et ζ , δ , γ ... heliocentricas longitudes Ve-
neris, terre, et Martis etc. designant.

Et nimirum obtineatur vera longitudo solis (h. e. longitudo
terre

terre plus 180°) debet addi ad ejus medianam longitudinem
pro data epocha aequatio elliptica orbitae $v-m = \text{etc}$ et
per hanc perturbationes longitudinis

$$\begin{aligned} & 4'' 5 \sin(Q - \odot) \\ & 5.7 \sin(Q - \delta) - 6.4 \sin(2Q - 2\delta) + 2.9 \cos(2Q - 3\delta) + 1.9 \cos(3Q - 4\delta) \\ & - 2.5 \sin(2\delta - 2\delta') + 1.5 \sin(2\delta - \delta) + 1.5 \cos(2\delta - \delta) \\ & - 7.1 \sin(\delta - 2\delta') + 2.7 \sin(2\delta - 2\delta') - 2.5 \sin 2\delta' \end{aligned}$$

et ad obtinendam veram distantiam a terra; addi debent ad

distantiam ellipticam $\frac{r}{a} = \text{etc}$ perturbationes

$$\begin{aligned} & 0.000037 \cos(Q - \odot) \\ & - 0.000006 \cos(Q - \delta) + 0.000018 \cos(2Q - 2\delta) + 0.000003 \cos(3Q - 3\delta) \\ & + 0.000016 \cos(\delta - 2\delta') - 0.000009 \cos(2\delta - 2\delta') \end{aligned}$$

Locus heliocentricus et geocentricus Planetarum et Cometarum.

In prioribus vidimus, quomodo pro quolibet tempore possi-
mus invenire veram a centro solem visam longi tudinem,
latitudinem et distantiam planetarum ab hoc centro soles.
Adhuc restat resolutio problematis, quomodo ex pte pla-
netarum visus Solem, possit inveniri eorum ptes visus terram
et invicem, quae disceptatio pro nobis ex hac ratione est. majore
momenti, quia hoc astrum ex terra videtur, et quidem pro-
prius motus terrae notabilis est, tantum apparentes perturba-
tiones in motibus planetarum producat, quae penitus evanescunt
si ex centro terrae observata seu geocentrica loca planetarum
ad illa ex sole visa seu heliocentrica referantur. —

Sit in sequentibus α , δ et λ , 3 geocentrica aspectus recta, de-
clinatio et geocentrica longitudo et latitudo planetae, φ distan-
tia planetae a terra et $\varphi' = \varphi \cos \beta$ projectio quantitas φ ad pla-
num ecliptic.

Sit eadem ratione l , b , r heliocentrica longitudo, latitudo pla-
netae et ejus distantia a sole, et $r' = r \cos \beta$. Tandem L , B , R ,
heliocentrica longitudo et latitudo terrae ejusq. distantia a sole
et $R' = R \cos \beta$.

Proterea designet K longi tudinem nodi ascensionis orbis
planetae in ecliptica, n , inclinationem orbis versus
eclipticam, v heliocentricam longi tudinem planetae in orbi-
ta, et $u = v - K$ argumentum latitudinis planetae; γ angulus
conjunctionis vel angulus $r'R'$ ad solem, η elongatio vel
angulus $\varphi'R'$ ad terram et π annualis parallaxis seu angulus
 $R'g$ ad planetam.

Et heliocentricus locus planetae uti et heliocentricus locus terrae
sit datus, quae rectae geocentrica aspectus recta et declinatio
planetae.

Si sitas terræ versus Solem per tres rectas aures coordinatas
 X, Y, Z determinatur, ubi X est in linea aequinoctiorum
 et X, Y in plano eclipticæ, dein habemus

$X = R \cos B \cos L, Y = R \cos B \sin L, Z = R \sin B$
 sunt X, Y, Z analogæ coordinatæ terræ et XY in plano
 æquatoris, dein est, si e est obliquitas eclipticæ,

$$X = X', Y = Y' \cos e - Z' \sin e, Z = Z' \cos e + Y' \sin e$$

$$X = R \cos B \cos L, Y = R \cos B \sin L \cos e - R \sin B \sin e$$

$$Z = R \cos B \sin L \sin e + R \sin B \cos e$$

pro quo quoniam B semper sit parvum, deinde in omnibus co-
 ribus poni potest, $X = R \cos L, Y = R \sin L \cos e, Z = R \sin L \sin e$
 et hæc coordinatæ X, Y, Z proprie pertinent ad punctum super
 superficiem terræ ex quo observator longitudinem Solis $L = L - 180^\circ$
 vidit. Tantum sunt ξ, ν, ζ analogæ coordinatæ quæ locum obser-
 vatoris in superficie terræ versus ejus centrum determinant,
 et si per Geocentricam altitudinem plati observatoris, per M aspec-
 tum veram Zenithi, et tandem per p distantiam observatoris a
 centro terræ designatur, dein est:

$\xi = p \cos \varphi \cos M, \nu = p \cos \varphi \sin M, \zeta = p \sin \varphi$
 et ut determinetur sitas centri terræ versus Solem per coordi-
 natas X, Y, Z , prioribus valoribus quantitatibus X, Y, Z
 adhuc hi valores quantitatibus ξ, ν, ζ addi debent h. e. habebimus

$$X = R(\cos B \cos L) + p \cos \varphi \cos M$$

$$Y = R(\cos B \sin L) + p \cos \varphi \sin M$$

$$Z = R(\cos B \sin L \cos e - \sin B \sin e) + p \sin \varphi$$

$$Z = R(\cos B \sin L \sin e + \sin B \cos e) + p \sin \varphi$$

1. In prioribus valoribus coordinatarum X, Y, Z terræ versus Solem
 respectu æquatoris sunt inventi. Si autem haberemus similes
 coordinatas x, y, z quæ situm planetæ versus Solem etiam quæ
 æquatoris determinarent, statim quæ sitas quantitates
 α, δ et φ haberemus per sequentes appositiones
 $x - X = \varphi \cos \delta \cos \alpha, y - Y = \varphi \cos \delta \sin \alpha, z - Z = \varphi \sin \delta$

2. Ad invenientias quantitates x, y, z dantur plures methodi.
 Prius sitas planetarum versus Solem determinatur per coordinatas

$x'' y'' z''$ quarum x'' sit in linea nodorum, $x'' y''$ in plano eclipticæ, z'' in z' , $x'' = r \cos u$, $y'' = r \sin u \cos n$, $z'' = r \sin u \sin n$ vel etiam, si l et b sunt datae

$$x'' = r \cos b \cos(l-k), \quad y'' = r \cos b \sin(l-k) = r \sin b \tan n, \quad z'' = r \sin b$$

et autem the coordinates transfertur in alias $x' y' z'$ quarum x' in linea æquinoctiorum, $x' y'$ in eclipticæ jacent, est

$$x' = x'' \cos k - y'' \sin k, \quad y' = x'' \sin k + y'' \cos k, \quad z' = z''$$

et si tandem hæc coordinates cum primis x, y, z comparantur ubi x in linea æquinoctiorum, xy in æquatore jacent, erit

$$x = x'$$

$$y = y' \cos e - z' \sin e$$

$$z = y' \sin e + z' \cos e$$

et cum præcedentiâ conjungantur, oblinemus pro coordinatis

x, y, z sequentes expressiones

$$x = r (\cos u \cos k - \sin u \sin k \cos n)$$

$$y = r (\cos u \sin k \cos e + \sin u \cos k \cos n \sin e - \sin u \sin n \sin e)$$

$$z = r (\cos u \sin k \sin e + \sin u \cos k \cos n \sin e + \sin u \sin n \cos e)$$

Ut autem hæc expressiones ad calculum commodiores evadant,

$$\text{fit } \tan A = - \frac{\tan k}{\cos n}, \quad \sin a = \frac{\cos k}{\sin n}, \quad \text{et } \tan \psi = \frac{\tan n}{\cos k}$$

$$\tan B = \frac{\sin k \cos e \sin \psi}{\sin n \cos(\psi + e)}, \quad \sin b = \frac{\cos e \sin k}{\sin n}$$

$$\tan C = \frac{\sin k \sin e \sin \psi}{\sin n \sin(\psi + e)}, \quad \sin c = \frac{\sin e \sin k}{\sin n}$$

et erant sequentes singulas expressiones

$$x = r \sin a \sin(A+u), \quad y = r \sin b \sin(B+u), \quad z = r \sin c \sin(C+u)$$

et quilibet facile se convincere poterit, a, b, c esse respectivas inclinationes plani planities, versus coordinatas planas xy, xz , et xy , et A, B, C esse angulos quos linea nodorum orbitæ in eclipticâ cum lineis nodorum orbitæ in iisdem coordinatis planis yz, xz , et xy facit, ubi xy est planum æquatoris, xz planum solari æquinoctiorum et yz planum solari solstitionum.

Si habuerimus similes coordinatas pro terra, erit

$$x = R \sin a' \sin(A'+u), \quad y = R \sin b' \sin(B'+u), \quad z = R \sin c' \sin(C'+u)$$

et nos habuerimus, $A' = a' = 90^\circ$, $B' = C' = 0$, $b' = 90^\circ + e$, $c' = e$ hinc quoque $x = R \cos u$, $y = R \cos e \sin u$, $z = R \sin e \sin u$

Quantitates A, a, \dots secularibus variationibus sunt obnoxie quia quantitates n, k, e , a quibus dependent, similes variationes patiuntur. Quoniam autem hæc variationes admodum sunt parvæ, et cum tempore fere uniformiter progrediuntur, commodissime

est

est medius valoris quantitatibus n. k. e. pro reliquis annis eligen-
di, et ex hoc pro iisdem epochis valores quantitatibus A. a.
in tabulis ponendi. Ob hanc hanc ratione medius valoris quan-
tatum A. a. et hinc quoque medius aperiens nos rectas et decli-
nationis α , δ , quae deinde per notas correctiones mutationis et fa-
cile ad veras α , δ reduci possunt.

Ad illustrationem propositum adducam exemplum.

pro Mercurio est pro initio anni 1800

$$\begin{aligned} K &= 45^\circ 56' 48'' \text{ annua tropica variatio} & + 48''.30 \\ n &= 0^\circ 0' 8.9 & + 0.0178 \\ e &= 23^\circ 24' 54.0 & - 0.52 \end{aligned}$$

Hinc est pro initio anni

1800	1810	1820
$A = 135^\circ 43' 56''.2$	$135^\circ 54' 9''.2$	$135^\circ 58' 22''.4$
$B = 48^\circ 26' 19.3$	$48^\circ 33' 47.4$	$48^\circ 41' 15.5$
$C = 36^\circ 30' 28.5$	$36^\circ 36' 18.9$	$36^\circ 42' 9.5$
$\log. \sin a = 9.9983268$	9.9983197	9.9983129
$\log. \sin b = 9.9450091$	9.9450591	9.9451093
$\log. \sin c = 9.6821782$	9.6820388	9.6818994

Quadratur v. c. pro 1808 8 Octobr. $11^\circ 45' 41''$ temporis medi ϕ Pacifici,
vera geocentrica aperiens recta et declinatio Mercurii. Pro
hoc tempore est ex tabulis argumentum latitudinis $u = 212^\circ 13' 26.9$

$\log. \text{radii vectoris seu } \log. r = 9.6684420, K = 46^\circ 3' 7''.7, n = 0^\circ 0' 9''.1$

Pro eodem tempore est adhuc longitudo terre $L = 15^\circ 59' 35.9, \log. k = 9.9990470$

Hinc est:

$A = 135^\circ 50' 16.1$	$\log. \sin a = 9.9983206$
$B = 48^\circ 32' 52.4$	$\log. \sin b = 9.9450529$
$C = 36^\circ 35' 38.9$	$\log. \sin c = 9.6820559$

ergo $X = 0.9592530$ $x = -0.0964018$
 $Y = 0.2522046$ $y = -0.4056417$
 $Z = 0.1094761$ $z = -0.2092323$

et ex hoc sequitur

Media geocentrica aperiens recta Mercurii $\alpha = 211^\circ 56' 13''.2$
 declinatio $\delta = -14^\circ 22' 12''.1$
 $\rho = 1.9837618$

Notari quoque possunt inter quantitates A. a. notatu dignas
 Relationes

relationis locum habere, quarum principales sunt sequentes:

$$\sin(A-B)\sin a \sin b = \cos c$$

$$\sin(B-C)\sin b \sin c = \cos a$$

$$\sin(C-A)\sin c \sin a = \cos b$$

$$\sin a \sin(A-B)\sin(A-C) = \cos(B-C)$$

$$\sin b \sin(B-C)\sin(B-A) = \cos(A-C)$$

$$\sin c \sin(C-A)\sin(C-B) = \cos(A-B)$$

$$\cos(A-B)\cos(C-A) = \cos a$$

$$\cos(B-C)\cos(A-B) = \cos b$$

$$\cos(C-A)\cos(B-C) = \cos c$$

$$\cos(A-B) + \cos a \cos b = 0$$

$$\cos(B-C) + \cos b \cos c = 0$$

$$\cos(C-A) + \cos c \cos a = 0$$

et plures

(Prel. monatly correspond, 1804. May. Berl. Jahrb. 1813 p. 104 et 1818 p. 267.)

Procedens methodus, praecipue secundum applicabilis, si finem
plura loca geocentrica sunt querenda, ubi hoc locum habet apud
constructio nem. eptemeridum, ubi valores A, a, \dots per integros
mensis incurrebant, quorum resoluta finitima dantur in mi-
nuta primis querebatur.

Quandis δ, η, κ rectum adhuc alio notabili modo exprimi possunt.

Si nimirum, in producendum tria nova quantitates auxiliares

N, K et O ita ut habeamus

$$\cos N = \cos e \cos n - \sin e \sin n \cos k$$

$$\cos K \sin k = \cos n \sin e + \cos e \cos k$$

$$\cos O \sin k = \cos e \sin n + \cos n \cos k$$

et si ponatur $O = -u + v$, duae primae aequationes, in N et 2
transierunt in sequentes

$$x = r(\cos u \cos K - \sin u \sin K \cos N)$$

$$y = r(\cos u \sin K + \sin u \cos K \cos N)$$

$$z = r \sin u \sin N$$

et nos videmus, nos obtinere ex illis has si n, k, u , in N, K, u
mutantur et e aequale zero ponitur. Si igitur ubi ubi asume-
mus $\delta = -\frac{\cos K}{\cos N}$, $\eta = \frac{\sin K}{\cos N}$, $\kappa = 0$

$$\sin a = \frac{\cos K}{\sin N}, \sin b = \frac{\sin K}{\sin N}, \sin c = \sin N \text{ vel}$$

$$\cos a = \sin N \sin \delta, \quad \cos b = -\sin N \cos \delta, \quad \cos c = \cos N$$

erit iterum

$$x = r \sin a \sin(A+U)$$

$$y = r \sin b \sin(B+U)$$

$$z = r \sin c \sin(C+U)$$

1. Per præcedentia igitur determinatio coordinatarum x, y, z est
 quod si ad tres quantitates N, K, O et facile videmus, N in
 inclinationem orbitæ ad æquatorum, K per angulum lineæ nodi
 cum orbitæ in æquatore cum linea æquinoctiali, vel æquatoris
 cum recta nodi, ascendens in æquatore, et tandem O cum
 linea nodi nodum orbitæ in æquatore cum linea nodum in
 elliptica etc. distantiæ ambrem in Arcuum nodum.
 tum igitur in triangulo spherico quod formatur: plano æqua-
 toris, a plano ellipticæ et orbitæ, latera sunt K, O, N et in eodem
 ordine e, n, p anguli $180-N, e$ et n , priores pro $\cos N$, etc. e ,
 etc. O etc. expressiones, etiam per trigonometriam sphericam
 derivari possunt, per quam etiam conuenit ad calculationem inuenitur

$$\sin \frac{N}{2} \sin \frac{O-K}{2} = \sin \frac{K}{2} \sin \frac{e-n}{2}$$

$$\sin \frac{N}{2} \cos \frac{O-K}{2} = \cos \frac{K}{2} \sin \frac{e+n}{2}$$

$$\cos \frac{N}{2} \sin \frac{O+K}{2} = \sin \frac{K}{2} \cos \frac{e-n}{2}$$

$$\cos \frac{N}{2} \cos \frac{O+K}{2} = \cos \frac{K}{2} \cos \frac{e+n}{2}$$

Quoniam tandem quantitates e, n, K peculiaribus variationibus sunt
 obnoxie, etiam quantitates N, K, O similibus variationibus sunt
 subiectæ, quæ facile per sequentes expressiones inueniantur.

$$dN = d \cos K + d \cos O - dK \sin O \sin n$$

$$dK = -d \cos N \sin K + dN \sin O + dK \cos O \sin n$$

$$dO = d \cos \frac{N}{2} - dN \sin O + dK \cos \frac{N}{2} \sin e$$

Ita inueniuntur et prius datis valoribus quantitatibus N, K, e pro N etc.
 ad inueniendum æquorum

no. ad. individuals	1800	1810	1820
K =	10° 29' 40.6	10° 31' 10.2	10° 32' 39.5
O =	143 29 31.5	143 23 41.0	143 17 50.5
N =	28 45 11.4	28 44 35.5	28 43 58.7

tunc dato exemplo pro 1803. 8 Patet est

$$K = 10^{\circ} 30' 59.2 \quad O = 143^{\circ} 24' 24.1 \quad N = 28^{\circ} 44' 39.9$$

ex quo sequitur

$$x = -0.096102, \quad y = -0.405642, \quad z = -0.209133$$

ut prius

2. Prioris considerationis erat nobis nunc accipere ad admodum com-
mune refectionem nostri problematis.

Inter tabulas planetarum istae sunt communes, ut ex eis pro quoli-
bet dato tempore argumentum latitudinis et radium velorem in
virescentibus. Cum nota inclinatione orbis in versus eclipticam
et longitudinem nodi ascendens orbis in ecliptica et invenimus
in ex duobus adiacentibus tabulis, quarum argumentum est, helio-
centrica latitudo b et reductio in eclipticam c quae quantitates
etiam derivari possunt ex sequentibus aequationibus

$$\sin b = \sin \delta \sin u, \quad \sin c = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \delta} \frac{1}{\cos u} \quad \text{per quae quantitates} \\ \text{dum } L = u + \pi - e.$$

Si autem notae sint quantitates x, l, b cum sint coordinatae rectan-
gulares, quae si sunt planae versus solis dant, si x est in linea
equinoctiali et l in plano eclipticae,

$$x = r \cos b \cos l, \quad y = r \cos b \sin l, \quad z = r \sin b \quad \text{et quoniam quanti-} \\ \text{tates } x, y, z \text{ immediate ex tabulis sumuntur, derivatio coordina-} \\ \text{tarum } x, y, z \text{ nullam habet difficultatem, quam ceterorum earum} \\ \text{reductionem ad aequatoriam de qua prius sermo erat.}$$

Hanc reductionem autem quoque evitare possumus, si tabulis pla-
netarum aliam, nimirum eam constructionem respectu aequa-
toris damus, quam nunc respectu eclipticae habent. Ad hunc finem
non debet constitui tabula ista, ut dant, ut prius, v et u ,
nunc v et $U = u + O$, et ut illae ex duabus adiacentibus tabulis, quarum
argumentum est, heliocentricam declinationem d , et reduc-
tionem c quantitates U ad aequatoriam per aequationes sequen-
tes dant $\sin d = \sin v \sin U$, $\sin c = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos d} \frac{1}{\cos U}$, per quos
nunc heliocentrica ascensio recta $a = U + \pi - c$ sequitur, quae etiam
obtinere potest per expressiones

$$\sin(a - \pi) = \cos d \sin U \\ \cos(a - \pi) = \cos d \cos U$$

Si praesupponimus hanc constructionem tabularum, vel cognitionem
quantitatum v, π, U , ex eis immediate obtinemus, heliocentricam
ascensionem rectam a et declinationem d planetas. Si diu nomi-
namus A, D heliocentricam ascensionem rectam et declinationem
terrae, resolutio nostri problematis non amplius habet difficultatem.

Si, minimum ne lineamus priorem significationem ceterarum quantitatium, deinde habemus pro heliocentrico loco planetæ

$$x = r \cos d \cos \alpha, \quad y = r \cos d \sin \alpha, \quad z = r \sin d$$

pro heliocentrico loco terræ

$$X = R \cos D \cos A, \quad Y = R \cos D \sin A, \quad Z = R \sin D$$

et pro geocentrico loco planetæ

$$x - X = \rho \cos d \cos \alpha, \quad y - Y = \rho \cos d \sin \alpha, \quad z - Z = \rho \sin d$$

Atque ex primis duobus systematibus valores α, α, \dots sunt inveniendi, ultimum systema dicitur

$$\tan \alpha = \frac{y - Y}{x - X}, \quad \tan d = \frac{z - Z}{x - X}, \quad \cos \alpha = \frac{x - X}{\rho}, \quad \rho = \frac{r^2 - R^2}{2r \cos d} = \frac{y - Y}{\sin d \cos \alpha} = \frac{z - Z}{\sin d}$$

Pro hic indicatis valoribus quantitas α, Y, Z commutatur jam prius inveniendi $X = R \cos D \cos A, Y = R \cos D \sin A, Z = R \sin D$ et

adhiberi possunt ubi L est longitudo terræ et e obliquitas eclipticæ. Ut pro cometa ad nostrum exemplum pro ethero 1808.

8. Octobris adhibemus, habemus $\alpha = 256^\circ 46' 17''.6, A = -26^\circ 38' 30''.4$

ergo $x = -0.096102, y = -0.405641, z = -0.203133$ uti prius.

Ad exercitationem volumus loca ipsius pulchri cometæ anni 1811 pro Julio 1812 secundum hanc methodum querere.

Elementa hujus cometæ sunt:

Transit per perihelium 1811 septem 12. 25175 milli temporis Parisiis

Longitudo perihelii $175^\circ 1' 9''.2$

Longitudo $\Omega = K = 140^\circ 24' 29''.9$

Inclinatio $i = 106^\circ 5' 24''.4$

log. minimæ distantiæ 0.0151120

log. semiparametri 0.3151432

excentricitas $e = 0.9954056$

log. medi diurni motus 9.9374598

Quia n majus quam 90° est, cometa est retrogradus, per quos heliocentrica longitudo decrescit.

In triangulo sphærico, quod ab ecliptica, æquatore et orbita eo, metus formatur, sunt duo notæ anguli

$$e = 23^\circ 27' 57'', 180 - n = 73^\circ 2' 35''.6 \text{ et latus cognitum}$$

$$180 - K = 39^\circ 35' 30''.1, \text{ hinc sunt cetera latera } O = 114^\circ 12' 19''$$

$$180 - K = 37^\circ 34' 35'' \text{ et tertius angulus } A = 88^\circ 30' 46''.0 \text{ ut quia}$$

inclinatio A minor est quam 90° , cometa respectu æquatoris est directus, et si quoad eclipticam est retrogradus.

Si, v est, vera anomalia pro aliqua epocha, est pro eodem tempore argumentum declinationis $U = v + 0^{\circ} 65' 23'' 21'' = v + 50^{\circ} 5' 40''$.

pro 1812 Jul. 5^h 15' 25" temporis medi: Parisiis sunt tempora elapsa a transitu per perihelium.

296.74825, 306.74825, 316.74825

x hoc sequitur, vera elliptica anomalia et logarithmus radii vectoris

119° 51' 11"	0.61229
120 46 50	0.62369
121 24 50	0.63351

hinc est cometa heliocent. R

322° 54' 50"
322 59 20
323 0 40

heliocent. declinatio

19° 58' 20"
20 46 5
21 33 0

x	y	z
3.0731	2.3188	1.3966
3.1346	2.3630	1.4884
3.1948	2.4065	1.5797

Eadem ratione est pro terra

heliocentrica longitudo

283° 12' 30"
292 44 43
302 14 40

logarithmus radii vectoris

0.007219
0.007041
0.006864

x	y	z
0.23232	0.96804	0.39414
0.39295	0.85982	0.37321
0.54253	0.78742	0.34178

et hinc sequitur cometa

1812	geocent. R	geocent. declinatio	log. ρ
5 Julii	333° 35' 30"	-17° 32' 20"	0.52290
15	331 15 50	-19 38 0	0.52113
25	328 35 50	-21 43 20	0.52439

Postea licet praecedentium sine dubio est simplicissima, quae pro hac problemate dari potest, sed illa, supponit etiam constructionem tabularum.

Si hanc mutationem tabularum, si optandam non suspicere, neq. derivare prius datos constantes α, β, C , comminandum erit, ad determinationem valorum x, y, z , non ab u , sed a l, b , eare, quae altius quantitates in antiquioribus tabulis immediate datae sunt.

Similium sunt x', y', z' coordinatae planae respectu eclipticae, est.

$x' = r \cos b \cos l$, $y' = r \cos b \sin l$, $z' = r \sin b$, et si sunt x, y, z coordinatae planae respectu aequatoris, erit:

$x = x'$, $y = y' \cos e - z' \sin e$, $z = y' \sin e + z' \cos e$

Si brevitate causa ponatur $\cos m = -2 \cos b \sin^2 \frac{90^\circ - l}{2}$, $\sin n = \cos m \sin e$,
 dicitur est: $x = r \cos b \cos l$, $y = 2r \cos \frac{b+e}{2} \cos \frac{b-e}{2} \cos \frac{b+e-n}{2}$, $z = 2r \sin \frac{b+e}{2} \sin \frac{b-e-n}{2}$
 In nostro exemplo est $u = 212^\circ 13' 26''.9$, $K = 46^\circ 3' 7''.7$, $n = 7^\circ 0' 9''.1$
 Hinc est $l = 258^\circ 4' 59''.0$, $b = -3^\circ 43' 38''.3$,
 Si igitur est $e = 23^\circ 27' 52''.4$, est

$$x = -0.0961623, \quad y = -0.4086421, \quad z = -0.9091320$$

ex quibus cum invenitur pro α , β , δ valoribus sequentibus

$$\alpha = 211^\circ 56' 13''.2 \quad \delta = -14^\circ 22' 12''.0$$

Ut ex helio centrica longitudine et latitudine intermedium geocentrica longitude et latitudine derivetur, volumus statim astris et stellis ad tria in u. invicem perpendicularia plana reducere volumus, quorum unum est ecliptica et quorum duo altera eorum polos habent in longitudine α et $\alpha + 90^\circ$.
 Dicitur est, si idem ponimus $r' = r \cos b$, $\xi' = \xi \cos b$, $R' = R \cos b$,

$$r' \cos(L-N) - R' \cos(L-N) = \xi' \cos(\alpha-N)$$

$$r' \sin(L-N) - R' \sin(L-N) = \xi' \sin(\alpha-N)$$

$$r' \tan b - R' \tan b = \xi' \tan b$$

1. Quamvis quantitas N est arbitraria, sit $N = L$, si dicitur ponitur

$$B = \frac{r'}{R'} \sin(L-L), \quad L = \frac{r'}{R'} \cos(L-L) - 1 \text{ dicitur est}$$

$$\tan(L-L) = \frac{B}{L}, \quad \xi' = \frac{R'}{\sin(\alpha-L)} = \frac{R'}{\cos(L-L)}, \quad \tan \beta = \frac{r' \tan b - R' \tan b}{\xi'}$$

2. Si $N = L + 90^\circ$, $B = \frac{r'}{R'} \sin(L-L)$, $L = 1 - \frac{R'}{r'} \cos(L-L)$ dicitur est

$$\tan(L-L) = \frac{B}{L}, \quad \xi' = \frac{R'}{\sin(\alpha-L)} = \frac{2r'}{\cos(\alpha-L)}, \quad \tan \beta = \frac{r' \tan b - R' \tan b}{\xi'}$$

3. Si est $N = \frac{1}{2}(L-L)$ dicitur est $\tan(\alpha - \frac{1}{2}(L-L)) = \frac{r' + R'}{R' - r'} \tan \frac{1}{2}(L-L)$
 $\xi' = \frac{(r' + R') \sin \frac{1}{2}(L-L)}{\sin(\alpha - \frac{1}{2}(L-L))} = \frac{r' + R'}{\cos(\alpha - \frac{1}{2}(L-L))}, \quad \tan \beta = \frac{r' \tan b - R' \tan b}{\xi'}$

Si ponimus hinc $\frac{r' + R'}{R' - r'} = \tan(45^\circ + p)$

et sic etiam possumus ponere $N = K$ vel $N = 6$ etc.

Ut obtineamus alias expressiones, uti etiam non difficile erit, pro aequationibus ($r' \cos(L-N)$, ...) quae pertinent ad eclipticam, alias similes inveniendo quae aequatori sunt perstructae.

4. Tandem idem problema quoque alio modo resolvi potest.

$$\text{Est } r' = r \cos b, \quad \xi' = \xi \cos b, \quad R' = R \cos b, \quad \xi'' = r'^2 + R'^2 - 2r'R' \cos \gamma,$$

$$\tan \eta = \frac{r' \sin \gamma}{R' - r' \cos \gamma} \text{ vel } \tan \eta = \frac{\sin \psi \sin \gamma}{\sin(\gamma - \psi)} \text{ ubi } \tan \psi = \frac{r'}{R'} \sin \gamma \text{ vel etiam}$$

$$\text{per sequentes expressiones: } \tan \frac{\pi - \eta}{2} = \frac{R' - r' \tan \frac{\pi + \eta}{2}}{R' + r'}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \gamma \tan b}{\sin \eta}, \quad \xi' = \frac{R' \sin \gamma}{\sin \eta}$$

Pro nostro exemplo est primum M. I.

$$L-L=242^{\circ} 5' 23".1, \log. P = 9.6150464M. \log. L = 0.0857588M$$

$$L-L=198^{\circ} 41' 24".4, \lambda=214^{\circ} 47' 0".3 \log. \xi' = 0.1083638,$$

$$\beta = -1^{\circ} 21' 11".9 \text{ et secundum M. I.}$$

$$\psi = 22^{\circ} 23' 54".9, \eta = 18^{\circ} 41' 24".4, \beta = -1^{\circ} 21' 11".9$$

$$A = 180^{\circ} + \eta + L = 214^{\circ} 41' 0".5 \text{ et } \alpha, \beta, \lambda \text{ inveniantur per}$$

eccentrica apsis recta et declinatio, si nimirum est

$$e = 23^{\circ} 24' 32".4 \text{ erit } \alpha = 211^{\circ} 56' 13".2 \text{ et } \delta = -14^{\circ} 22' 11".9$$

ut prius.

Ut igitur asseruere possimus heliocentricum locum pla-
netae, debemus supponere elementa ejus orbitae quae data,
nimirum: 1^o semidiam majorem et ex hac plumbum fiduciam
per solis tropicam revolutionem, 2^o excentricitatem, 3^o lon-
gitudinem perihelii, 4^o mediam longitudinem planctus pro
aliquo tempore dato sui ejus epocham, 5^o inclinationem
orbitae et 6^o planum lineae horum versus eclipticam vel
aequatorem. — Atque duae ultimae determinant plumbum, prius
tres magnitudinem et formam orbitae. Si elementa 2, 3,
4, et 5 sunt variabiles, etiam haec varia lineae, quae per se
per tempore proportionales possunt esse, debent esse datae.
Si tempus transitus planctus per suum perihelium est datum,
haec elementum potest locum tenere 4^o elementum.

Cum his elementis queritur diem pro quolibet dato tempore
media longitudine planctus. Si ab hac media longitudine
hoc tempore locum habens longitudine perihelii po-
trahitur, obtinetur media anomalia in eam qua et ex-
centricitate & invenitur vera anomalia & et radius vector
N. Si est vera longitudine planctus in orbita $l' = v + p$
et argumentum latitudinis $\delta = l' - \kappa$ ubi κ est longitudine
nodi ascendens, ex quibus adhuc reducta longitudine l' et helio-
centrica latitudo b planctus derivari potest.

Si in his calculis ubi est contrarium, elata est tropica

revolutio planetæ, ut in variis eius mediis longitudinibus, etiam
 quod motum nodi et perihelii eadem tropicus motus sumi debet,
 ex quo igitur obtinetur reducta vera longitudo ℓ a puncto compen-
 tata, in quo medium punctum vernum hoc tempore vera est,
 et ut hanc longitudinem a vero, per mutationem longi-
 tudinis sub dato puncto verno obtineamus, adhuc illi addere debemus
 — $18^{\circ} 03'$ in RA .

Ad præterea ex hac ratione, invento heliocentrico loco planetæ, ipsius
 geocentricum locum derivare volumus, primo pro eodem tempore,
 secundum enucleata pro planetæ perihelia, quasi debet medi-
 longitudo solis, et ex hac diu vera longitudo et radius vector solis
 sequitur, augeri debet constanti aberratione solis in longitudine
 seu $26^{\circ} 25'$, quia hæc tabulæ illam per aberrationem immixtam
 vel apparentem longitudinem solis immediate dant. Tandem
 hinc longitudinem a medio puncto verno adhuc mutatio
 — $18^{\circ} 03'$ in RA addi debet, si hoc uti illa planetæ a vero puncto
 verno numeratur.

Quomodo diu ex hoc heliocentrico loco planetæ conjunctum cum
 geocentrico loco solis, geocentricum locum planetæ derivare possi-
 mus, in precedentibus satis jam enucleatum est.

Si volumus tandem sic calculatum locum geocentricum planetæ
 cum aliquo observato loco geocentrico comparare, hoc duplici
 modo possumus realisare, vel si apparentia, vel si media eius
 loca, eligentur ad comparationem.

Atque observationes planetarum et cometarum visum, solent
 dari per eorum apparentes ascensiones rectas et declinationes
 ab Astronomis h. e. continent adhuc aberrationem, mutationem
 et parallaxin, ita, ut tantummodo sint correctæ per refractionem —
 Igitur primo eligentur apparentia loca, ad ista secundum pro-
 cedentia inventa loca tabellaria geocentrica planetæ adhuc ab-
 ratio et parallaxis applicari debet, et diu illa vel ope apparentis
 obliquitatis eclipticæ reducuntur ad ascensionem rectam et de-
 clinationem, vel reducuntur observata ascensio recta et declinatio

ope ejusdem apparentis obliquitatis eclipticæ ad longi tudinem et latitudinem. —

Si autem aliquis secundum (nuda) loca ad comparationem, comme, dissimulatum erit, apud præcedentes tabularis calculos geocentrii loci, planctus et solis mutationem plane emittere. Et ea ope obli, qui talis eclipticæ reducere ad ascensionem rectam et declina, tionem, hujus loco autem observatam ascensionem rectam et declinationem a mutatione, aberratione et parallasi liberare vel etiam ex his ab istis tribus irregularitatibus liberatis obser, vatis ascensionibus rectis et declinationibus cum nuda obliqui, tate eclipticæ querere observatas longi tudines et lati tudines. —

Securius erit, in ambobus casibus primam methodum retinendi, p. e. calculum proseguendi usque ad ascensiones rectas et decli, nationes, quia apud secundam methodum error observatio, num, qui vel in ascensione recta vel declinatione comitte, batur, etiam ad derivatam observatam longi tudinem et lati, tudinem suum influxum experit.

Atque tantum cum problema te eramus occupati, ex he, liocentrico loco planctus aut comete, ejus locum geocentricum derivare. Tamen autem per observationes immediate geocentri, cus situs horum corporum datus est, inquirere adhuc debemus, quomodo ex hoc situ ejus heliocentricum locum derivare pos, simus. —

Si situs planctus versus Solem per tres rectan, gulares coordinatas x, y, z determinatur, quarum x est in linea nodorum orbis cum æquatore, et xy in plano æquatōis, dicitur est, si priores significationes a, d, h, N, U retineatur

$$x = r \cos d \cos(a - A) = r \cos U, \quad y = r \cos d \sin(a - A) = r \sin U \cos N$$

$$z = r \sin d = r \sin U \sin N$$

Eadem ratione habemus pro heliocentrico loco terræ

$$x = R \cos D \cos(A - T), \quad y = R \cos D \sin(A - T), \quad z = R \sin D$$

et hinc pro geocentrico loco planctus

$$x - x' = r \cos U \cos(A - T)$$

$$y - y' = r \cos U \sin(A - T)$$

$$z - z' = r \sin U$$

Haec expressiones statim dant ^{sequentes} duas aequationes:

$$\frac{y}{x-L} = \frac{\sin(\alpha-K)}{\cos(\alpha-K)} \text{ et } y = r \cos \alpha$$

et ex hoc sequitur

$$x = \frac{L \sin(\alpha-K) - y \cos \alpha}{\sin(\alpha-K) - \cos \alpha \cos \alpha}, \quad y = \frac{L \sin(\alpha-K) - y \cos \alpha}{\sin(\alpha-K) - \cos \alpha \cos \alpha} \cos \alpha$$

et si hic valor inuenitur quantitatis x in aequatione

$$\frac{x-L}{r-L} = \cos(\alpha-K) \cos \alpha \text{ substituitur, erit}$$

$$x = L + \frac{(L \cos \alpha - y) \cos(\alpha-K)}{\sin(\alpha-K) - \cos \alpha \cos \alpha}$$

si hac ratione x, y, z sunt in uentis, inueniuntur α, d, r .

$$\text{ex } \cos(\alpha-K) = \frac{x}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{y}{r} \sin(\alpha-K) = \cos \alpha \sin(\alpha-K), \quad \alpha = \frac{y}{r} \sin \alpha$$

$$\text{vel etiam } \cos \alpha = \frac{y}{r} \cos \alpha = \frac{y}{r} \sin \alpha \text{ et } r = \frac{y}{\sin \alpha} \sin \alpha, \quad \alpha = \frac{y}{r} \sin \alpha$$

simplicior erant haec resolutiones, si pro aliqua parte sumitur et multiplicaretur ad hunc locum B promittitur aequalis zero.

Dein habemus $x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha \cos \alpha, z = r \sin \alpha \sin \alpha$

$$x = r \cos(\alpha-K), \quad y = r \sin(\alpha-K), \quad z = r$$

$$x-L = r \cos \alpha \cos(\alpha-K), \quad y-L = r \sin \alpha \cos(\alpha-K), \quad x-L = r \sin \alpha$$

Si igitur est, uti prius, $\cos \alpha = \frac{\cos(\alpha-K) \cos \alpha}{\sin(\alpha-K)}$, dicitur est

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cos(\alpha-K)}{\sin(\alpha-K)}, \quad \text{et si est } \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha-K)}, \text{ est}$$

$$\alpha = \frac{\sin \alpha \sin(\alpha-K) \sin \alpha}{\sin \alpha \sin(\alpha-K)}$$

$$r = \frac{\sin \alpha \sin(\alpha-K)}{\sin(\alpha-K) \sin \alpha} \text{ et } r \sin \alpha \sin \alpha = \sin \alpha$$

(Vid. monasthische Correspondenz 1802 Junii)

Adhuc inquirere volumus, quomodo parues variationes in p_hocentris attri-
butionibus in p_hocentris et in p_hocentris
conjunctis. Hinc finem adsequemur per primas ditas p_hocentris
aequationes. Si nimirum in his aequationibus ponitur $r=0$, statim per
earum differentiationem obliuimus

$$dr = d \cos(\alpha-K) - r \sin(\alpha-K)$$

$$r' d\alpha = r' \cos(\alpha-K) + dr \sin(\alpha-K)$$

$$r' d\beta = dr \cos \beta \{ \cos \alpha - \cos \beta \cos(\alpha-K) \} + r \cos \beta \sin \beta \sin(\alpha-K) d\alpha + r' d\beta \cos \beta$$

et eadem ratione

$$dr = d\cos(A-1) - e'dA\sin(A-1)$$

$$rdt = d\sin(A-1) + e'dA\cos(A-1)$$

$$r'db = d\cos b \{ \frac{1}{\cos 3} - \frac{1}{\cos b} \cos(A-1) \} + e'dA\cos b \sin b \sin(A-1) + e'd \frac{\cos b}{\cos 3}$$

1. Ex his aequationibus facile quocunque tempore pro duobus temporibus parvis, ex noto heliocentrico motu intra idem tempus, derivare possumus, si his aequationibus adhuc expressiones addimus, quae ex differentiationibus triciant primarum aequationum ($r\cos(1-M)$ etc.) respectu L et R sequen-

ter, ubi dL , dR , sunt variationes loci heliocentrice terrae, pro eodem inde-

vollo temporis. Ad hos fines praecipue commodae sunt expressiones con-

stantiae x, y, z , quae tantummodo dependunt ab eccentrica anomalia.

Nimirum, si f est semidist. major orbis, et v, r , et e vera anomalia

radia, vector et eccentricitas, $\sin v$ est, si e est eccentrica anomalia,

$$r\sin v = f(1-e)\sin e, r\cos v = f(\cos e - e),$$

si praeterea est h elongatio

perihelii a novo ascendente, argumentum latitudinis est $u = h + v$ et

$$\text{erit: } x = r\sin a \sin(A+h+v), y = r\sin b \sin(B+h+v), z = r\sin c \sin(C+h+v).$$

Ex prima harum aequationum obtinemus post aliquas reductiones

$$x = f\sin a \sin(A+h) \{ \cos e - e + (1-e^2)\sin e \cos(A+h) \}.$$

$$\text{Si igitur est } \cos M = \sqrt{1-e^2} \cos(A+h), m = f \frac{\sin a \sin(A+h)}{\sin M}, u = -m \sin M,$$

$$\text{erit } x = m \sin(M+e) + u \text{ et eadem ratione}$$

$$y = n \sin(N+e) + v$$

$$z = p \sin(P+e) + \pi$$

$$\text{si pro } f \text{ ponatur } \frac{f}{1-e^2}, n = f \frac{\sin b \sin(B+h)}{\sin N}, v = -n \sin N$$

$$\text{si pro } f \text{ ponatur } \frac{f}{1-e^2}, p = f \frac{\sin c \sin(C+h)}{\sin P}, \pi = -p \sin P$$

et haec expressiones tantummodo praesupponunt eccentricam anomalias

et quae datae.

Et expressiones deant

$$dx = m'de \cos(M+e)$$

$$dy = n'de \cos(N+e)$$

$$dz = p'de \cos(P+e)$$

et si pro terris similis constanter evoluerimus, quas per signa dixerim,

quae volumus, erit:

$$dX = m'de \cos(M+e)$$

$$dY = n'de \cos(N+e)$$

$$dZ = p'de \cos(P+e)$$

Sed aequationes

$$x - X = e \cos \delta \cos \alpha$$

$$y - Y = e \cos \delta \sin \alpha$$

$$z - Z = e \sin \delta$$

deant differentiantes,

$$dx = (dy - dY) \cos \alpha - (dx - dX) \sin \alpha$$

$$e \cos \delta$$

$$d\delta = (dx - dL) \frac{\cos \delta}{r} - (dy - dY) \frac{\sin \delta \sin \epsilon}{r} - (dz - dZ) \frac{\cos \delta \sin \epsilon}{r}$$

Si in his aequationibus substituuntur valores quantitatuum dx et dL , obtinemus admodum simplicem aequationem rursus formae

$$\left. \begin{aligned} dx &= A de + A' de' \\ d\delta &= B de + B' de' \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

et haec dant immediate horarium motum in geocentrica aspectione recta et declinatione ex nota horaria variatione anomaliarum geocentricarum.

2. Ex praecedentibus sequitur, geocentricam longi tudinem planetarum secundum eorum diversos situs respectu terrae modo crescere modo decrescere, modo immutatum manere, (stationarii). Haec inveniendum locum stationis planetis, volumus breviter hic causam earum orbitalis quae circularis et in plano eclipticae assumere, dicitur est: $\frac{d\eta}{dt} = \frac{R \sin \eta}{r \cos \eta}$, ubi est $\frac{R}{r} = \frac{\sin \eta}{\sin \pi}$ et si t et α sunt revolutiones planetis et terrae circa solem, erit $\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{t} \frac{\alpha}{\pi} \sin \eta$ si α est radius orbis planetis, radio orbis terrae aequali unitati supposito, habemus secundum praecedentia $\eta^2 \alpha^3 = t^2$ ergo est pro statione quaelibet generalem $\lg \eta = \alpha^{-\frac{2}{3}} \lg \pi$

3. Eadem expressiones etiam ex sequentibus generalibus consuetudinibus derivari possunt. Radecima quantitas α fit semper est

$$\lg(\alpha - N) = \frac{a \sin(t - N) - \sin(L - N)}{a \cos(t - N) - \cos(L - N)} \quad (II)$$

Si in hac aequatione differentiale quantitas α ponitur aequali unitati erit pro statione

$$\frac{d(L - N)}{d(t - N)} = - \frac{(1 - a \cos(t - L))}{a - \cos(t - L)}$$

$$\text{sed est } t - L = \gamma \text{ et } \frac{d(L - N)}{d(t - N)} = \frac{1}{a^2} \text{ ergo}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2(1 + a^2)}{1 + a^2}$$

praeterea est $\lg \eta = \frac{a \sin \gamma}{1 - a \cos \gamma}$ et $\lg \pi = \frac{\sin \gamma}{a - \cos \gamma}$ ergo est, si valores inventus pro γ substituuntur

$$\lg \eta = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\lg \pi = - \frac{1}{\sqrt{a(1 + a^2)}}$$

$$\lg \gamma = (1 - a^2) \sqrt{1 + a^2}$$

et tunc

$$\lg \eta = - \alpha^{\frac{2}{3}} \lg \pi \text{ uti prius}$$

Itaque habemus $\frac{L-N}{L-N} = a^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1+a^{\frac{3}{2}}}$ et $\frac{L-N}{L-N} = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1+a^{\frac{3}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}$

et ex conjunctione harum earum expressionum sequitur:

$$\left. \begin{aligned} \cos\{(a^{\frac{3}{2}}-1)(L-N)\} &= \frac{a^{\frac{3}{2}}(1+a^{\frac{3}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}} \\ \cos\{(a^{\frac{3}{2}}-1)(L-N)\} &= \frac{a^{\frac{3}{2}}(1+a^{\frac{3}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots (IV)$$

Aequationes (III) dant η, π et γ pro statione, et aequationes (IV) dant motum heliocentricum $(L-N)$ et $(L-N)$ planetarum et terrae ab heliocentrica conjunctione, ubi $l=L$ resp. ad stationem, pro a , supposito, N esse punctum existens, pro quo terra et planeta sunt in heliocentrica conjunctione. Si deinde x (IV) inveniuntur, tunc quantitates $(L-N)$ et $(L-N)$ in aequatione (II) substituantur, obtineamus $(L-N)$ pro motum geocentricum planetarum in eodem intervallo temporis.

Non minoris momenti est disquisitio spatii functionis coli in qua tantum datum corpus nostri systematis planetarum a terra nostra videri potest.

Si retinemus priores significationes, est

$$\begin{aligned} x-X &= \rho \cos \beta \cos \lambda \\ y-Y &= \rho \cos \beta \sin \lambda \\ z-Z &= \rho \sin \beta \end{aligned}$$

et quam geocentrica longitudo et latitudo λ, β sunt functionis anguli latitudinis u et U planetarum et terrae, assumere possumus

$$\begin{aligned} d\lambda &= p du + Q dU \\ d\beta &= q du + R dU \end{aligned}$$

Si autem posuimus in his aequationibus quantitates λ et β planetarum, hinc $d\lambda = 0$, erit $(d\beta) = \frac{p\beta - p\lambda}{du}$ et nos videmus quantitatem β pro eodem valore quantitates λ semper crescere vel decrescere, donec valor quantitatis β pro $p\lambda - p\beta = 0$ (I) evadit maximum aut minimum, et eundem valorem quantitatis β pro illo λ designare terminos illius roris, extra quos planeta a terra non amplius videri potest. Ut autem haec ultima aequatio (I) quae solutionem nostri problematis continet, ad applicationem commovent evadat, habemus per divisionem primarum aequationum, $\frac{p\lambda}{x-X} = \frac{y-Y}{x-X}$ et $\frac{p\beta}{x-X} = \frac{z-Z}{x-X} \cos \lambda$. Si autem sumimus partialia differentia harum ultimarum expressionum, obtineamus

$$p = \frac{dx \sin \lambda - dy \cos \lambda}{g \cos \beta \, du}$$

$$q = \frac{dx \sin \lambda + dY \cos \lambda}{g \cos \beta \, dU}$$

$$r = \frac{dx \cos \lambda \sin \beta + dy \sin \lambda \sin \beta - dz \cos \beta}{g \, dU}$$

$$Z = - \frac{dX \cos \lambda \sin \beta - dY \sin \lambda \sin \beta + dZ \cos \beta}{g \, dU}$$

et substitutis his valoribus in prius inventa aequatione conditionali (I) erit:

$$\begin{aligned} & dx(YdZ - ZdY) + dX(Ydz - zdY) \\ & + dy(ZdX - XdZ) + dY(Zdx - xdZ) \\ & + dz(XdY - YdX) + dZ(Xdy - ydX) = 0 \dots (II) \end{aligned}$$

et haec aequatio continet generaliter relationem inter locos duorum et planetarum, pro quibus geocentricis locis planetarum in limitibus illius nonae cadit et tantummodo debemus in ea pro $\lambda, \beta, \gamma, \delta$ valores per u et pro $\lambda, \beta, \gamma, \delta$ valores per U substituire, ut acquiramus finalem aequationem inter u et U . Facile quoque nos convincere possumus (III) simul esse aequationem conditionis tanguntis locorum terrae et planetarum jacere in uno plano si nunc assumimus pro $\lambda, \beta, \gamma, \delta$ et $\lambda, \beta, \gamma, \delta$ valores

$\lambda = r \sin a \sin(A+u)$ etc. $\lambda = R \sin a \sin(A+U)$ etc. quos jam prius dedimus, et si nominamus k, K semiparametros orbitarum, quas describit planeta et terra, ubi e, E excentricitates, ubi q, Q distantiae apheliorum a linea nodorum, est

$$r = \frac{k}{1 - e \cos(u-q)} \quad \text{et} \quad R = \frac{K}{1 - E \cos(U-Q)} \quad (\text{Joh. con.})$$

ex quibus post aliquas reductiones invenitur

$$\frac{da}{du} = \frac{k \sin a}{(1 - e \cos(u-q))} \cdot \{ \cos(A+u) - e \cos(A+q) \}$$

et eadem ratione dy, dz si in hac ultima expressione a, A in b, B vel c, C mutantur, ubi et da, dY, dZ si in dx, dy, dz pro quantitatibus pro planeta ponuntur analogae pro terra. Tandem est:

$$\frac{ydz - zdY}{du} = r^2 \cos a$$

$$\frac{zdx - xdZ}{du} = r^2 \cos b$$

$$\frac{xdy - ydX}{du} = r^2 \cos c$$

et similes expressiones inveniantur pro $\frac{YdZ - ZdY}{dU}$ etc.

omnes has expressiones substituantur in priori aequatione conditionali (III), obtinemus

$$\begin{aligned} & k \{ \cos a \sin a (\cos(u+A) - \varepsilon \cos(g+A)) \} \\ & + k \{ \cos b \sin b (\cos(u+B) - \varepsilon \cos(g+B)) \} \\ & + k \{ \cos c \sin c (\cos(u+C) - \varepsilon \cos(g+C)) \} \\ & + k \{ \cos a' \sin a' (\cos(u+A') - \varepsilon \cos(g+A')) \} \\ & + k \{ \cos b' \sin b' (\cos(u+B') - \varepsilon \cos(g+B')) \} \\ & + k \{ \cos c' \sin c' (\cos(u+C') - \varepsilon \cos(g+C')) \} = 0 \dots \dots (III) \end{aligned}$$

Si autem respiciamus, quod prius datos valores quantitatum A, B, \dots, a, b, \dots (habet $= -\frac{d\log K}{d\log n}$ etc.) ex ultima aequatione obtinemus pro aliquibus relationibus, sequentem simplicem expressionem $k \{ \cos u - \varepsilon \cos g \} = k \{ \cos u' - \varepsilon \cos g' \}$

Si eligimus in hac aequatione pro u quocunque valorem et ex (Gauss.) hoc determinamus valorem correspondentem quantitati u' . (Masquich.) facile ex his valoribus u et u' geocentricam, longiitudinem et latitudinem, seu ascensionem rectam et declinationem planeti limitis illius, non derivare poterimus, qui pertinet ad hunc valorem u . (Vid. monasth. correspond. 1804. August.)

Antiquiores non probarunt, verum causam horum, propter haec nomenclaturae hoc est, stationes et retrogradationes planetarum, non inaequalitatem eorum motuum, quod dependet ab eorum excentricitate, explicare. Jam valde alta opinio, circularem, seu omnium linearum curvarum perfectissimam, hinc esse illam, quae a nostra circa pro orbitis corporum celestium, cum ecclesia est, quae opinio quae immortalibus Ptolemaeo in suis disquisitionibus longum tempus detinuit, quae perit ad aliquam hypotheseos explicandi illos quos irregularitates.

Quia tamen nimirum, terram esse extra centrum aliquem, circuli in quiete, et in peripheria huius circuli moveri centrum et huius circuli. Plinius vocabatur circulus excentricus, et secundum epicyclos. In peripheria epicycli Saurinus movebatur planeta, et quidem huius pro inferioribus planetis, Mercurio et Venere, revolutio centri epicycli circa terram aequalis revolutioni solis circa terram, et revolutionum planetarum in epicyclo aequalium synodiarum revolutionum planetarum circa solem - pro superioribus planetis autem,

revolutionem centri epicycli aequali synodica revolutioni 154
 neta, et revolutionem planetæ in suo epicyclo æqualem synodi-
 ca revolutioni ætatis æpæ. Superiores planetæ igitur sunt in
 per in conjunctione cum Sole, et inferiores in inferiori conjunc-
 re in ille puncto eorum epicyclorum quod terra exat vicinissi-
 mum. — Clarum autem est, perhænomia evadunt eadem si loco
 primi excentrici circuli alius substituitur, in cuius centro
 terra quiescit, et in cuius peripheria moventur epicycli, cuius
 radius aequalis est distantis, quæ in circulo excentrico quæ
 continet a terra distabat. —

Si ita $Aa = a$ radius primi, $a'a' = a'$ secundi epicycli, et pro
 aliquo tempore dato $Ba = b$ angulus primi radii cum ali-
 qua, quod situm fuerit data linea recta
 $A'B$ et C' ^{angulus} prolongati radii a' cum eadem recta $A'B$,
 et distantia puncti extremi radii a' ab A , et tandem Φ angulus
 quæ r cum recta $A'B$ format. His suppositis, est

$$\lg \Phi = \frac{a \sin b + a' \sin b'}{a \cos b + a' \cos b'}$$

$$r^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos(b-b')$$

et $\sin \Delta$ est angulus, quem a et r ad A formant

$$\text{erit } \Delta = b - \Phi, \text{ hinc quoque } \lg \Delta = \frac{a' \sin(b-b')}{a + a' \cos(b-b')}$$

Ex his ultimis æquationibus, facile sequentium derivare possumus

$$\Delta = a \sin \beta - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\beta + \frac{1}{6} a^3 \sin 3\beta - \text{etc.}$$

$$\log. \text{vel. } \frac{r}{a} = \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \alpha^2 \cos 2\beta + \frac{1}{8} \alpha^3 \cos 3\beta - \text{etc.}$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \alpha \cos \beta + \frac{1}{4} \alpha^2 (1 - \cos 2\beta) + \frac{1}{8} \alpha^3 (\cos 3\beta + \cos \beta) + \dots$$

ubi $\alpha = \frac{a'}{a}$ et $\beta = b - b'$ est. —

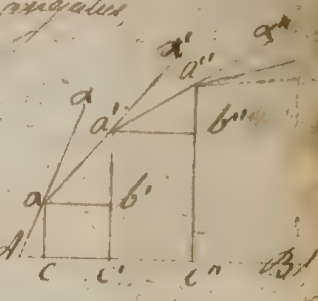
1. Si autem a est semiradius major, ~~et~~ a' excentricitas alicuius
 ellipsis, et m , v media et vera anomalia ab aphelio, deinceps secundum
 præcedentia pro motu elliptico æquatio centri

$$\Delta = m - h = (25 - \frac{\epsilon}{4}) \sin m - \frac{\epsilon}{4} \sin 2m + \frac{\epsilon^2}{12} \sin 3m - \text{etc.} \quad \text{et radius vector}$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \epsilon \cos m - \frac{\epsilon^2}{2} (\cos 2m - 1) + \frac{3\epsilon^3}{8} (\cos 3m - \cos m)$$

Ex his sequitur epicyclum proportionare motum angularum in elliptici, si
 non respiciamus secundas et altiores potentias quantitates ϵ et ponitur

$\frac{a'}{a} = \epsilon$, et sub hac hypothese distantias planetæ a foco in elliptici non
 posset representari, quia pro hac deberet esse $\frac{a'}{a} = \epsilon$.



Acce contra-dictio antiquiores & Astronomos facile de errore hujus
 pothe-^{se} convincere potuissent. Si nimirum R, R' sunt apparentes
 diametri planctis in duobus punctis suis orbitis ad quos pertinent R, R'
 hujus r, r' erit: $rR = r'R'$ hinc pro motu elliptico

$$\frac{dr}{dm} = 1 - 2\epsilon \cos m = \frac{r}{r'} = h'R' \text{ ubi si est aequalitas complens, hinc}$$

$$\frac{dr}{dv} = \frac{R^2}{R'}; \text{ pro epicyclo autem est, si ponitur } \frac{a'}{a} = 2\epsilon,$$

$$\frac{dr}{dm} = 1 - 2\epsilon \cos m = \frac{1}{2} = h'R' \text{ hinc } \frac{dr}{dv} = \frac{R}{R'}$$

Variatio apparentis diametri, long autem est tam magna ut etiam
 antiquiores Astronomorum observationes non effugere possit, quum
 illius valores in perigeo et apogeo sunt $\Delta = 33'.518$, $R' = 29.366$
 Motus notarius autem in eisdem punctis orbitis est

$$dv = 98'.366 \text{ et } dv' = 29.444 \text{ ergo}$$

$$\frac{dr}{dv} = 1.3628, \frac{R^2}{R'^2} = 1.3624 \text{ et } \frac{R}{R'} = 1.1414$$

quarum aequationum primis diebus accurate concordant.

2. Si per L, L' heliocentricam longitudinem planctis a terre et per
 r, R earum ad eclipticam projectas distantias a Sole, ubi tandem
 per Δ geocentricam longitudinem planctis designamus, habemus
 secundum procedentia

$$\lg(\Delta - l) = \frac{R \sin(t - L)}{1 - R \cos(t - L)} \text{ et } \lg(\Delta - L) = \frac{r \sin(t - L)}{R \cos(t - L) - 1}$$

Quum hae expressiones eandem formam cum prius dato valore pro
 Δ habent, erit:

$$\Delta - l = \frac{R}{2} \sin(t - L) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{2}\right)^2 \sin 2(t - L) + \frac{1}{3} \left(\frac{R}{2}\right)^3 \sin 3(t - L) + \dots \text{ et}$$

$$\Delta - L = \frac{r}{2} \sin(L - l) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^2 \sin 2(L - l) + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{2}\right)^3 \sin 3(L - l) + \dots$$

Et hoc sequitur, secundum in aequalitatem planctarum quae venit
 a motu terre respectu ejus motus angularis perfecti et accurate re-
 presentari posse, per epicyclum cuius radius R pro superioribus
 et r pro inferioribus planctis est. Si igitur tantummodo primas
 potentias excentricitatis respiciamus, duo epicycli, vel quod idem est,
 unus circulus excentricus cum uno epicyclo sufficit, ambas inclina-
 tiones planctarum, respectu eorum motus angularis, non autem
 respectu eorum distantiarum, representandi. Si autem vellemus
 etiam altiores potentias excentricitatis respicere, debueremus
 numerus epicyclorum, uti et fecerunt Astronomi, augere.

3. Sit $Aa = a$ radius primi, $aa' = a'$ secundi, $a'a'' = a''$ ter terti epicycli etc
 et anguli, quos sit radii inter se formant, sint $Aaa' = b'$, $aa'a'' = b''$
 $a'a'a''' = b'''$ etc. Arbitrariis assumpta linea AB , formet cum primo
 radio Aa angulum b . Tandem sit r distantia centri et primi epi-
 cycli a centro ultimi epicycli et φ angulus inter r et AB , ubi
 Δ angulus inter r et primum radius a , sine $b = \varphi + \Delta$
 dunt $ae = y$, $a'e' = y'$, $a''e'' = y''$... perpendiculares ad AB
 et $Ac = x$, $Ac' = x'$, $Ac'' = x''$... dicitur est uti facile videmus

$$x = a \cos b \quad y = a \sin b$$

$$x' = x + a' \cos(b + b' - 2.90), \quad y' = y + a' \sin(b + b' - 2.90)$$

$$x'' = x' + a'' \cos(b + b' + b'' - 4.90), \quad y'' = y' + a'' \sin(b + b' + b'' - 4.90)$$

ita ut generaliter rectangulares coordinatas aliquis horum
 centrorum a, a', a'', a''' ... sint

$$X = a \cos b - a' \cos(b + b') + a'' \cos(b + b' + b'') - a''' \cos(b + b' + b'' + b''') + \text{etc}$$

$$Y = a \sin b - a' \sin(b + b') + a'' \sin(b + b' + b'') - a''' \sin(b + b' + b'' + b''') + \text{etc}$$

Si autem X et Y sunt nota, inveniuntur φ , Δ et r ex sequen-
 tibus aequationibus: $\lg \varphi = \frac{X}{Y}$, $\lg \Delta = \frac{Xy - Yx}{Xx + Yy}$, $r^2 = X^2 + Y^2$

Si autem brevitate causa ponimus $a' = \alpha$, $a'' = \beta$, $a''' = \gamma$...
 ex scienda harum aequationum, nimirum $\lg \Delta =$...

ubi ita scribi potest $\lg \Delta = \frac{\lg b - \lg \varphi}{1 + \lg b \lg \varphi}$ substituendo pro
 φ suo valore, fiet:

$$\lg \Delta = \frac{\alpha \sin b' - \beta \sin(b' + b'') + \gamma \sin(b' + b'' + b''') - \text{etc}}{1 - \alpha \cos b' + \beta \cos(b' + b'') - \gamma \cos(b' + b'' + b''') - \text{etc}}$$

At ut autem evolvatur Δ in series, quae praecedens secundum po-
 tentias quantitatum α, β, γ , volumus ponere $\alpha = 2.90 - b'$,
 $\beta = 4.90 - b' - b''$, $\gamma = 6.90 - b' - b'' - b'''$, $\delta = 8.90 - b' - b'' - b''' - b''''$ etc
 per quod prior expressio pro $\lg \Delta$ transit in sequentem

$$\lg \Delta = \frac{\alpha \sin a + \beta \sin b + \gamma \sin c + \delta \sin d + \text{etc}}{1 + \alpha \cos a + \beta \cos b + \gamma \cos c + \delta \cos d + \text{etc}}$$

Si est basis logarithmorum naturalium et brevitate causa
 ponitur $\varphi^a = e^{\frac{aV-1}{2}}$ et $\psi^a = e^{\frac{aV-1}{2}}$ erit ultima expressio

$$\frac{e^{\frac{aV-1}{2}} - 1}{e^{\frac{aV-1}{2}} + 1} = \frac{\alpha \psi^a + 3\psi^b + \gamma \psi^c + \text{etc}}{2 + \alpha \varphi^a + 3\varphi^b + \gamma \varphi^c + \text{etc}} \text{ vel}$$

$$e^{\frac{aV-1}{2}} = \frac{2 + \alpha(\varphi^a + \psi^a) + \beta(\varphi^b + \psi^b) + \gamma(\varphi^c + \psi^c) + \text{etc}}{2 + \alpha(\varphi^a - \psi^a) + \beta(\varphi^b - \psi^b) + \gamma(\varphi^c - \psi^c) + \text{etc}}$$

Si hinc iterum substituamus valores quantitates q et y et ex utroque parte sumamus logarithmum, erit

$$2AV-1 = \log(1 + \alpha e^{at-1} + \beta e^{bt-1} + \dots) - \log(1 + \alpha e^{-at-1} + \beta e^{-bt-1} + \dots)$$

Ad inaequationem $\log(1 + p + q + r + \dots) = A - \frac{B}{2} + \frac{C}{3} - \frac{D}{4} + \dots$ uti/summus, dependent quantitates p, q, r, \dots a quantitatibus t, B, C, \dots ita, ut sit $A - p = 0$, $B - Ap + 2q = 0$, $C - Bp + Aq + 3r = 0$

$D - Cp + Bq - Ar + 4s = 0$ etc. Si igitur pro p, q, r, \dots substituamus priores valores $\alpha e^{at-1}, \beta e^{bt-1}, \dots$ et derivamus valores quantitates A, B, C et ponimus $A - \frac{B}{2} + \frac{C}{3} - \frac{D}{4} + \dots = S$, et si substituamus pro p, q, r, \dots alios valores $\alpha e^{\frac{1}{2}at-1}, \beta e^{\frac{1}{2}bt-1}$ etc. et ponimus $A - \frac{B}{2} + \frac{C}{3} - \frac{D}{4} + \dots = S'$, erit

$$\Delta = \frac{S - S'}{2V-1}$$

et ita invenitur post aliquas reductiones quod sita series pro Δ , minimam

$$\Delta = \alpha \sin a + (\beta \sin b - \frac{1}{2} \alpha^2 \sin 2a) + (\gamma \sin c - \frac{1}{2} \cdot 2\alpha\beta \sin(a+b) + \frac{1}{3} \alpha^3 \sin 3a) + (\delta \sin d - \frac{1}{2} (2\alpha\gamma \sin(a+c) + \beta^2 \sin 2b) + \frac{1}{3} \cdot 3\alpha^2\beta \sin(2a+b) - \frac{1}{4} \alpha^4 \sin 4a) + (\epsilon \sin e - \frac{1}{2} (2\alpha\delta \sin(a+d) + 2\beta\gamma \sin(b+c)) + \frac{1}{3} (3\alpha^2\gamma \sin(2a+c) + 3\alpha\beta^2 \sin(a+2b)) - \frac{1}{4} \cdot 4\alpha^3\beta \sin(3a+b) + \frac{1}{5} \alpha^5 \sin 5a) + \text{etc}$$

cujus seriei legem quilibet facile perspicuit.

Ad primam hujus ultimae expressionis facile motum planis in elliptici, tam accurate uti volumus, representare possumus. Assumamus brevitate causa, tempora revolutionum centrorum omnium epicyclorum inter se aequalia, et eorum quodlibet simul anomalia, respectu revolutionis planis aequalia esse ita, ut tantummodo determinatio diversorum radiorum epicyclorum restaret. His suppositis, habemus pro illis in (B) attributis valoribus $b' = b'' = b''' = \dots = 2,90 - m$, et pro illis in (A) assumtis $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4} = \dots = m$ ubi m mueram anomaliam designat. Si substituimus hos valores in proae dentibus expressionibus pro $\log \Delta$ et Δ , obtineamus:

$$\log \Delta = \frac{\alpha \sin m + \beta \sin 2m + \gamma \sin 3m + \delta \sin 4m + \dots}{1 + \alpha \cos m + \beta \cos 2m + \gamma \cos 3m + \delta \cos 4m + \dots}$$

et $\Delta = A \sin m - \frac{1}{2} B \sin 2m + \frac{1}{3} C \sin 3m - \frac{1}{4} D \sin 4m + \dots$ pro supposito, nos habere ad determinationem quantitates A, B, C, \dots

$$A - \alpha = 0, \quad B - A\alpha + 2\beta = 0, \quad C - B\alpha + A\beta - 3\gamma = 0, \quad D - C\alpha + B\beta - A\gamma + 4\delta = 0 \quad \text{etc}$$

elliptica aequatio centri autem est

$$\Delta = m - v = (2\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^3 + \frac{5}{6}\varepsilon^5 - \dots) \sin m - (\frac{5}{4}\varepsilon^2 - \frac{11}{24}\varepsilon^4 + \dots) \sin 2m + \dots$$

Si igitur factores quantitatum $\sin m$, $\sin 2m$, ... in ambabus ca., proportionibus pro Δ sibi aequales ponantur, et si v. c. usq. ad quas, tam potentiam & progredimur, obtinemus

radium primi epicycli = 1

secundi $\alpha = 2\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4}$

terti $\beta = \frac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{24}$

quarti $\gamma = -\frac{\varepsilon^3}{12}$

quinti $\delta = \frac{\varepsilon^4}{24}$

Ad finem hujus materiae, volumus adhuc dare aliquod problema, quod quoq. pertinet ad procedentes considerationes, nimirum volumus quodere aequationem superficiei, quae oritur si centrum ellipsos, cujus semiaxis major et minor a et b sit, in peripheria altius circulari moveatur, cujus radius c est. Hanc persequi volumus qua per rotationem ortam ~~quae~~ considerare. Sicut nimirum $x = Ax$, $y = By$, aequationes lineas rectas, quae transiunt per initium coordinatarum, et cum ad e. rotationis parallelata est, deinde est aequatio plani quod perpendiculariter insistit huic axi, $Ax + By + Z = \alpha$, ubi α est quantitas arbitraria. Si autem hac aequatione coniungatur aequatio sphaerae

$$x^2 + y^2 + z^2 = Q(x)$$

cujus centrum est punctum initiale coordinatarum et cujus radius est functio quantitatis α , ambae aequationes simul designant aequationem circuli, quem quodlibet punctum ellipsos intra rotationem describit.

Si autem assumimus, ellipsin ab initio esse in plano xy , ejus aequationes sunt $y = 0$, $a^2b^2 = b^2x^2 + a^2(x-c)^2$ et quum omnes procedentes 4 aequationes simul locum habere debent, obtinebimus, si ex iis x, y, z eliminamus, aequationem inter α et $Q\alpha$ per quod incognita forma functionis $Q\alpha$, secundum problema determinabitur. Si brevitas causa ponitur $A = B = 0$, i. e. a xim rotationis aequalem axi quantitatis Z , obtinetur per illam eliminationem

$$a^2 b^2 = a^2 b^2 + a^2 (\sqrt{Q\alpha - a^2 c})^2$$

Et in hac ultima expressione pro α ponitur 12 et pro $Q\alpha$ quantitas $x^2 + y^2 + z^2$ habebimus equationem quae p[ro]p[ri]a superfici

$$(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - c)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} z^2$$

1. Generationis si sunt aequationes axis rotationis

$$x = Ax + a, \quad y = Bz + b$$

est generalis aequatio omnium per rotationem ordinum superfici-
arum, si Q est arbitraria functio,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = Q(Ax + By + z) \dots \dots \dots (I)$$

vel etiam eam partialibus differentiatibus

$$(b-y+Bz)(\frac{\partial z}{\partial x}) - (a-x+Az)(\frac{\partial z}{\partial y}) + A(b-y) - B(a-x) = 0 \dots \dots \dots (II)$$

quarum prima expressio est integrabile secundae.

Si igitur sunt $F=0$, $f=0$ aequationes alicujus curvae datae
(F et f sunt aequationes inter x, y, z et constantes, et curva potest
etiam esse duplicis curvaturae) et queritur superficies, quae
oritur, si illa curva circa aliquam axem rotatur, cujus aequationes
sunt $x = Ax + a$, $y = Bz + b$, summam ex duabus datis aequa-
tionibus curvae et ex duabus sequentibus

$$\begin{cases} Ax + By + z = \alpha \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = Q\alpha \end{cases} \dots \dots \dots (III)$$

quantitates x, y, z eliminare debemus ex quo obtinebimus
aequationem, quae $Q\alpha$ per α et alias constantes dabit, igitur for-
mam functionis Q determinabit. — Si deinde in hac ultima aequa-
tione pro α et $Q\alpha$ substituuntur praecedentes valores in x, y, z
obtinetur aequatio quae p[ro]p[ri]a superfici. Si autem tantummo-
do una aequatio $F=0$ (plani) est data, quae circa axem
 $x = Ax + a$, $y = Bz + b$ rotatur, et queritur aequatio alius
plani, quod prius mobile planum in omnibus suis punctis
tangit et includit, queri debet ex data aequatione $F=0$. Id
partialia partialia ($\frac{\partial F}{\partial x}$) et ($\frac{\partial F}{\partial y}$) et substitui in aequatione
(III), per quod obtinetur aequatio, quae per $f=0$ designare so-
lemus. Si conjunguntur haec duae aequationes $F=0$ et $f=0$
cum duabus aequationibus (III), et tractantur omnes 4

ut prius, ex hac forma functionis F et hinc quoque equationem includentis superficiem obtinebimus.

2. Sed adhuc possumus equationem prius consideratam superficiem, alia notabili via obtinere.

Aequatio superficiem, quae per rotationem ellipsoidis circa axem z oritur est: $a^2(x^2+y^2) + b^2z^2 = a^2b^2$. Si centrum huius ellipsoidis movetur in linea curva, quae tota patet in plano xy , et cuius equationes sunt $x = u$ et $y = f(u)$ cum est pro quolibet situ ipsius centri aequatio quae sita super, fici, quae per rotationem ellipsoidis oritur

$$(x-u)^2 + (y-f(u))^2 + \frac{b^2z^2}{a^2} = b^2 \quad (A)$$

Si autem centrum ellipsoidis in data linea curva arcam $Vdu^2 + (df(u))^2$ progreditur, habebimus pro uno loco centri; si aequatio (A) respectu u differentietur

$$x-u + (y-f(u)) \cdot \frac{df(u)}{du} = 0 \quad (B)$$

et ambae aequationes (A), (B) pertineant naturaliter ad superficiem, perficiem. Si igitur ex his eliminatur quantitas u , obtineamus equationem, quae est aequatio quavis plani $xxxiii$. Si hinc ista curva in plano xy est, ut prius, circularis, cuius radius c est, habemus $x^2+y^2=c^2$ vel $u^2+(f(u))^2=c^2$ et hinc quoque

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{-u}{\sqrt{c^2-u^2}}$$

His suppositis, aequationes (A) et (B) transibunt in sequentes

$$(x-u)^2 + (y-\sqrt{c^2-u^2})^2 + \frac{b^2z^2}{a^2} = b^2$$

$$x-u - (y-\sqrt{c^2-u^2}) \cdot \frac{u}{\sqrt{c^2-u^2}} = 0$$

Si ex his eliminatur quantitas u , obtineamus pro quavis plano ut prius $(\sqrt{x^2+y^2}-c)^2 = b^2 - \frac{b^2z^2}{a^2} \quad (1)$

3. Generativum, si $F=0$ aequatio alicuius superficiem inter x, y, z et unam constantem α est, quantitati α omnes proprios valores ab $\alpha = -\infty$ usque ad $\alpha = +\infty$ dare possumus, pro quibus habemus seriem planorum quae omnia per diversos valores quantitatibus α a se invicem differunt.

Acc feris omnium harum subsequentiū superficiem in
 terminata per aliam superficiem, quæ includit omnes priores et
 tangit, et quam includentem superficiem et nominare volumus.
 Si damus in æquatione generali $F=0$ inclusi plani, quam x jam
 habuit determinatum, hanc quantitatem aliam parva tantum,
 modo quantitate differentem valorum $x+dx$, habemus æquationem
 nunc novi inclusi plani, quod quidem suam formam et situm a
 multum differt ab immediatè præcedenti plano, et amboplane
 se præbent in aliqua linea quam characteristicam nominare
 volumus. Acc characteristicam manifestè est communis linea tan-
 gens amborum sibi subsequentium planorum includentium cum
 includenti et ejus, mutabunt illa primi inclusi, pro quo
 x, y, z se non mutant, dum in illo x transit in $x+dx$ h. e. si d. p.
 prædictæ æquationis $F=0$ tantum modo respectu x , resultans
 æquatio erit pro characteristica, et quoniam hæc curva etiam in
 prima inclusa superficiem jacet, sunt ambe æquationes charac-
 teristicæ

$$\begin{aligned}
 F &= 0 & (A) \\
 \left(\frac{dF}{dx}\right) &= 0 & (B)
 \end{aligned}$$

Si igitur in æquationibus (A) et (B) quantitati x prædestina-
 damus omnes possibili valores, obtinebimus omnes sibi subse-
 quentes characteristicas, quæ omnes in includenti superficie
 occurrunt, et ex quibus, ut ita dicamus, includens est composita.
 Si igitur eliminamus quantitatem x ex æquationibus
 (A) et (B) obtinebimus æquationem per x, y, z . et hæc æquatio erit
 æquatio includentis superficiem ipsa.
 Si autem in istis duabus æquationibus (A) et (B) quoniam
 quantitati x determinatus valor datus est (per quod etiam ca-
 racteristicæ in spatio pro speciali casu determinatus est) quantita-
 tem x in $x+dx$ transire facimus, novæ duæ æquationes per-
 tinebunt ad immediatè subsequentem characteristicam, quæ præ-
 cedentem characteristicam in uno vel pluribus punctis secabit.
 Et æquationes in descriptione autem sunt manifestæ de illa
 puncta primæ characteristicæ, pro quibus valores quantita-
 tum x, y, z se non mutant, si in æquationibus (A) et (B)

valor quantitates & solummodo mutatur. Ex hoc patet: si ambæ equationes (A), (B) huiusmodi respectu & respectu perentiantur. Hæc duæ novæ equationes pertinent pro punctis in intersectionum ambarum caracteristicarum, & quia hæc puncta etiam in prima caracteristica occurrunt, & quia præterea differentiatio equationis (A) producat equationem (B) habebimus pro quolibet puncto punctum sequens equationes $F=0$ --- (A) $(\frac{\partial F}{\partial x})=0$ --- (B) $(\frac{\partial F}{\partial y})=0$ --- (C) ubi & illam omnium caracteristicarum determinat, in qua considerantur illa puncta, quæ a sua vicinissima caracteristica sciuntur. Si igitur damus in tribus ultimis equationibus quantitati & præcedentem omnes diversos valores, dum habemus tres equationes in x, y, z , ex quibus valores quæ sitatum x, y, z inveniri possunt. Qui valores puncta in intersectionum duarum subsequentialium caracteristicarum dant, sunt quicunque sit valor quantitates x . Si igitur eliminatus & ex his tribus equationibus, habebimus duas equationes in x, y, z sine x , et hæc duæ equationes erunt, præterea, quæ a sibi subsequentibus punctis in intersectionum omnium caracteristicarum formantur, et hæc linea ab omnibus caracteristicis eadem ratione tangitur uti superficies includens ab omnibus inclusis tangitur.

A. Ceterum uti arcus cycloides quæ oritur per rotationem circuli est rectifiabilis h. e. per lineam rectam exprimi potest, etiam prius considerata superficies, quæ oritur per motum aliquid sphaerae aut ellipsoideis, developabilis h. e. hæc superficies si assumitur flexibilis et inextensibilis, operi simplicis flexionis in uno plano sine infractione et sine duplicatione potest extendi. Nam generalis æquatio superficiem developabilem inter differentia partialia coordinatarum rectangularium x, y, z est uti finis

$$\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{d^2y}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2$$

cui expressioni aequatio (1) in 2.) satisfait. Integrales huius aequationis differentialis sunt

$$\left. \begin{aligned} y - \varphi x &= (x - \alpha) \frac{d\varphi}{d\alpha} \\ z - \psi x &= (x - \alpha) \frac{d\psi}{d\alpha} \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

ubi φx et ψx designant arbitrarie functiones quantitatis x , vel etiam

$$\left. \begin{aligned} x - \alpha &= x \varphi x + y \psi x \\ 0 &= 1 + x \frac{d\varphi}{d\alpha} + y \frac{d\psi}{d\alpha} \end{aligned} \right\} \dots (b)$$

vel tandem

$$\left. \begin{aligned} 0 &= x - \alpha + (y - \varphi x) \frac{d\varphi}{d\alpha} + (z - \psi x) \frac{d\psi}{d\alpha} \\ 0 &= 1 + \left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)^2 + (z - \psi x) \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} \\ &\quad - (y - \varphi x) \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} - (z - \psi x) \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} \end{aligned} \right\} \dots (c)$$

et hinc est etiam aequatio quae oblinetur per eliminationem quantitatis α ex aequationibus (a) vel (b) vel (c) aequatio superficiei developabilis inter finitas expressiones, uti

singulis harum aequationum, sine eliminatione quantitatis α pertinet pro caracteristica superficiei developabilis, quae uti videmus est linea recta. Si tandem adhuc conjungatur cum duabus aequationibus (b) differentiale secundae vel $x \cdot \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + y \cdot \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} = 0$, vel etiam si conjungatur cum ambabus aequationibus differentiale secundae, seu

$$0 = 3 \frac{d\varphi}{d\alpha} \cdot \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + 3 \frac{d\psi}{d\alpha} \cdot \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} - (y - \varphi x) \frac{d^3\varphi}{d\alpha^3} - (z - \psi x) \frac{d^3\psi}{d\alpha^3}$$

hae duae aequationes secundum 3.) quae per eliminationem quantitatis α ex tribus talibus aequationibus oblinentur, pertinent pro linea curva, quae a subsequentibus punctis intersectionum omnium caracteristicarum formatur.

Atque et aliae similes disquisitiones inveniuntur in Monge Application de l'Analyse à la Géométrie Paris 1809.

Determinatio elementorum Planeta- rum et Cometarum ex observationibus geocentricis.

Proprietatum essentialium orbitalium corporum caelestium, per quas una ab altera distinguitur, vel elementorum sex orbitalium sunt generatim septimo: magnitudo et situs axis majoris, excentricitas, inclinatio orbitae et locus ejus nodi, epocha planetae vel ejus locus in orbita pro tempore dato et tandem massa. In omnes sequentibus disquisitionibus, ubi plane-
tae et cometae quae puncta assumuntur, vel ubi non respiciemus eorum magnitudinem et formam, massa quae in fine parva re-
spectu massae Solis assumitur. Ut igitur prima sex elementa determinentur, generatim sex perfectae observationes (i.e. tres geocentricae longitudines et latitudines) sufficiunt, ad forma-
tionem sex aequationum, ex quibus dein ista sex elementa quae totidem quantitates incognitae, sunt derivandae. Si as-
sumimus orbitam esse parabolam, de primo elemento vel magnitudine axis non est sermo; si assumimus orbitam ellipticam, secundum et tertium elementum seu situs axis et excentricitas evanescit; ex quo sequitur: pro pa-
rabola esse hoc problema cum tribus observationibus plus quam determinatione et pro circulo tantummodo duas obser-
vationis sufficere. —

In sequentibus volumus priores significationes retinere, et quantitates ad heliocentricum locum planetae pertinentes per parvas, illas ad heliocentricum locum terrae pertinentes per magnas litteras romanas, tandem illas ad geocentricum lo-
cum planetae pertinentes, per parvas litteras graecas designa-
re. Quia angulares coordinatae quae determinant situm
planetae.

planities versus Solem; sunt igitur x, y, z , ejus helio centrica
longi ludo et lati ludo l et b , et ejus distantia a Sole r uti
et projectio hujus distantia ad eclipticam. Pro helio centri
in loco terrae erunt haec quantitates $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$, sed
brevitatis causa ponemus $B=0, A=D$. Tandem pro quocumque
trio loco planetarum erunt haec quantitates $\xi, \nu, \zeta, \lambda, \beta, \epsilon, \delta$ ita
ut habeamus $\xi = x - \alpha, \nu = y - \beta, \zeta = z - \gamma$. Eodem quan-
titates sed pro secunda et tertia observatione sunt signatae,
et $\delta, \delta', \delta''$ sunt respective tangentes inter 2. et 3., inter 1.
et 3., et inter 1. et 2. observationum.

Si nobis circumstantibus motus primi huius corporis celestis
motus essent, facile ex his elementa orbitalium secundum gene-
ralis de quo motus derivare possemus.

Si a est semiaxis major orbis ac ejus excentricitas e observanda
celeritas pro radio vectore r , et t tempus a transitu planetae per
perihelium, est, uti videmus (motus ellipticus)

$$c^2 = \mu^2 \left(\frac{r^2}{a} - 1 \right) \quad \text{et}$$

(27 Ark)

$$\frac{r dr}{dt} = \mu \left(r - \frac{r^2}{a} - a(1-e^2) \right)$$

Si autem C est celeritas planetae ab initio sui motus, ubi
 $r=a=1$ est, erit $C^2 = \mu^2$ ergo $C = \mu \sqrt{\frac{2}{a} - 1}$.

Si ergo initialis celeritas est nota, obtineamus semiaxis majoris
ex equatione $a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{c^2}{\mu^2}}$ et quoniam a in elliptico est quanti-
tas positiva, in Hyperbola negativa et in Parabola infinita
est, orbita erit elliptica, hyperbola vel parabola, si c minor
vel major vel aequalis est $C \sqrt{\frac{2}{a}}$.

Sit ϕ angulus tangentis cum radio vectore et de elementum arcus
orbis, est $dr = d \cos \phi$, sed secundum generalis motus est $c = \frac{ds}{dt}$
hinc $c = \frac{dr}{dt \cos \phi}$ vel $\frac{dr}{dt} = \mu \left(\frac{r^2}{a} - 1 \right) \cos \phi$

Si conjungamus haec expressio cum equatione $\left(\frac{r dr}{dt} = \dots \right)$ erit
 $a(1-e^2) = \left(r - \frac{r^2}{a} \right) \sin^2 \phi$ ex qua invenitur excentricitas.

Aequatio linearum secund ordinis est $\cos v = \frac{a(1-\varepsilon^2) - r}{\varepsilon r}$ ex qua
vera anomalia v , et quum vera longitudo planetæ per observationem est
data, item vera longitudo perihelii vel longitudo quantalibet a invenitur.

Quod quum nobis circumstantiis, motus primitivi penitus ignota
sint, elementa orbitarum ex observationibus geocentricis aliis viis
derivare debemus.

Pro suppositione rectilinearis seu circularis orbitæ hæc determinatio
elementorum ex observationibus geocentricis est admodum facilis
ut viderimus. Sed jam pro parabola et eo magis pro ellipse
evolvendæ equationes evadunt ita complicatæ, ut resolutio directa
fere impossibilis sit. Ut hoc monstramus breviter pro parabola, nobis
statim prima æquatio dabit conditionem, orbitam æstimate
in plano, quod per centrum visus transit. Si istud centrum finitum est
introducimus coördinatarum x, y, z , æquatio hujus plani pro tribus obser-
vationibus erit

$$\begin{aligned} z &= ax + by \\ z' &= ax' + by' \\ z'' &= ax'' + by'' \end{aligned}$$

Si eliminantur quantitates a, b , erit

$$0 = x(y''z' - y'z'') - x'(y''z - y'z'') + x''(y'z - yz') \quad (I)$$

et quum $x = \xi + X$, $y = \eta + Y$, $z = \zeta + Z$ et hæc expressiones pro x, y, z
tantummodo incognitam ξ , pro x', y', z' incognitam ξ' et tandem pro x'', y'', z''
incognitam ξ'' continent, æquatio (I) est functio quantalium ξ, ξ', ξ''

Quum autem $r^2 = R^2 + \xi^2 + 2R\xi \cos(\beta - \alpha)$, ξ erit functio r et eadem ratione
 ξ' functio r' et ξ'' functio r'' ita, ut igitur æquatio (I) qua functio harum
trium quantalium r, r', r'' considerari possit.

Secunda æquatio dabitur a conditione, orbitam esse parabolam, cujus
focus centrum solis est. Si sunt k, k', k'' rectilinearis chordæ inter
eos planetas in 2 et 3, 1 et 3, pro 1 et 2 observatione et si p est para-
meter orbitæ erit. (mod. ellipt.)

$$p = \frac{k^2(r-r')^2}{r+r'-\sqrt{(r+r')^2 - k^2}} \quad \text{et} \quad p = \frac{k'^2(r'-r'')^2}{r'+r''-\sqrt{(r'+r'')^2 - k'^2}}$$

et ambæ expressiones sibi æquales positis, dant secundam quædam
æquationem, quæ etiam est functio quantalium r, r', r'' quia

$$k^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \quad \text{ut si de } k, k'$$

Tandem conditio, temporis a radio vectore descripta spatium esse propor-
tionalia, dat (mot. ellipt.)

$$h \Delta S'' = \frac{1}{6} \{ (r' + r + k)''^{\frac{3}{2}} - (r' + r - k)''^{\frac{3}{2}} \}$$

$$h \Delta S' = \frac{1}{6} \{ (r'' + r + k)'^{\frac{3}{2}} - (r'' + r - k)'^{\frac{3}{2}} \}$$

ubi h est quaelibet constans. Et hac ratione oblinimus quatuor aequationes
inter tres incognitas quantitates r, r', r'' sed nos videmus directam solutionem
harum aequationum, vires analyticas, vel saltem praeiudicium calculatoris
transcendere. Quomodo autem ex quantitatibus r, r', r'' elementa inveni-
antur, inferius enucleabitur.

igitur nihil aliud restat, quam resolvere nostrum problema via indirecta.

Hoc problema consistit potissimum in duabus partibus in quarum
prima e geometria observationibus distantis r, r', r'' vel s, s', s'' et in
quarum secunda ex his distantis elementa orbitae derivantur. Primo
loquemur de methodis quas docerunt Geometri pro resolutione prima
partis huius problematis.

Hoc habuimus prius aequationem $0 = x(y''z' - y'z'') - x'(y''z - yz'') + x''(y'z - yz')$

quam etiam sic exprimere possumus.

$$0 = y(x'z'' - x''z') - y'(xz'' - x''z) + y''(xz' - xz'') \text{ vel } 0 = z(xy'' - x'y'') - z'(xy' - xy'') + z''(x'y - x'y')$$

Sint f'', f', f arcus triangularum planorum in his initium coordinatarum
inter radios r, r', r'' et rectilneas chordas in 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3 observa-
tione, et a, b, c inclinationes orbitae versus coordinata plana yz, xz, xy
dein sunt $f'' \cos a, f' \cos b, f \cos c$ projectiones trianguli f'' in iudicium pla-
na, sic haec projectiones sunt etiam, uti simus

$$\frac{1}{2}(y'z'' - y'z') \quad \frac{1}{2}(xz'' - x'z') \quad \frac{1}{2}(x'y'' - x'y')$$

si eadem expressiones evolvantur pro $f'' \cos a, f' \cos b, f \cos c$ et pro $f \cos a, f \cos b, f \cos c$ et substituuntur in tribus praecedentibus aequationibus
oblinimus $0 = f'x - f'x' + f'x''$ $0 = f'y - f'y' + f'y''$ $0 = f'z - f'z' + f'z''$

et si eadem ratione nominamus F, F', F'' arcus triangularum recti-
lineorum inter centrum Solis et locis terrae in 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3 obser-
vatione. erit $0 = Fx - F'x' + F''x''$ $0 = Fy - F'y' + F''y''$ $0 = Fz - F'z' + F''z''$

Haec duo systemata etiam hac ratione representari possunt nimirum

$$\begin{aligned} \text{pro planis} \quad 0 &= f(\delta \cos \lambda + D \cos \lambda') & 0 &= f(\delta \sin \lambda + D \sin \lambda') & 0 &= f \delta \beta \\ &- f'(\delta' \cos \lambda' + D' \cos \lambda'') & &- f'(\delta' \sin \lambda' + D' \sin \lambda'') & &- f' \delta' \beta' \\ &+ f''(\delta'' \cos \lambda'' + D'' \cos \lambda''') & &+ f''(\delta'' \sin \lambda'' + D'' \sin \lambda''') & &+ f'' \delta'' \beta'' \end{aligned} \quad (I)$$

et pro terra

$$0 = \begin{aligned} & \frac{1}{2} D \cos L \\ & - \frac{1}{2} D' \cos L' \\ & + \frac{1}{2} D'' \cos L'' \end{aligned}$$

$$0 = \begin{aligned} & \frac{1}{2} D \sin L \\ & - \frac{1}{2} D' \sin L' \\ & + \frac{1}{2} D'' \sin L'' \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (II)$$

142

Procratibus causa volumus in producere sequentes significationes

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \beta \sin(\lambda'' - \lambda') \\ &- \frac{1}{2} \beta' \sin(\lambda'' - \lambda) \\ &+ \frac{1}{2} \beta'' \sin(\lambda' - \lambda) \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2} \beta \sin(L - \lambda'') - \frac{1}{2} \beta' \sin(L - \lambda')$$

$$B = \frac{1}{2} \beta \sin(L - \lambda) - \frac{1}{2} \beta' \sin(L - \lambda'')$$

$$C = \frac{1}{2} \beta \sin(L - \lambda') - \frac{1}{2} \beta' \sin(L - \lambda)$$

et si in his tribus ultimis expressionibus

L transeat in L' transeat A, B, C in A', B', C' - L in L'' transeat A, B, C in A'', B'', C''

Si multiplicatur prima aequationum (I) per $(\sin \lambda' \frac{1}{2} \beta - \sin \lambda'' \frac{1}{2} \beta')$

secunda \dots per $(\cos \lambda' \frac{1}{2} \beta - \cos \lambda'' \frac{1}{2} \beta')$
 tertia \dots per $(\cos \lambda' \sin \lambda'' - \cos \lambda'' \sin \lambda')$

summa horum trium productorum dabit

$$0 = f(\alpha D + AD) - f(A'D' + f''A''D'')$$

$$\text{et eadem ratione } 0 = f(\beta D - f(\alpha' D' + \beta' D')) + f''\beta'' D'' \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (III)$$

$$0 = f(CD - f(C'D' + f(\alpha'' D' + C'' D''))$$

Si e converso primis harum aequationum (III) quaeruntur valores

pro D, D', D'' oblinemus $\frac{D}{\beta} = \frac{A'D'}{\beta'} + \text{aliquo residuo, et hoc residuum}$

est ordinis $(A'D' - A'D)$, hinc potest respectu parvorum intervallorum

temporis L, L'' respectu quoti $\frac{A'D'}{\beta'}$ in prima approximatione negligi.

$$\text{hinc est } \frac{D}{\beta} = -\frac{A'D'}{\beta'}, \quad \frac{D'}{\beta'} = -\frac{B'D''}{\beta''}, \quad \frac{D''}{\beta''} = +\frac{C'D''}{\beta''} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (IV)$$

Si tandem x, y, z est tempus inter arbitrarie assumptam epocham et mo-
 mentum secundae observationis, est, uti scimus, si x, y, z habent prio-
 res significationes:

$$x = x' + v \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{v^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 x'}{dt^2} + \dots$$

$$x'' = x' + v \cdot \frac{dx'}{dt} + \frac{v^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 x'}{dt^2} + \dots$$

et similes expressiones habebimus etiam pro y, y'' et z, z'' .

Si autem est $\log \mu = 6.4711628$ (vd. mot. ellipt.), erit

$$\frac{dx}{dt^2} = -\frac{\mu x'}{p^3}, \quad \frac{dy}{dt^2} = -\frac{\mu y'}{p^3}$$

Si igitur, uti prius, c est inclinatio plani orbitae versus planum xy

$$\text{erit } 2f \cos c = x'y' - x'y'' = \frac{p^2}{dt} \left(1 - \frac{\mu r'^2}{6 r'^3} \right)$$

$$\text{et eadem ratione } 2f' \cos c = x'y'' - x'y' = \frac{p^2}{dt} \left(1 - \frac{\mu r'^2}{6 r'^3} \right)$$

$$2f'' \cos c = x'y' - x'y'' = \frac{p^2}{dt} \left(1 - \frac{\mu r'^2}{6 r'^3} \right)$$

ubi $p = y'dx' - x'dy'$ est

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (V)$$

Haec praecedentia sufficiunt ad derivationem precipuarum ab Astronomis datarum solutionum nostri problematis ex uno fonte.

1. Si in aequationibus (III) pro f'' , f'' approximative ponuntur valores f'' , f'' , ex his obtinemus valores quantitalum d , d'' , d'''

$$\text{Nota aequalio } r^2 = D^2 + D'^2 \sec^2 \beta + 2D'D' \cos(L - \lambda) \dots \dots \dots (VI)$$

dein dat valorem pro r et cum hoc valore quantitalis r' obtenitur ex aequationibus (V) accuratiores valores quantitalum f , f' , f'' qui huiusmodi iterum ex (III) accuratiores valores pro d ... queruntur etc. methodus, quae continuari potest.

Hae prima solutio est data a celeb. Lagrange

Incommutatum huius resolutionis consistit in eo, ut error, qui committitur, si d'' pro f'' ponitur, pro d vis et fere aequalibus interval-
lis temporum, quae hic supponuntur, in derivato per aequationes (III) valore quantitalum d'' ... aequatur, uti quilibet se convincere potest.

2. Si in secunda aequationum (III) substituuntur valores pro f'' et f'' ex (V), obtenemus

$$\alpha d'' = -B'D' + \frac{B''D'' + B'D'(1 + \frac{ur^2 d''}{2r^3})}{\dots \dots \dots} (VII)$$

et haec aequatio cum illa (VI) coniuncta, dat quantitalis r' et d' et aequationes (IV) cum (V) dein dant d et d'' . Haec secunda solutio ad quam ferius reveniemus, est data a celeb. Gauss (monatliche Correspondenz)

3. Secunda aequationum (III) est $\alpha f'' = B''D' - B'D'' + B''f''d''$
sed analogice hae expressiones hanc est $0 = B'D' - B''f''d'' + B''f''d''$

pro f , f' , f'' eorum valores ex (V) substituuntur, et si in primo membro primae aequationis, quum iam in adiacentem parvam quantitalum x multiplicatum est, d' pro f' differentia alterum aequationum

$$\text{erit } \alpha d' = \frac{H^2}{6r^3} (B'D' - B''d'' + B''d'') (d^3 - \frac{1}{r^3})$$

et haec aequatio coniuncta cum (VI) dat post eliminationem quantitalis d' sequentem expressionem

$$D^6 r^6 (r^2 - D^2) - 2D^4 r^3 \cos(L - \lambda) (r^2 - D^2) - T \sec^2 \beta (r^2 - D^2)^2 = 0$$

$$\text{ubi brevitatis causa est } T = \frac{ur^2}{6\alpha r^3} (B'D^3 - B''D'' + B''D'')$$

Quum haec aequatio per $(r^2 - D^2)$ divisibilis sit, ea est pro r' septimi gradus et continet tertiam resolutionem, quam celeb. Lagrange publici juris fecit. Aliam adhuc dedit Berl. Jahrb. 1785

14. Si ponimus $m = \frac{C^2 D}{A^2 D''}$ et hinc $S'' = m S'$ erit analogice cum (VI)
 $r^2 = D^2 + B^2 \cos \beta + 2 D B \cos(L - \lambda)$, $r'^2 = D^2 + m^2 B^2 \cos \beta'' + 2 m D B \cos(L'' - \lambda'')$
 et pro chorda inter ambas extremas observationes
 $K^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$ vel

$$K^2 = r^2 + r'^2 - 2 m D \{ \cos(L - \lambda) + \cos \beta \cos \beta'' \} - 2 m D B \cos(L'' - L) - 2 D B \cos(L - L'')$$

et haec tres aequationes conjunctae cum nota expressione pro parabola
 $C \mu S' = (r'' + r + K)^2 - (r'' + r - K)^2$ ubi $\mu = 0.017202$, dant quatuor incognitas
 x, x'', S' et K ; et haec est quarta solutio nostri problematis quam dedit
 ult. Olbers.

5. Secunda aequationum (III) est hanc
 $\alpha S'' = -B D' + \frac{B^2 D'' + B D D'}{1 + \frac{D''}{D}}$

Si ponimus $D = \frac{A^2}{f^2}$ et $D' = \frac{A'^2}{f'^2} (1 + \frac{f''}{f})$, erit

$$\alpha S'' = -B D' + \frac{B^2 D'' + B D D'}{1 + \frac{D''}{D}} \left(1 + \frac{D''}{2 D} \right) \quad \text{--- (VIII)}$$

Si autem est S' elongatio in secunda observatione (vera, nondum
 redacta), et α' annua parallaxis, est

$$\cos S' = \cos \beta' \cos(L' - L'') \quad r' = D' \frac{\sin S'}{\sin \alpha'} \quad S'' = D' \frac{\cos \beta' \sin(S' + \alpha')}{\sin \alpha'}$$

Si hi valores pro r' S'' in aequatione (VIII) substituantur et brevi
 tatis causa ponitur $\lg \sigma = \frac{-\frac{B^2 \cos \beta' \sin S'}{1 + \frac{D''}{D} \cos \beta' \cos S'}}{B + \frac{B^2 D''}{B D}}$ et $\varepsilon = \frac{B D'}{B D \cos \sigma} (1 + \frac{B^2 \cos \beta' \cos S'}{B D})$

obtinemus $\frac{D \sin^2 \alpha'}{2 D^3 \sin^3 S'} = \frac{\varepsilon (B + 1) \sin(\alpha' - \sigma)}{B + \frac{B^2 D''}{B D}} - \sin \alpha'$

Si autem ponimus, ad adue majorem simplificationem

$$\lg w = \frac{\varepsilon \sin \sigma}{B + \frac{B^2 D''}{B D}} - \cos \sigma \quad C = \frac{1}{2 D^3 \sin^3 S' \sin \sigma}$$

ultima aequatio evadit

$$C D \sin w \sin^2 \alpha' = \sin(\alpha' - w - \sigma) \quad \text{--- (IX)}$$

et hinc aequationi innititur quinta solutio nostri problematis
 quam dedit Gauss in sua Theoria motus corporum coelestium.

Ceterum facile videmus $A \cos \beta' \cos \beta''$ esse septuplo volumini pyra-
 midis ~~ex~~ aequale, cujus vertex in Sole et cujus basis est tri-
 angulum, quod a terra in prima, et a planeta in secunda et tertia
 observatione in plano caeli formatur, et ita pro ceteris $B \cos \beta' \cos \beta''$
 $(\cos \beta' \cos \beta'')$ --- presupposito, radii in sphaera esse aequalem
 unitati.

Quartam hanc solutionem accuratius considerare volumus,
 Si is datus in (XXIV) quatuor aequationibus quantitates x, v, s, x
 per quamcumque methodum et hinc quoque $S = mD$ inveniuntur sunt, ele-
 menta parabolica comites inveniuntur sequenti ratione.

Helio-centrica longitudo et latitudo $l, b, \text{ et } l'', b''$ in prima et ulti-
 ma aequatione inveniuntur ex sequentibus expressionibus

$$\left. \begin{aligned} r \cos b \cos(L-l) &= S \cos(L-l) + D \\ r \cos b \sin(L-l) &= S \sin(L-l) \\ r \sin b &= S \sin \beta \\ \text{et} \quad r'' \cos b'' \cos(L''-l'') &= S'' \cos(L''-l'') + D'' \\ r'' \cos b'' \sin(L''-l'') &= S'' \sin(L''-l'') \\ r'' \sin b'' &= S'' \sin \beta'' \end{aligned} \right\} \text{--- (a)}$$

et concordantia valorum r, v ex his aequationibus cum jam prius
 inuentis pervenit ad comprobationem calculi.

Si nunc est R longitudo nodi ascendens et n inclinatio orbis,
 erit $\pm \tan b = \tan n \sin(l-R)$, $\pm \tan b'' = \tan n \sin(l''-R)$ vel

$$\left. \begin{aligned} \pm \tan b &= \tan n \sin(l-R) \\ \pm \tan b'' &= \tan n \sin(l''-R) \\ \pm \frac{\tan b \cos(l-l'')}{\sin(l-l'')} &= \tan n \cos(l-R) \end{aligned} \right\} \text{--- (b)}$$

ex quibus his ultimis aequationibus $l-R$ vel R et n invenian-
 tur, signum superius si motus cometæ est directus, inferius si est
 retrogradus. Si dñ sunt v, v'' longitudines in orbita, erit

$$\left. \begin{aligned} \tan(v-R) &= \frac{\tan(l-R)}{\cos n} \\ \tan(v''-R) &= \frac{\tan(l''-R)}{\cos n} \end{aligned} \right\} \text{--- (c)}$$

ubi $v-R, v''-R$ in eodem quadrante sumi debent in quo
 facient $l-R, l''-R$.

Si dñ est ω longitudo perihelii et q distantia perihelii a so-
 le, erit (theoria parabolæ)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Vq} \cos \frac{v-\omega}{2} &= \frac{1}{Vr} \\ \frac{1}{Vq} \sin \frac{v-\omega}{2} &= \frac{\tan \frac{v''-v}{2}}{Vr} - \frac{1}{\sin \frac{v''-v}{2} V r''} \end{aligned} \right\} \text{--- (d)}$$

Eandem queritus e tabulis Barkerianis motus medius M et M''
 qui correspondet verae anomalie $v-\omega, v''-\omega$ vel $\omega-v, \omega-v''$ (per
 aequationem $r \tan \frac{v}{2} + r'' \tan \frac{v''}{2} = 2q$) dñ est, si T est tempus tran-
 situs

transitus per perihelion

$T = \text{tempori primo observato} + M n q^{\frac{3}{2}}$, $T = \text{tempori tertio observato} + M n q^{\frac{3}{2}}$
ubi $\log n = 0.0498723$ et signa superiora valent si apud motum
directum $v \gamma w$, $v'' \gamma w$, vel si apud motum retrogradum $v \gamma w$,
 $v'' \gamma w$ est. Concordantia amborum valorum T dat secundam compro-
bationem calculi. —

Ex. Pro cometa anni 1799 habemus tres sequentes observationes
quae in observatorio ^{temp. med. Paris} et in arcu multipli. colore in ph. h. b. sunt.

1799. Aug. 30	11 ^h 9 ^m 42 ^s	$\lambda = 125^{\circ} 48' 39''.3$	$\beta = 41^{\circ} 53' 52''.2$
Sept. 2	10 36 8	$\lambda' = 132 53 48.5$	$\beta' = 45 54 48.1$
Sept. 4	10 7 51	$\lambda'' = 138 56 31.2$	$\beta'' = 48 32 27.8$

$$L = 337^{\circ} 29' 8''.7 \quad R = 1.0687218$$

$$L' = 340 22 26.9 \quad R' = 1.0079991$$

$$L'' = 342 17 47.8 \quad R'' = 1.0074854$$

hinc $\nu = 1.980350$ dies, $\nu' = 4.957049$ dies, $\nu'' = 2.976690$ dies
ergo $m = \frac{\nu''}{\nu} = 0.787752$, et illae quatuor aequationes erunt.

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= 1.01752 - 1.71693\delta + 1.80493\delta^2 \\ r'^2 &= 0.01098 - 1.45724\delta + 1.41564\delta^2 \\ r''^2 &= 0.60716 - 0.64739\delta + 0.68624\delta^2 \end{aligned} \right\} \dots$$

$$135.84219 = \left(\frac{r+r'+r''}{2} \right)^2 - \left(\frac{r-r'-r''}{2} \right)^2$$

His aequationibus satis fit per $\delta = 0.71469$ ex quo

$$r = 0.8440, \quad r' = 0.8346, \quad r'' = 0.1317, \quad \delta''' = m\delta = 0.562998$$

$$\text{hinc } l = 26^{\circ} 31' 40''.8, \quad b = 49^{\circ} 26' 23''.1, \quad l'' = 6^{\circ} 45' 39''.7, \quad b'' = 49^{\circ} 46' 46''.9$$

ergo cometa directus

$$\text{Ex hac sequitur } \rho = 100^{\circ} 51' 53''.4 \quad m = 49^{\circ} 51' 7''.9$$

$$\text{et argumenta latitudinis } v - \rho = 83^{\circ} 40' 9''.6, \quad v'' - \rho = 92^{\circ} 38' 55''.0$$

$$\text{et longitudo perihelii: } \omega = 4^{\circ} 32' 8''.2$$

$$\text{Distantia minima } q = 0.833741$$

$$\text{vera anomalia in prima observatione } v = 12^{\circ} 39' 35''.6 \text{ hinc}$$

$$\text{si } T \text{ est tempus inter primam observationem et transitum}$$

$$\text{per perihelium } T = \frac{(2q)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \left(\log \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \log^3 \frac{v}{2} \right) = 6.97118 = 6^{\circ} 23' 18' 30''$$

$$30 \text{ August} \quad \dots \quad 11 \ 9 \ 42$$

$$\text{tempus transitus per perihelium } 6 \text{ Sept. } 10^{\text{h}} 28' 12''$$

In prioribus 2.) habuimus

$$\alpha = - \frac{B'D'}{D'} + \frac{B''D''I'' + B'D'I(1 + \frac{\mu^2 I''}{2D'})}{D'I''}$$

et ibidem 3.) erat $0 = BFD - B'F'D + B''F''D''$

Si in hac aequatione substituitur ex aequatione (V) valor pro F

$F = \frac{p^2}{2D'I''} (1 - \frac{\mu^2 I''}{6D'})$ etc, illam fere aequalitatem ponere possumus

$$0 = B'D'I - B'D'I' + B''D''I'' + B'D'I' - \frac{\mu^2 I''}{2D'I''}$$

Si igitur substituiamus in praecedenti valore pro α , valorem pro $B'D'I + B''D''I''$ ex ultima aequatione, erit, si negligamus alios, potentis quantitatis μ ,

$$\frac{\alpha}{B'} \cdot \frac{2}{\mu^2 I''} = - \left(\frac{1}{D'} - \frac{1}{D''} \right) \frac{D'}{D''} \quad \text{--- (A)}$$

et si haec aequatio coniungatur cum sequenti

$$r^2 = D'^2 + D''^2 + 2D'D'' \cos(L - \lambda) \quad \text{--- (B)}$$

possumus ex his duabus aequationibus valores duarum in μ , qui tantum D' , r inuenire, et tunc erit

$$D' = - \frac{A'}{B'} \cdot \frac{D'}{D''} \quad \text{et} \quad D'' = - \frac{C'}{B'} \cdot \frac{D'}{D''}$$

Ex his appropinquabimus praecedentia ad sequentes tres observationes (Vestis)

1804. tempus med. Paris

24. April	9 ^h 5' 16".5	$\lambda = 174^\circ 7' 33".2$	$\beta = +10^\circ 37' 24".1$
29. April	8 43 42.2	$\lambda' = 173 44 21.3$	$\beta' = 11 19 42.6$
4. Maji	8 22 51.2	$\lambda'' = 173 33 33.0$	$\beta'' = 11 0 39.2$

$$L = 213^\circ 42' 55".5 \quad \log D = 0.0028540$$

$$L' = 218 33 22.4 \quad \log D' = 0.0034220$$

$$L'' = 223 23 15.5 \quad \log D'' = 0.0039670$$

$$\text{hinc } D = 4.9855208 \text{ dis, } - D' = 9.8705405 \text{ dis, } - D'' = 4.9850197 \text{ dis}$$

$$\log \alpha = 5.3424727$$

$$\log A = 7.6214048 \quad \log B = 7.9268504 \quad \log C = 7.6514234$$

$$\log A' = 7.6537430 \quad \log B' = 7.9651452 \quad \log C' = 7.6556959$$

$$\log A'' = 7.6808832 \quad \log B'' = 7.9887417 \quad \log C'' = 7.6956918$$

Adiungantur duae ultimae aequationes (A) et (B)

$$r^2 = 1.0158930 + 0.1553219 D'' + 0.0170896 D'^2$$

$$\frac{D'}{D''} - \frac{D}{D''} = 0.6483616$$

ubi isti signati numeri v.g. 0.155... sunt jam logarithmi

Ex his duabus aequationibus sequitur

$$\log D' = 0.3477013, \quad \log D'' = 0.1398755$$

et ex hac $\log S = 0.1286815$, $\log S'' = 0.1560780$

Nos videmus firmi de longitudinibus hujus methodi cum priori.

Etiam hic obtinemus primos approximatos valores pro v, d, S, S'' per sine suppositione orbis parabolici, tunc pro suis determinatione harum quantitatibus ad inventionem primorum approximatorum ellipticorum elementorum orbis servare potest.

Ex S et S'' primis et altius observationis mirum invenitur per aequationes (a) heliocentricis loci planitibus vel l, b, v , et l'', b'', v'' et ex hoc longitudo nodi Ω , et inclinatio orbis n et aequationibus (b), quas etiam ita exprimere possumus

$$\lg\left(\frac{l''+l}{2} - \Omega\right) = \frac{\sin(b''+b)}{\sin(b''-b)} \lg \frac{l''-l}{2}$$

$$\lg n = \frac{\lg b''}{\sin(l''-\Omega)} = \frac{\lg b}{\sin(l-\Omega)}$$

ubi $\lg n$ est vel positiva vel negativa linea, si ad ellipticam reducitur motus heliocentricus est directus vel retrogradus. Si ita n et Ω sunt notae, argumentum latitudinis invenitur per sequentes expressiones

$$\lg u = \frac{\lg(l-\Omega)}{\cos n} \quad \sin u = \frac{\sin b}{\sin n} \quad \cos u = \cos b \cos(l-\Omega)$$

$$\lg u'' = \frac{\lg(l''-\Omega)}{\cos n} \quad \sin u'' = \frac{\sin b''}{\sin n} \quad \cos u'' = \cos b'' \cos(l''-\Omega)$$

$$\sin(u''-u) = \frac{\sin(l''-l-2\Omega) \cos b' \cos b}{\cos n} \quad \sin(u''-u) = \frac{\sin(l''-l) \cos b' \cos b}{\cos n}$$

et nunc sumus in statu determinandi elliptica elementa, nam invenitur n et Ω referuntur tantum ad fixum, non ad formam orbitae. Antequam autem transimus ad determinationem horum elementorum, volumus adhuc dare novum methodum immediate invenire valores pro n, Ω et $u''-u$.

Sint x, y, z coordinatae loci heliocentrici planitibus et x' in linea nodorum, erit $x' = r \cos u$, $y' = r \sin u \cos n$, $z' = r \sin u \sin n$ si autem eligimus alias coordinatas x, y, z , ubi axis x in longitudine ducit, et axis y in longitudine $N+90$ jacet, et z tandem perpendiculariter in hisit plano xy quod planum fit planum eclipticae erit

$$x = y' \sin(N-\Omega) + x' \cos(N-\Omega)$$

$$y = y' \cos(N-\Omega) - x' \sin(N-\Omega)$$

Si in his aequationibus priores valores quantitates x, y, z substituamus,
et evolvamus similes expressiones pro x'', y'', z'' de his observationibus,
obtinemus

$$x''z'' - y''x'' = rr'' \sin(u'' - u) \sin n \sin(N - B)$$

$$x''z'' - x''x'' = rr'' \sin(u'' - u) \sin n \cos(N - B)$$

$$xy'' - x''y = rr'' \sin(u'' - u) \cos n$$

et quoniam, si δ sunt notae, etiam x, x'' ... nos sunt, duas primas ha-
runt aequationum sunt

$$(N - B) \text{ et } rr'' \sin(u'' - u) \sin n$$

$$\text{et tertio } n \text{ et } rr'' \sin(u'' - u)$$

Si x, x'' sunt in linea aequinoctiali, $N = 0$, hinc

$$x''z'' - y''x'' = rr'' \sin(u'' - u) \sin n \sin B$$

$$x''z'' - x''x'' = rr'' \sin(u'' - u) \sin n \cos B$$

$$xy'' - x''y = rr'' \sin(u'' - u) \cos n$$

Si secunda observatio, ad quam pertinent x, y, z et u post primam
est inspicibilis, est $u'' - u$. Si ergo scimus esse $u'' - u < 180^\circ$ quantitas
 $rr'' \sin(u'' - u)$, si n erit positiva, ergo quoque quantitas $(N - B)$ sine am-
biguitate signorum determinari potest. Si diu est $xy'' - x''y$ positi-
vum, vel negativum, motus planetæ est directus vel retrogradus.
Si autem ignotum est an $u'' - u$ minor vel major quam 180° sit,
ex his exceptis prioribus tantummodo generatim longitudines lineæ
nec oritur invenire possumus, sed discriminare ad ipse modus sit aspen-
dens, vel descendens. Valor quantitates n tandem semper est posi-
tivus et nunquam major quam 180° . Si autem n major est quam
 90° , motus planetæ est retrogradus. Etiam adhuc notare possumus,
uti $\cos n$ est \cosinus inclinationis orbitæ versus tertium planum
 x, y , ita quoque esse $\sin n \sin(N - B)$ et $\sin n \cos(N - B)$ cosines in-
clinationum orbitæ versus ambo altera plana coordinata, uti et
 $rr'' \sin(u'' - u)$ esse duplicem arcum trianguli rectilinei, quod contem-
tum est inter ambo radios r, r'' , uti tandem $xy'' - yx''$, $x''z'' - xz''$,
 $xy'' - x''y$ duplices areas projectionum hujus trianguli ad ista tria
plana coordinata.

Ex inventis quantitatibus r, r', r'' differentiis argumentorum latitu-
dinis vel veris anomalias et datis intervallis temporum, elementa elliptica

elliptica diversis modis derivari possunt. - Nos hic tantummodo
praeipuas methodos breviter indicabimus, ut Gauss theoria mot. corp. celest. § 22

1.) Videre volumus quomodo differentia verae anomalie $v-v'=2h$,
radiis r, r' et intervallo temporis, elliptica elementa orbis in ve-
niri possint. -

sit $e'-e=2g$ differentia anomaliarum eccentricarum anomaliarum;
dum est, si a semiaxis majorem et a.e. eccentricitatem designat

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos e \quad \text{et tunc etiam } r+r' = 2a - 2ae \cos \frac{e'+e}{2} \cos g, \text{ sed habemus}$$

$$\sin \frac{v}{2} = \sin \frac{e}{2} \sqrt{\frac{a(1+e)}{r}} \quad \text{et} \quad \cos \frac{v}{2} = \cos \frac{e}{2} \sqrt{\frac{a(1-e)}{r}}$$

$$\text{ergo est propter } \cos h = \cos \frac{v'}{2} \cos \frac{v}{2} + \sin \frac{v'}{2} \sin \frac{v}{2}$$

$$\frac{(rr')^{\frac{1}{2}}}{a} \cos h = \cos g - e \cos \frac{e'+e}{2} \quad \text{--- (I)}$$

Si substituimus hunc valorem pro $e \cos \frac{e'+e}{2}$ in procedenti aequatione

$$\text{est } \cos g = \frac{(rr')^{\frac{1}{2}} \cos h \pm \sqrt{rr' \cos^2 h + 2a(2ax - r - r')}}{2a} \quad \text{vel}$$

$$a = \frac{r+r' - 2 \cos h \cos g \sqrt{rr'}}{2 \sin g} \quad \text{--- (II)}$$

Si proinde t est intervallum temporis et $n = 0.0172021$, erit

$$\frac{ut}{a^{\frac{3}{2}}} = e'-e - e(\sin e' - \sin e) = 2g - 2e \sin g \cos \frac{e'+e}{2}$$

et si in hac aequatione valorem pro $e \cos \frac{e'+e}{2}$ ex (I) substituimus erit

$$\frac{ut}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + 2 \cos h \sin g \sqrt{\frac{rr'}{a}}$$

vel tandem si pro a valor ex (II) substituitur et brevitate causa

$$\frac{1}{2} \frac{r'+r}{\cos h} = 1+2l \quad \text{et} \quad \frac{ut}{(2 \cos h \sqrt{rr'})^{\frac{3}{2}}} = m \quad \text{probitur erit}$$

$$\pm m = (1 + \sin^2 \frac{g}{2})^{\frac{1}{2}} + (1 + \sin^2 \frac{g}{2})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \right) \quad \text{--- (III)}$$

ubi m habet signum superius vel inferius, si $\sin g$ est positivus et
aut negativus.

Aequatio (III) continet tantummodo quantitates in cognitam

$$g = \frac{e'-e}{2}, \text{ igitur ex ea hanc quantitatem determinare possumus.}$$

Ut hoc commodius fieri possit, sit $x = \sin^2 \frac{1}{2} g$, ergo est ultima

$$\text{aequatio} \quad \pm m = (1+x)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \right)$$

Sit $X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$ dum est si hac expressio differentietur,

$$2(x-x') \frac{dX}{dx} = 4 - (3-6x)X$$

si ergo

Si ergo ponitur $X = \frac{4}{3}(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots)$ obtinebimus si hic velo-
pro X ejusq. differentiale in ultima aequatione substituimus et
factoris aequationum notabilium quantitates x sibi aequales, ponem-
us, $\alpha = \frac{6}{5}, \beta = \frac{8}{7}\alpha, \gamma = \frac{10}{9}\beta, \delta = \frac{12}{11}\gamma$ ergo

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}x + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}x^3 + \dots$$

et hinc ponitur $X = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{7}{10}(x - \xi)}$ est $\xi = x - \frac{5}{8}x + \frac{10}{9}x$

Ex ultima x respondens pro quolibet parvo valore quantitates x , quan-
titas ξ facile inveniri potest; si nimirum in eo praecedentem valo-
rem quantitates x substituimus, erit, si quidem et alios potius
his quantitates x negligamus,

$$\xi = 0.0511429x + 0.0330158x^2 + 0.0205417x^3 + \dots \quad (A)$$

Si autem x notabilis est major, ad determinationem quantitates

ξ sequentem possumus applicare methodum:

Prius erat $\xi = \frac{xX - \frac{5}{8}X + \frac{10}{9}}{X}$ et numerator hujus fractionis

quod ξ , si prius invenitur valor pro X substituatur, aequabitur

$$\frac{8}{105}X^2 + \dots \text{ ubi } T = 1 + \frac{2 \cdot 8}{9}x + \frac{3 \cdot 8 \cdot 10}{9 \cdot 11}x^2 + \frac{4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{9 \cdot 11 \cdot 13}x^3 + \dots$$

ergo quod est illi numeratori $xX - \frac{5}{8}X + \frac{10}{9} = \frac{8}{105}X^2 + \dots$ vel

$$X = \frac{\frac{4}{3}(1 - \frac{12}{175}Ax^2)}{1 - \frac{6}{5}x} \text{ et hinc } \xi = \frac{\frac{2}{35}Ax(1 - \frac{6}{5}x)}{1 - \frac{12}{175}Ax^2}$$

Alia deductio quantitates ξ secundum theoriam motus corporum
celestium p. 92. est sequens:

Habemus $X = \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}x + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7}x^2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}x^3 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}x^4 + \dots$

Autem prius transformare licet in fractionem continuam sequentem:

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}x}$$

$$= \frac{1 + \frac{2}{5}x}{1 - \frac{6}{5}x}$$

$$= \frac{7 \cdot 9}{1 - \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 9}x}$$

$$= \frac{1 - \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 11}x}{1 - \frac{7 \cdot 10}{11 \cdot 13}x}$$

$$= \frac{1 - \frac{7 \cdot 10}{11 \cdot 13}x}{1 - \frac{8 \cdot 6}{13 \cdot 15}x}$$

$$= \frac{1 - \frac{9 \cdot 12}{15 \cdot 17}x}{1 - \frac{10 \cdot 8}{17 \cdot 19}x}$$

$$= \frac{1 - \frac{10 \cdot 8}{17 \cdot 19}x}{1 - \frac{11 \cdot 10}{19 \cdot 21}x}$$

$$= \frac{1 - \frac{11 \cdot 10}{19 \cdot 21}x}{1 - \frac{12 \cdot 10}{21 \cdot 23}x}$$

et secundum quos coefficients $\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{8}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{10}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{12}{11}, -\frac{12}{11}, \dots$ A progredimur,
obvia est, sicut terminus n^o hujus serie sit pro n pari =

aequalis $\frac{n-3n}{2n+1.2n+3}$, pro n impari autem $= \frac{n+2. n+5}{2n+1.2n+3}$

Quasi autem statuimus $\frac{x}{1 + \frac{2}{5.7}x} = x - \xi$
 $\frac{x}{1 - \frac{5.8}{7.9}x} = x - \xi$
 $\frac{x}{1 - \frac{1.4}{9.11}x} = x - \xi$
 $\frac{x}{1 - \dots} = x - \xi$

sive $X = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}$ atque $\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{16}{9}x$, sive

$\xi = \frac{\sin^3 g - \frac{3}{4}(2g - \sin 2g)(1 - \frac{6}{5}\sin^2 g)}{\frac{16}{10}(2g - \sin 2g)}$. Numerator huius expres-

sionis est quantitas numerus ordinis primi, denominator ordinis tertii, adeoque ξ ordinis quarti, siquidem g tangens quantitas ordinis primi, sive x tangens ordinis secundi spectata sit. Similiter, formulam hanc ad computationem numeri cum x tunc ipsius ξ non esse idoneam, quoties g angulus non valde considerabilem exprimat: tunc autem ad hunc finem, commo-

derivat: $\xi = \frac{2}{35}x^2$
 $\frac{1 + \frac{2}{35}x - \frac{40}{63}x}{1 - \frac{4}{99}x}$
 $\frac{1 - \frac{70}{140}x}{1 - \frac{18}{195}x}$
 $\frac{1 - \frac{108}{255}x}{1 - \dots}$

sive $\xi = \frac{2}{35}x^2$
 $\frac{1 - \frac{18}{35}x - \frac{4}{63}x}{1 - \frac{40}{99}x}$
 $\frac{1 - \frac{18}{140}x}{1 - \frac{70}{195}x}$
 $\frac{1 - \frac{108}{255}x}{1 - \dots}$

In tabula tertia huius celeberrimi operi adnexa pro cunctis va-

valoris respondentis ipsius ξ (ad septem figuras decimales computati inveniuntur. Haec tabula primo aspectu monstrat exiguitatem ipsius ξ pro modicis valoribus ipsius q ; ita e.g. pro $\varepsilon - \varepsilon' = 10^\circ$ sive $q = 5^\circ$ ubi $x = 0.00195$ fit $\xi = 0.0000002$.
 Haec prior aequatio erat $m = (1+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} - \frac{5}{16}x - \xi}$
 habuerit itaq. $\frac{m^2}{y} = V(1+x)$ atq. $h' = \frac{m^2}{\xi + 1 + \xi}$ illa aequatio erit $h' = \frac{y - 14y^2}{\frac{1}{y} + y}$ (IV)

Quum autem ξ semper tantummodo parvum valorem recipit, in unitatis habeat, resolutio nostri problematis erit sequens:
 In approximatione prima negligatur pectus, haec quantitas ξ atque ponatur $h' = \frac{m^2}{\xi + 1}$ Dein queratur y ex (IV) et $x = \frac{m^2}{y^2} - 1$. Cum hoc valore quantitalis x queratur ξ ex (A) et cum hoc h' ex $h' = \frac{m^2}{\xi + 1 + \xi}$ et y ex (IV), et iterum x ex $x = \frac{m^2}{y^2} - 1$ et cum hoc novo valore quantitalis, sic x iterum potest queri ξ ex (A) et hoc methodus laudius continuari, donec novus valor quantitalis x ab immediato procedenti non amplius divergit. Si ita habemus x etiam q ex aequatione $x = \sin^2 i q$ est notum. Magis commoda evadit haec resolutio, si habetur tabula, quae pro quolibet valore x det correspondentem valorem ξ , uti dicimus de tabula ult. Gauss.

Ex. At $h = 31^\circ 24' 38.32$, $\log r = 0.4282492$, $\log r' = 0.4062633$, $t = 259.884772$
 Dein est $\log m^2 = 9.3536651$ et $t = 0.08635659$, et primus valor $h' = \frac{m^2}{\xi + 1} = 0.2459451$ tunc $\log y^2 = 0.1722683$, $x = 0.06527749$ ex quo $\xi = 0.0002531$ et hinc correctus valor $h' = \frac{m^2}{\xi + 1 + \xi} = 0.2456779$, ex quo $\log y^2 = 0.1722363$, $x = 0.06529078$ et iterum $\xi = 0.0002532$

habemus primum approximationem valorem pro y , ex aequatione (IV) pro duobus adjacentibus limitibus quantitalis y , valorem pro h querere possumus, inter quos erit verus valor quantitalis y .

Sic est pro hoc exemplo

h	$\log y^2$
0.245	0.1721837
0.246	0.1727218

et

et eadem ratione $\frac{0.065}{0.066} \quad \frac{0.0002509}{0.0002588}$

2) Si hac ratione $q = \frac{e' - e}{2}$ inventum est, determinatio elementorum ellipticorum nullam amplius habebit difficultatem. Invenitur enim mirum semiaxis major a ex aequatione (II) h.e. ex aequatione

$$a = \frac{2(1 + \sin^2 q) \cos h \cdot Vrr'}{\sin^2 q} \text{ vel etiam } a = \frac{2m \cos h \cdot Vrr'}{y \cdot \sin^2 q} = \frac{ut^2}{4y^2 r r' \cos h \sin^2 q}$$

semiaxis minor $b = Vap$ invenitur ex $b \sin q = \sin h \cdot Vrr'$ vel $Vp = \frac{y r r' \sin 2h}{ut}$. Si est $e = \sin q$, hinc $b = a \cos q$ erit $\cos q = \frac{\sin q \cos h}{2(1 + \sin^2 q)}$

Si propterea coniungatur aequatio (I) cum nota $r' - r = 2ae \sin q \sin \frac{e' + e}{2}$ et cum superioribus addita $r' + r = 2a - 2ae \cos \frac{e' + e}{2} \cos q$ obtineamus. $\frac{e' + e}{2} = \frac{h - y \sin q}{(r' + r) \cos q - 2 \cos h \cdot Vrr'}$ et eadem ratione

$$\text{invenitur } \frac{v + v'}{2} = \frac{(r' - r) \sin h}{2 \cos q Vrr' - (r' + r) \cos h}$$

Quoniam iam noscimus $\frac{v - v'}{2} = h$ et nunc $\frac{v + v'}{2}$, etiam habemus valores quantitates v' et v , ex quibus directus perihelii invenitur. Eadem est modus motus intra tempus t ex praecedentibus aequationibus $\frac{ut}{a^2} = 2q - 2e \cos \frac{e' + e}{2} \sin q$

et aequalitas amborum expressionum pervenit ad comprobationem calculi. Eadem est epocha medii anomalis quae pertinet ad medium inter quatuor tempora observationum, $\frac{e' + e}{2} = e \sin \frac{e' + e}{2} \cos q$ et anomalis medii ipsius, quae pro his temporibus valent, sunt $M = e - e' \sin e$ et $M' = e' - e \sin e'$

quarum differentia hinc aequalis esse debet $\frac{ut}{a^2}$.

3) Adhuc notari potest, sectorum ellipticum inter r, r' et arcum ellipticum, aequalens esse $\frac{1}{2} ut \cdot Vp$ et triangulum inter r', r et chordam $\frac{1}{2} r r' \sin 2h$ hinc nos habere $\frac{\text{Sector}}{\text{Triangulum}} = \frac{ut \cdot Vp}{r r' \sin 2h} = y$

Si igitur y'' est ratio sectoris ad triangulum in 1 et 2, et y in 2 et 3 observatione, erit, quoniam $r r' \sin(v' - v) = r r' \sin 2h = 2y''$ $Vp = \frac{2y''}{ut}$ et $Vp = \frac{2y}{ut}$ et hinc $\frac{y''}{y} = \frac{y''}{y}$

Propterea est aequatio linearum secundi ordinis

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos v, \quad \frac{p}{r'} = 1 + \varepsilon \cos v', \quad \frac{p}{r''} = 1 + \varepsilon \cos v''$$

Si haec aequationes multiplicentur respective per $\sin(v''-v')$, $-\sin(v''-v)$, $\sin(v'-v)$ summa horum productorum

$$\text{dabit } p = \frac{\sin(v''-v') - \sin(v''-v) + \sin(v'-v)}{\frac{1}{r} \sin(v''-v') - \frac{1}{r'} \sin(v''-v) + \frac{1}{r''} \sin(v'-v)}$$

Summator hujus fractionis est etiam

$$2 \sin \frac{1}{2}(v''-v') \cos \frac{1}{2}(v''-v') - 2 \sin \frac{1}{2}(v''-v) \cos \frac{1}{2}(v''+v'-v) =$$

$$= 4 \sin \frac{1}{2}(v''-v') \sin \frac{1}{2}(v''-v) \sin \frac{1}{2}(v'-v), \text{ hinc est}$$

$$p = \frac{2r'r'' \sin \frac{1}{2}(v''-v') \sin \frac{1}{2}(v''-v) \sin \frac{1}{2}(v'-v)}{f - f' + f''} \text{ vel}$$

$$p = \frac{2r'r'' \sin h \sin h' \sin h''}{f - f' + f''}$$

et $f - f' + f''$ evidenter est area trianguli plani inter puncta extrema radiorum r, r', r'' .

Quum autem, ubi facile videre possumus, denominatos ultimos expressionis est tertii ordinis, si h, h', h'' sunt quantitates primi ordinis, haec expressio ad determinationem quantitatis p immediate non convenience applicari potest.

4) Datus autem adhuc alia notatu digna, methodus, et datus duobus radiis r, r' et differentia verarum et excentricarum anomaliarum $v'-v=2h$, $e'-e=2g$, et intermedio tempore t invenienti elementa orbitae. Habuimus nimirum, si a denotat semi-

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}} = \sin \frac{e}{2} \cdot \sqrt{1+\varepsilon} \quad (1)$$

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}} = \cos \frac{e}{2} \cdot \sqrt{1+\varepsilon} \quad (2)$$

$$\sin \frac{x'}{2} \cdot \sqrt{\frac{r'}{a}} = \sin \frac{e'}{2} \cdot \sqrt{1+\varepsilon} \quad (3)$$

$$\cos \frac{x'}{2} \cdot \sqrt{\frac{r'}{a}} = \cos \frac{e'}{2} \cdot \sqrt{1+\varepsilon} \quad (4)$$

Adhuc $2x = v'+v$ et $2y = e'+e$. Nunc multiplicetur (1) per $\sin \frac{x+g}{2}$ et (2) per $\cos \frac{x+g}{2}$ et addantur haec producta, eadem ratio multiplicetur (3) per $\sin \frac{x-g}{2}$ et (4) per $\cos \frac{x-g}{2}$ et addantur producta, amborum summarum differentia dabit

$$\cos \frac{h+g}{2} \left\{ \sqrt{\frac{r'}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} \right\} = 2 \cos \frac{e}{2} \sin g \sin \frac{x-g}{2} \quad (1')$$

ubi $\varepsilon = \sin \varphi$. Eadem ratione dabunt

$$(1) \sin \frac{x-g}{2} + (2) \cos \frac{x-g}{2} - (3) \sin \frac{x+g}{2} - (4) \cos \frac{x+g}{2}$$

$$(1) \cos \frac{x+g}{2} - (2) \sin \frac{x+g}{2} - (3) \cos \frac{x-g}{2} + (4) \sin \frac{x-g}{2}$$

$$(1) \cos \frac{x-g}{2} - (2) \sin \frac{x-g}{2} - (3) \cos \frac{x+g}{2} - (4) \sin \frac{x+g}{2}$$

originalibus aequationibus

$$\cos \frac{h-g}{2} \{ \sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} \} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin g \sin \frac{x+y}{2} \dots (2')$$

$$\sin \frac{h+g}{2} \{ \sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} \} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin g \cos \frac{x-y}{2} \dots (3')$$

$$\sin \frac{h-g}{2} \{ \sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} \} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin g \cos \frac{x+y}{2} \dots (4')$$

Si autem est $\sin(45^\circ + \omega) = \sqrt{\frac{r}{a}}$, erit

$$\sin 2\omega = \frac{\sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}}}{2 \sqrt{\frac{r}{a}}} \quad \cos 2\omega = \frac{2 \sqrt{\frac{r}{a}}}{\sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}}}$$

et si praeterea ponimus

$$X = \sin g \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{a}{rr'}} \quad \text{et} \quad Y = \sin g \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{a}{rr'}}$$

aequationes (1') ... (4') erunt

$$\cos \frac{h+g}{2} \sin 2\omega = X \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos \frac{h-g}{2} \sin 2\omega = Y \sin \frac{x+y}{2}$$

$$\sin \frac{h+g}{2} \sec 2\omega = X \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin \frac{h-g}{2} \sec 2\omega = Y \cos \frac{x+y}{2}$$

et quoniam in his aequationibus h, g et ω sunt cogniti inveniuntur x, y et X, Y . Si hi valores sunt inventi erit

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{Y}{X}$$

$$a = \frac{X \sqrt{rr'}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 g} = \frac{Y \sqrt{rr'}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 g}$$

$$\text{et si } p \text{ est semiparameter, } \sqrt{p} = \frac{\sin h \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{rr'}}{X} = \frac{\sin h \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{rr'}}{Y}$$

$$\text{et ad computationem calculi } b = a \cos \varphi = \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{\sin h \sqrt{rr'}}{\sin g}$$

Si praeterea x et y sunt nodi, etiam est $v = x - h$ et $v' = x + h$ nam tum ex quo longitudo perihelii invenitur. — Eadem ratione obtinemus $e = y - g$ et $e' = y + g$. — Praeterea est medius motus in tempore t aequalis $\frac{2\pi}{a^2}$ vel $2(g - e \cos y \sin g)$ Tandem est epocha medii anomaliae, quae pertinet ad tempus medii inter ambas observationes $y - e \sin y \cos g$ et

et ad comprobationem calculi est differentia mediarum anomaliarum
 $\frac{y}{a} = e' - e - (e \sin e - e' \sin e')$

5.) Tandem datus adhuc alia methodus e duobus ceteris radiis r, r' differentia verarum anomaliarum $v - v' = 2h$ et intervallo temporis observationum t saltem approximatos valores elementorum ellipticorum invenire.

Ante omnia volumus querere primo integrale

$dy = \varphi(x)dx$
 inter limites $x = a$ et $x = a+m$, presupposito, $\varphi(x)$ esse generatim aliquam adhuc incognitam functionem quantitatis x , cujus autem speciales valores $\varphi(x) = A, B, C, D, \dots$ pro $x = 0, a, b, c, d, \dots$ dati sunt. His suppositis, est igitur quesitum integrale

$$y = \int \varphi(a+mx) dx - \int \varphi(a) dx$$

in e. si evolvetur hec expressio
 $y = m\varphi(a) + \frac{m^2}{1.2}\varphi'(a) + \frac{m^3}{1.2.3}\varphi''(a) + \dots$

vel quod idem est

$$y = mA + \frac{m^2}{1.2}dA + \frac{m^3}{1.2.3}d^2A + \dots \quad (I)$$

et si ne pariter, sed eorum integrale habere sequentem formam

$$y = xA + x_1B + x_2C + x_3D + \dots \quad (II)$$

suntummodo adhuc incogniti factores x, x_1, x_2, \dots determinari

debent, ut satisfaciamus proposito problemati. Ad hunc

finem notemus, esse $B = A + ad + \frac{a^2}{1.2}d^2A + \frac{a^3}{1.2.3}d^3A + \dots$

et eadem ratione $C = A + bd + \frac{b^2}{1.2}d^2A + \frac{b^3}{1.2.3}d^3A + \dots$

$$D = A + cd + \frac{c^2}{1.2}d^2A + \frac{c^3}{1.2.3}d^3A + \dots$$

Hi valores quantitatum B, C, D, \dots in aequatione (II) substituantur, et si hanc expressionem pro y quoad singula membra comparamus cum aequatione (I) invenimus sequentes series:

$$x + x_1 + x_2 + x_3 + \dots = m$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + \dots = \frac{1}{2}m^2$$

$$a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 + \dots = \frac{1}{3}m^3$$

$$a^3x_1 + b^3x_2 + c^3x_3 + \dots = \frac{1}{4}m^4 \text{ etc.} \quad (A)$$

et quum numerus harum aequationum est idem cum numero quantitatum incognitarum x, x_1, x_2, \dots has ultimas ex prioribus per notas eliminationes determinare possumus. — Si tandem substituimus hac ratione inventos valores quantitatum

x_1, x_2, x_3, \dots in aequatione (II) obtinebimus quæsitum
 integrale $y = \int \varphi(x) dx$.
 Si habuerimus v. c. tantum duos valores $\varphi(x) = A$ et B pro
 $x=0$ et a , cum est $m=a$ et ultima series erant
 $x+x_1=a$, $x_1=\frac{a}{2}$ hinc $x=x_1=\frac{a}{2}$ et æquatio

(II) dabit $y = \frac{a}{2}(A+B)$ vel sic dictum medium arithmeticum.

Pro tribus valoribus $\varphi(x) = A, B, C$ pro $x=0, a, b$, $m=b-a$
 hinc

$$x+x_1+x_2=b$$

$$ax_1+bx_2=\frac{1}{2}b^2$$

$$a^2x_1+bx_2=\frac{1}{3}b^3 \text{ hinc}$$

$$y = \frac{A(ba-b)}{6a} + \frac{Bb^2}{6a(b-a)} + \frac{Cb(3a-2b)}{6(a-b)} \text{ et s. p.}$$

Aliam demonstrationem hanc expressionem invenire
 possumus in resolutione problematis, inveniendo æquatio-
 nes lineares curvæ, quæ pro abscissis $x=0, a, b, c$, habet respec-
 tivæ ordinatas $y=A, B, C$.

Simpliores evadunt hæc expressiones, si ponitur
 $b-a=c-b=d-c$ etc.

v. c. si subsequentes valores quantitatibus x æquales assumen-
 tur. Sic invenitur pro integrali inter $x=a$ et $x=a+m$ secun-
 dum ordinem $\int \varphi(x) dx = \frac{m}{2}(\varphi a + \varphi(a+m))$

$$\text{vel } \frac{m}{6}(\varphi a + 4\varphi(a+\frac{1}{2}m) + \varphi(a+m))$$

$$\text{vel } \frac{m}{8}(\varphi a + 3\varphi(a+\frac{1}{3}m) + 3\varphi(a+\frac{2}{3}m) + \varphi(a+m))$$

$$\text{vel } \frac{m}{90}(\varphi a + 32\varphi(a+\frac{1}{4}m) + 12\varphi(a+\frac{3}{4}m) + 32\varphi(a+\frac{3}{4}m) + \varphi(a+m))$$

et s. p.

C) Ut præcedentia applicemus ad nostrum problema, sit φ
 radius ellipticus qui pertinet ad veram anomaliam V , cum
 area sectoris elliptici, qui describitur tempore t , æquatur
 $\frac{1}{2} \int \varphi^2 dV$, hoc integrale sumitur a $V=v$ usque ad $V=v'$.

Si igitur p designat semiparametrum orbis, erit ut $Vp = \int \varphi^2 dV$
 et propter brevitatis causam $v'-v=ch$ erit secundum primam æqua-
 tionem (III) $\int \varphi^2 dv = h(r^2 + \dot{r}^2) = \frac{2hrr'}{\cos 2\omega}$ posito $\varphi(4r^2 + \omega) = \frac{r^2}{2}$,
 et primus approximatus valor quantitatis Vp erit

$$Vp = \frac{2hrr'}{r + r'}$$

et nos volumus hunc valorem aequalem ponere 3α
eadem ratione est secundum aequationem (III) secundum actum
accuratius. $\int \frac{2h}{r} dr = \frac{1}{3}h(r^2 + r'^2 + 4hr')$ ubi R est radius vero
anomalis $v + v'$.

Si autem ponimus in expressione pro p quam dedimus
in 2.) $r = R$, $v = v + h$, $v' = v + 2h$, erit

$$p = \frac{4\sin^2 \frac{1}{2} h \sin h}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \sin h - \frac{1}{2} \sin 2h}, \text{ vel}$$

$$\frac{\cos h}{R} = \frac{\cos w}{Vrr' \cos 2w} - \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} h}{p}$$

si brevitate causa ponitur, $\int = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} h Vrr' \cos 2w}{\cos w}$, est

$$R = \frac{\cos h Vrr' \cos 2w}{\cos w (1 - \frac{\int}{p})}$$

hinc secundus approximatus valor

$$Vp = \alpha + \frac{\varepsilon}{(1 - \frac{\int}{p})^2} \quad (A)$$

$$\text{ubi } \varepsilon = 2\alpha \left(\frac{\cos h \cos 2w}{\cos w} \right)^2$$

Si praeterea ponitur $Vp = q + u$ ubi q est approximatus valor
quantitatis Vp , hinc u admodum parva quantitas cupis ad
torem potestis negligi possumt, erit si evaluetur aequatio (A)

$$Vp = \frac{\varepsilon q^2 + (q^2 - \int)(\alpha q^2 + 4\delta q - 5\alpha\delta)q}{(q^2 - \int)(q^2 + 3\delta q - 4\alpha\delta)}$$

et in hac expressione possumus pro q prius inventum pri-
mum valorem seu 3α ponere. Si brevitate causa ponitur

$$\beta = \frac{\varepsilon}{27\alpha^2} \quad \text{et } \gamma = \frac{\varepsilon}{(1 - 9\beta)\alpha} \quad \text{obtinemus}$$

$$Vp = \frac{\alpha(1 + \gamma + 21\beta)}{1 + 9\beta} \quad (D)$$

et haec est quae sita expressio pro Vp . Si vellemus hanc
expressionem minus accurate, sed commodiorem pro appli-
catione, possumus ponere $\cos w = \cos 2w = 1$ et obtinendam
expressionem in seriem evaluere, quae progreditur secundum
potentias quantitatis h , per quas habebimus

$$p = p'(1 - \frac{2}{3}h^2 + \frac{2}{3}\frac{h^2 Vrr'}{p'}) \quad (II)$$

$$\text{ubi } Vp' = \frac{2hrr'}{r + r'} \text{ est.}$$

Si evolvi has eadem in 1) datus valor pro Vp in seriem, que se-
cundum potentias quantitates $\sin 2h$, progreditur et ponitur
 $Vp'' = \frac{rr' \sin 2h}{\mu t}$, erit $Vp = (1 + \frac{\sin^2 2h}{6 p''} Vrr') Vp''$ (III)
vel brevius $p = p'' + \frac{1}{2} \sin^2 2h Vrr'$ (IV)

Ambe precedentes determinaciones elementorum autem pro,
supponunt tantum approximativam cognitionem quantitationem
 S , S'' vel rr' , $v''v$, et alia vidimus, non suppediant medium
hanc approximationem veritati appropinquandi. Ambe so-
lutiones sunt praetera fundatae supra secundam aequationem
(III) nimirum sequa $\alpha S'' = - B'D' + B'D' f'' + B'' f''$ at suppo-
situm est in prima approximatione $f'' = S''$ et $f'' = S''$

Si autem consideramus f , f' , f'' qua quantitates primi or-
dinis, quantitas α autem est saltem tertii ordinis, hinc
sub priori suppositione pro f'' et f'' ex precedenti
aequatione valor quantitates S nunquam accurate determi-
nari potest, quoniam error ~~secundi~~ ordinis qui est commissus in
 f'' et f'' in valore pro S'' jam errorem ordinis terti productit.

Si autem hunc aequationem damus formam quam assumeri-
mus 5.) nimirum $\alpha S'' = - B'D' + B'D' f'' + B'D' f''$ (f + f''), ostendi-
potest, valorem fractionis $\frac{B'D' f'' + B'D' f''}{f'' + f''}$, qui ex non penitus
accurata suppositione $f'' = S''$ et $f'' = S''$ habetur, tantum errorem quan-
ti ordinis, imo, si tempora S et S'' aequalia sunt, tantum
errorem quinti ordinis habebitum esse, ex quo sequitur,
prius adductam incertitudinem in S'' non provenire ex eo,
quod possumus est $f'' = \frac{S''}{2}$, sed ex eo praeterea quoque quanti-
tates f' et S' sibi proportionales assumas esse, nam per hanc ul-
timam propositionem pro f'' minus accuratus valor $\frac{S'' + S''}{2} = S''$
introducitur est, a quo verus valor aliqua quantitate secundi ordi-
nis differt. Nimirum erat

$$f - f' + f'' = \frac{4rr'r'' \sin h \sin h' \sin h''}{\mu t}$$

si haec expressio dividitur per f' et notatur, esse

$$f = rr' \sin 2h = 2rr' \sin h \cos h$$

et eadem ratione $f' = 2rr' \sin h' \cos h'$, $f'' = 2rr' \sin h'' \cos h''$, erit

$$\frac{A+f''}{f''} = 1 + \frac{A f''}{2 p. r r' r'' \cos h \cos h' \cos h''}$$

$$= 1 + \frac{\mu r d A''}{2 y y'' r r' r'' \cos h \cos h' \cos h''}$$

habuimus nimirum $V_p = \frac{y''}{y'}$, $V_p = \frac{y''}{y'}$ ubi y est ratio pc.
loris ad triangulum.

Quum nulli cosinus angulorum h, h', h'' uti et quantitates y, y''
ab unitate tantummodo quantitatibus secundum ordinis differunt,
committitur error, si pro $\frac{A+f''}{f''}$ approximatus ualor

$1 + \frac{\mu r d A''}{2 y y'' r r' r''}$ assumitur, quartum ordinis, et si igitur
tunc procedens aequatio ita assumitur:

$$\alpha D'' = -B'D' + \frac{B'D' + B'D''}{D''} \left(1 + \frac{\mu r d A''}{2 y y'' r r' r''}\right)$$

pro D'' sequitur error, qui tantummodo est secundum ordinis si
intervalla temporum D, D'' fere aequalia sunt, et facile vide-
mus, hunc errorum quoque non notabiliter augeri, si in ultima
aequatione D'' pro D, D'' posueris, ex quo etiam videmus, formam
quam obtinuit nostra aequatio, procedentibus, nimirum

$$\alpha D'' = -B'D' + \frac{B'D' + B'D''}{1+B} \left(1 + \frac{2}{D''^2}\right), \text{ ad determinationem}$$

quantitatis D'' si admodum abiciamus.

2) Si ponimus nimirum, uti ibi, $P = \frac{A''}{f''}$ et $Q = 2D'' \left(\frac{A''}{f''} - 2\right)$
erit adducta aequatio $\alpha D'' = -B'D' + \frac{B'D' + B'D''}{1+B} (C + \frac{Q}{D''^2})$ et habebit

$$\text{nam pro veris valoribus quantitatuum } B \text{ et } Q$$

$$P = \frac{y''}{y'} + Q = \frac{\mu r d A''}{2 y y'' r r' r'' \cos h \cos h' \cos h''} \quad (I)$$

in quibus in prima approximatione ponere possumus

$$P = \frac{y''}{y'}, \text{ et } Q = \mu r d A'' \quad (II)$$

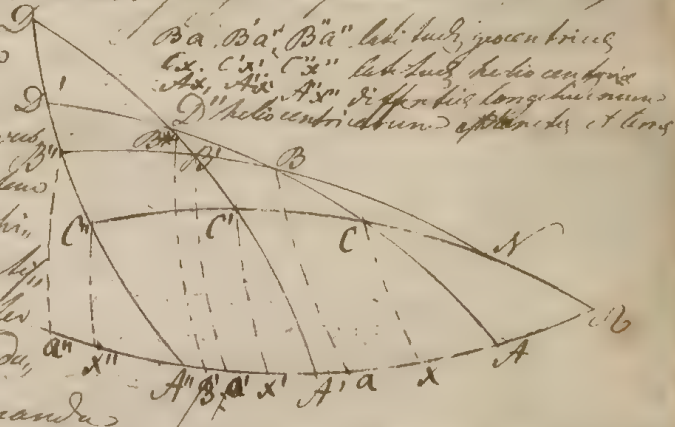
et per hanc suppositionem procedamus, procedentibus in valore pro
 D'' ergo etiam in illo pro D et D'' tantummodo errores secundum
ordinis committentur, si tempora D et D'' fere aequalia fuerint.

Si nunc cum his approximatis valoribus pro B et Q in (I) ali-
qua ratione quantitates $r r' r''$ et $h h' h''$ obtineamus, possumus de
in quantitatibus y, y'' invenire secundum priora, quibus unum
terminum approximatos valores pro B, Q qui huiusmodi cor-
rectus valores pro y et y'' et sic porro, donec novi valores harum
quantitatum non amplius differant ab immediate procedentibus.

Præcedentia sufficiunt ad delineandam viam, quam eligit
 Quæstus in suo proclaro orare ad resolutionem huius pro-
 blematis; re sat adhuc hanc methodum omnibus cum arum
 planities indicandi.

Ego hic fere omnia eisdem verbis uti a te. Quæstus asperam. 1. 1147

Disquisitiones præcedentes cum ai. Genens
 attet sunt, ut principia quibus methodus
 nobis innititur, veritas, quæ quasi novæ
 eo citius perficiatur. Hæc huius Epistola autem
 methodum in forma prorsus distincta exhibet
 debet, quam post applicationis frequentis
 finis, tanquam commodissimum in his
 plures alias a nobis sententias commendat,
 re posuimus. Quum in determinanda



Orbita incognita a tribus observationibus totum negotium sem-
 per ad aliquot hypothèses, aut potius successivas approxi-
 mationes reducatur, pro sacro initio habendum erit, si cal-
 culum ita ad ornare succerit, ut jam ab initio observatio-
 nes rationis quam plurimas, quæ non a B et Q sed una a
 combinatione quantitatuum cognitarum pendeat, ab ipsis hypo-
 thesibus separare liceat. Tunc manifeste has operationes
 præliminares singulis hypothësis communis, semel tantum
 requi oportet, hypothëses ipsæ ad operationes quam præcisi-
 mas reducuntur. Perinde maximi momenti erit, si in sin-
 gulis hypothësis huiusmodi ad ipsa elementa magis hanc opus
 fuerit, horum computum usque ad hypothësin posteriorem referre
 re liceat. Utroque respectu methodus nostra quam exponere jam
 aggredimur, nihil in prædicandum relinquere videtur.

Ante omnia tres locos heliocentricos terre in sphaera celestis
 A, A', A'' cum tribus locis geocentricis respondentibus corporis es-
 tæ B, B', B'' per circulos maximos iungere, atque hinc posito
 nam horum circulorum maximorum respectu eclipsium
 (si quidem eclipsium pro plano fundamentali adoptamus)

cum situm, quoniam locum B, B', B'' in ipso computare oportet.
 Sint $\alpha, \alpha', \alpha''$ tres corporis celestis ~~longitudines~~ longitudines in quo con-
 sider. β, β', β'' latitudines, $\lambda, \lambda', \lambda''$ longitudines heliocentricas
 (Chabert II. V. p. 168) ~~per~~ $\alpha, \alpha', \alpha''$ latitudines β, β', β'' $\alpha = 0$. Sint porro $\gamma, \gamma', \gamma''$ virgulae
 Delambre II. V. 561 ~~quod~~ $\alpha, \alpha', \alpha''$ respectu ad B, B', B'' quatuor in-
 clinationes ad eclipticam, quam inclinationem ut in ipso α de-
 terminatione normam fixam sequamur, per pedes $\alpha, \alpha', \alpha''$ α α' α''
 α partes mensurabimus, quae a punctis A, A', A'' α α' α''
 cum signorum sita est, ita ut ipsorum magnitudo, a 0 usque ad 90°
 numeretur, siue quae eadem sit in parte boreali a 0 usque ad 90°
 in australi a 0 usque ad -90° . Arcus $\alpha, \alpha', \alpha''$ quos semper
 intra 0 et 180° statuere licet, & signantes per $\alpha, \alpha', \alpha''$ α α' α''
 terminationem ipsorum $\gamma, \gamma', \gamma''$ habemus formulas

$$1) \quad \cos \gamma = \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha - 1)} \quad \cos \gamma' = \frac{\cos \beta'}{\sin(\alpha' - 1)}$$

quibus si placet ad calculi confirmationem adici possunt sequen-
 tes, $\sin \gamma = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$, $\cos \gamma = \cos \beta \cos(\alpha - 1)$

Pro determinatione $\gamma, \gamma', \gamma''$ manifeste formulae proprias analogae
 habentur. Quasi si fuerit $\beta = 0$, $\alpha = 0$ vel 180° i.e. si cor-
 pus celeste fuerit in oppositione vel conjunctione atque in ecliptica
 fuerit, γ fuerit indeterminata: et hypocoenitium hunc casum
 in nulla trium observationum locum habere.

In loco eclipticae aquales tanquam planum fundamentale
 adoptatum est, ad positionem trium circulorum maximo-
 rum respectu aquatoris determinandam, praeter inclina-
 tionem super requiritur rectascensionis intersectionum cum
 Aquatore: nec non praeter distantias punctorum B, B', B''
 ab his intersectionibus, etiam distantias punctorum A, A', A''
 ab eisdem computare oportebit.

2) Negotium huiusmodi erit determinatio sitae relative illorum tri-
 um circulorum maximorum inter se, qui pendebit a sita inter-
 sectionum, mutamur et ab inclinationibus. Quis si absq. ambi-
 guitate ad notationes claras ac generales reducere cupimus, ita ut
 non opus sit, pro singulis casibus diversis ad figuras peculiares
 recurrere, quasdam relationes preliminares praemittere

oportebat. Primo scilicet in quibus circulo maximo duas direc-
 tiones oppositas aliquo modo distinguendas sunt, quod fiet dum
 alteram tanquam progressivam, seu positivam, alteram
 tanquam retrogradam seu negativam consideramus. Quod cum
~~per se~~ per se propositum arbitrarium esset, ut normam cer-
 tam habuerimus, semper directiones ab A, A', A'' versus B, B', B''
 esse positivas considerabimus; ita e.g. si interseccio circuli
 primi cum secundo per distansiam positivam a puncto A
 exhibetur, haec capienda, ubi intelligatur ab A versus B
 (ut A'' in figura notata); si vero negativam esset ipsam ab al-
 tera parte ipsius A sumere oporteret. Secundum vero etiam
 duo hemisphaeria in quos omnis circulus maximus sphaeram
 integram dividit, denominationibus idoneis distinguenda sunt:
 et quidam hemisphaerium superius, vocabimus, quod in se ipsi in
 inferiori sphaere circulum maximum directioni progressivam
 permeanti ad dextram est, alterum inferius. Illud itaque
 superius analogum erit hemisphaerio boreali respectu eclipti-
 cae vel aequatoris, inferius australi.
 His rite intellectis, ambas duorum circulorum maximorum
 intersectiones, commodè ab invicem distinguere licebit: in una
 scilicet unum primus et secundae regionis inferiori in superioram
 tendit, vel quod idem est secundus et primae regionis superioris
 in inferioram; in altera intersectione oppositum habent.
 Per se quidem propositum arbitrarium est, quoniam intersec-
 tiones in problemate nostro eligere velimus; sed ut hi quoque
 iuxta normam invariabilem procedamus, eas semper adopta-
 bimus, (D, D', D'' inferius) ubi respective unum in secundo in pri-
 mi AB , secundus in primi plagam superiorem transit. Itaque ha-
 rum intersectionum determinabitur per ipsarum distantias
 a punctis A' et A'' , A et A' , A et A'' quae simplices per $A'D, A'D',$
 $A'D'', A'D', A'D'', A'D''$ designabimus. Quibus ita factis cir-
 culorum inclinationes mutuae erunt anguli, qui respective in

$$\begin{aligned} A'D'A'' &= \varepsilon \\ A'D'A' &= \varepsilon' \\ A'D'A'' &= \varepsilon'' \end{aligned}$$

in his intersectionibus punctis D, D', D'' in des. circulo se fecerunt; transpartes eas continentur quae in directione progressiva jacent; has inclinationis semper inter 0 et 180 accipientes, per $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ denotabimus. Determinatio harum novarum quantitatuum in eo, quod tenemus e cognitis manifeste dependet a resolutione trianguli A'D'A'', est nimirum:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} (A'D + A''D) &= \sin \frac{1}{2} (l'' - l') \sin \frac{1}{2} (y'' + y') \\ \sin \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} (A'D + A''D) &= \cos \frac{1}{2} (l'' - l') \sin \frac{1}{2} (y'' - y') \\ \cos \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} (A'D - A''D) &= \sin \frac{1}{2} (l'' - l') \cos \frac{1}{2} (y'' + y') \\ \cos \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} (A'D - A''D) &= \cos \frac{1}{2} (l'' - l') \cos \frac{1}{2} (y'' - y') \end{aligned}$$

Ex primis duabus aequationibus in nos se habent $\frac{1}{2} (A'D + A''D)$ et $\sin \frac{1}{2} \varepsilon$, et duabus ultimis $\frac{1}{2} (A'D - A''D)$ et $\cos \frac{1}{2} \varepsilon$, hinc A'D, A''D et ε . Ambiguitas determinationi arcuum $\frac{1}{2} (A'D + A''D)$, $\frac{1}{2} (A'D - A''D)$ per tangentes adhaerens conditione ea decidetur, quod $\sin \frac{1}{2} \varepsilon$ et $\cos \frac{1}{2} \varepsilon$ per se haberi evadere debent, consensusque inter $\sin \frac{1}{2} \varepsilon$ et $\cos \frac{1}{2} \varepsilon$ totum calculum confirmandi in servit.

Determinatio quantitatuum A'D, A''D, ε et A'D, A''D, ε'' propriis simili modo perfectus, neque opus erit ceteras aequationes ad numerum calculum addendas, sed transcribere quippe quae ex prioribus aequationibus sponte procedunt si

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A'D & A''D & \varepsilon & l'' - l' & y'' + y' & y'' - y' \\ \hline \text{aut} & A'D & A''D & \varepsilon' & l'' - l' & y'' + y' \\ \hline \text{aut} & A'D & A''D & \varepsilon'' & l'' - l' & y'' - y' \end{array}$$

repressive commutantur.

Novae adhuc totius calculi confirmatio derivari potest a relatione inter latus angulos trianguli sphaerici inter puncta D, D', D'' formati, unde demanant aequationes generalissime verae, quoniam punctum, haec puncta habent:

$$\frac{\sin(A'D - A''D)}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin(A'D - A''D)}{\sin \varepsilon'} = \frac{\sin(A'D - A''D)}{\sin \varepsilon''}$$

Quia si latus eclipticae aequales tangunt planum fundamentale elatus est, calculus mutationem non subit, nisi quod pro terra locis heliocentricis A, A', A'' substituere oportet ea aequatoris puncta, ubi a visibilibus AB, A'B', A''B'' fecerunt; accipientes puncta illa pro A, A', A'' aponere rectis harum intersectionum, nec non pro A'D distantia puncti D ab intersectione secunda, et

3.) Negandum tertium jam in eo consistit, ut duo loci geocentri, in extremis corporis celestis i. e. puncta B, B'' per arcum maximum junctantur, tangens interfectio cum circulo maximo $A'B'$ determinetur. Si $A'B''$ haec interfectio, ubi $S''\sigma$ per distantiā a puncto A' nunc non α^* ejus longitudo, β^* latitudo. Habemus itaq. proprietate quod B, B', B'' in eodem circulo maximo jacent, aequatione satis notata

$$0 = \lg \beta \sin(\alpha'' - \alpha^*) - \lg \beta^* \sin(\alpha'' - \alpha) + \lg \beta'' \sin(\alpha^* - \alpha)$$

et nimirum α est inclinatio arcus $B'B''$ versus eclipticam et y arcus eclipticae qui inter hunc (prolongatum) circulum et perpendicularium a B ad eclipticam contentus est, erit:

$$\lg \alpha = \frac{\lg \beta}{\sin y} = \frac{\lg \beta^*}{\sin(y + \lambda^* - \lambda)} = \frac{\lg \beta''}{\sin(y + \lambda'' - \lambda)} \text{ et}$$

eliminando ex his aequationibus, obliquitatem producentis expressio.

Si in hac expressione pro $\lg \beta^*$ substituamus $\lg \beta^* = \lg y' \sin(\lambda^* - \lambda)$

$$\text{erit } 0 = \begin{cases} \cos(\alpha^* - \lambda') \{ \lg \beta \sin(\alpha'' - \lambda') - \lg \beta'' \sin(\alpha - \lambda') \} \\ - \sin(\alpha^* - \lambda') \{ \lg \beta \cos(\alpha'' - \lambda') + \lg y' \sin(\alpha'' - \alpha) - \lg \beta'' \cos(\alpha - \lambda') \} \end{cases}$$

Quare quoniam fit $\lg(\alpha^* - \lambda') = \cos y' \lg(S''\sigma)$, habebimus

$$\lg(S''\sigma) = \frac{\lg \beta \sin(\alpha'' - \lambda') - \lg \beta'' \sin(\alpha - \lambda')}{\cos y' \{ \lg \beta \cos(\alpha'' - \lambda') - \lg \beta'' \cos(\alpha - \lambda') + \sin y' \sin(\alpha'' - \alpha) \}}$$

$$\text{statuatur } \begin{aligned} \lg \beta \sin(\alpha'' - \lambda') - \lg \beta'' \sin(\alpha - \lambda') &= S \\ \lg \beta \cos(\alpha'' - \lambda') - \lg \beta'' \cos(\alpha - \lambda') &= T \sin t \\ \sin(\alpha'' - \alpha) &= T \cos t \end{aligned}$$

$$\text{eritq. } \lg(S''\sigma) = \frac{S}{T \sin(t + y)}$$

Ambiguitas in determinatione arcus $S''\sigma$ per tangendum inde oritur, quod arcus maximi $A'B', B'B''$ in duobus punctis se intersectant, nos pro B' semper adoptabimus in intersectionem puncto B' proxi, mandata ut σ semper cadat inter limites -90° et 90° unde ambiguitas illa tollitur. Plurimum hunc valor arcus σ (qui pendit a cur., natura motus geocentrici) quantitas satis modica erit, et quidem

generaliter loquendo, secundum ordinem si temporum intervalla tanquam quantitates primi ordinis spectantur.

Quoniam modo si actiones calculi applicandas sunt, si pro elliptica aequales tanquam planam fundametalis electus est, sponte patet. —

Aliud manifestum est, scilicet puncti B^* inter terminos aequales, nec, si circuli BB^* , AB^* omnino coinciderent. Hunc casum, ubi quatuor puncta A, B, B', B'' in eodem circulo maximo pacerent, a disquisitione nostra excludimus. Conveniet autem in eligendis observationibus cum quoque casum evitare, ubi situs horum quatuor punctorum a circulo maximo parum distat: tunc enim situs puncti B^* , qui in operationibus sequentibus magni momenti est, per levissimos observationum errores nimis afficitur, nec precisione necessaria determinari potest. Porinde punctum B^* indeterminatum manere potest, sive quoque puncta B, B' in unum coinciderent, in quo casu ipsius circuli BB^* positio indeterminata fieret, sive etiam quodlibet sibi appropinquavit, sed de hoc casu non loquimur, quum methodus nostra ad observationes tantum intervallum complentibus non sint extensiva. —

1.) Sint in sphaera celesti C, C', C'' tria corpora celestia, tam solis, quam stellae, quae respective in circulis maximis, $AB, A'B', A''B'$ sitae sunt et quidem inter A et B, A' et B', A'' et B' sitae erant. praeter puncta C, C', C'' in eodem circulo maximo pacerent, puta in eo, quum planius orbites in sphaera celesti projicerent. Designabimus per r, r', r'' tria corpora celestia distantias a Sole, per s, s', s'' eundem distantias a terra, per R, R', R'' vel D, D', D'' terras distantias a Sole. —

(*) Differentias Porro statuimus, arcus (*) CC', CC'', CC' respective = $2f, 2f', 2f''$ adque longitudo helio, diffinitio rectilinea triangula $rr' \sin 2f = r, rr' \sin 2f' = r', rr' \sin 2f'' = r''$ recte in recta.

Haec enim ita $f = f' + f'', A + CB = d, AC + CB' = d', AC' + CB'' = d''$

$$\text{non } \frac{\sin d}{r} = \frac{\sin AC}{s} = \frac{\sin CB}{R}, \frac{\sin d'}{r'} = \frac{\sin AC'}{s'} = \frac{\sin CB'}{R'}$$

$$\frac{\sin d''}{r''} = \frac{\sin AC''}{s''} = \frac{\sin CB''}{R''} \text{ Hinc patet simulac situs punctorum}$$

C, C', C'' invenerit, quantitates r, r', r'', s, s', s'' determinabiles fore. —

5) Ostendendum adhuc est, quomodo hic situs punctorum C, C', C''

et quantitates libris $n'' = 6, 2(\frac{n+n''}{m} - 1)r^2 = 2$ et si posuit, si haec puncta n, n', n'' sunt nostra priora f, f', f'' sita sita secundum priora, qua nota supponuntur.

Si autem maximis $B''B^*B$ et CC' se intersectant in puncto N , erit

$$NC'' \cdot NC' = 2f, NC'' \cdot NC = 2f', NC' \cdot NC = 2f'' \text{ et hinc}$$

$$0 = \sin 2f \sin NC' - \sin 2f' \sin NC'' + \sin 2f'' \sin NC$$

sint nunc C, C', C'' perpendicularis distantis punctorum C, C', C''

a circulo $B''B^*B$ et eadem ratione d, d', d'' distantis punctorum

D, D', D'' ab eodem circulo $B''B^*B$. Quomodo $\sin C, \sin C', \sin C''$ resp.

tres proportionales sint $\sin NC, \sin NC', \sin NC''$ habebimus

$$0 = \sin 2f + \sin C - \sin 2f' \sin C' + \sin 2f'' \sin C'' \text{ vel per } n, n', n'' \text{ mul.}$$

$$\text{multiplicando} \quad 0 = nr \sin C - Nr' \sin C' + n''r'' \sin C''$$

Porro patet, esse $\sin C$ ad $\sin d$, ut finis distantis puncti

C a B ad distantiam puncti D a B , utrag distantia ipsarum

eandem directionem mensurata. Habetur itaq.

$$\sin C = \frac{\sin d \sin CB}{\sin(A'D - S)} \quad \sin C' = \frac{\sin d \sin C'B^*}{\sin(A'D - S + \sigma)}$$

$$\sin C'' = \frac{\sin d \sin C''B''}{\sin(A'D - S''')} = \frac{\sin d \sin C''B''}{\sin(A'D - S''')}$$

Dividendo itaq. aequationem priorem $0 = nr \sin C$ etc.

per $r'' \sin C''$, et substituendo precedentiibus valores pro $\sin C$ etc.

$$\text{erit} \quad 0 = n \cdot r \sin CB \cdot \frac{\sin(A'D - S''')}{\sin(A'D - S)} - n' \cdot r' \sin C'B^* \cdot \frac{\sin(A'D - S''')}{\sin(A'D - S + \sigma)} + n''$$

Quod si hic arcum $C'B''$ per α designamus, pro r, r', r'' valores suos substituimus, brevitate causa nominamus

$$\frac{r \sin C \sin(A'D - S''')}{n \sin C'' \sin(A'D - S)} = a, \quad \frac{r' \sin C' \sin(A'D - S''')}{n' \sin C'' \sin(A'D - S + \sigma)} = b$$

aequatio nostra ita se habebit

$$0 = an - bn' \cdot \frac{\sin(2 - \sigma) + n''}{\sin 2}$$

Coefficientem b etiam per formulam sequentem computare licet, quae ex aequationibus modo allatis facile deducitur:

$$a \cdot \frac{r \sin C \sin(A'D - S''')}{r' \sin C' \sin(A'D - S + \sigma)} = b$$

Calculi confirmandi causa haec inutile erit, utrag formula ubi. Quoties $\sin(A'D - S + \sigma)$ maior est quam $(A'D - S + \sigma)$, formula

propter a tabularum erroribus inevitabilibus minus afflicta,
quam prior, adeoque hanc preferenda erit, si forte parvula discrepantia
illinc explicanda in valoribus ipsius b se prodiderit, contra formulas
priori magis fidendum erit quoties $\sin(A'D - S + \sigma)$ minor est quam
 $\sin(A'D - S + \sigma)$, si magis placeat, medium id necesse inter ambos valores
adoptabimus.

Ex nostra aequatione $0 = an - et$ et ex $B = \frac{\pi''}{n}$ sequitur

$$(n+n'') \frac{B+a}{B+1} = bn' \frac{\sin(x-\sigma)}{\sin x}; \text{ hinc vero et ex}$$

$$L = 2\left(\frac{n+n''}{n'} - 1\right) r^3 \text{ atque } r' = \frac{R' \sin \sigma''}{\sin R_0} \text{ eliditur}$$

$$\sin x + \frac{2L \sin^4 x}{2R'^3 \sin^3 \sigma''} = b \frac{B+1}{B+a} \sin(x-\sigma) \text{ sive}$$

$$\frac{2L \sin^4 x}{2R'^3 \sin^3 \sigma''} = \left(b \frac{B+1}{B+a} - \cos \sigma\right) \sin(x-\sigma) - \sin \sigma \cos(x-\sigma).$$

Statuenda itaque brevitatis causa $\frac{1}{2R'^3 \sin^3 \sigma''} = c$ introducenda
angulum auxilii ω statem ut fiat $\sin \omega = \frac{\sin \sigma}{b \frac{B+1}{B+a} - \cos \sigma}$
In hac aequatione $c \sin \omega \sin^4 x = \sin(x-\omega-\sigma)$ ex qua imaginem
 x erueri oportebit. (Hanc aequationem prius jam solvia ana-
lytica obtinimus).

Ut angulus ω commodius computetur formulam precedentem
pro $\sin \omega$ ita exhibere convenit. $\sin \omega = \frac{(B+a) \sin \sigma}{B(\cos \sigma - 1) + (\cos \sigma - a)}$

$$\text{Quamobrem statuendo } \frac{\cos \sigma - a}{\cos \sigma - 1} = d, \quad \frac{\sin \sigma}{\cos \sigma - 1} = e \text{ habebit}$$

mas ad determinandum ω formulam simplicissimam

$$\sin \omega = \frac{e(B+a)}{B+d}$$

Computum quantitatum a, b, c, d, e a solis quantitatibus datis pen-
dendum, tanquam negotium quartum consideramus. Quantitates
 b, c, e ipsae non erunt necessariae verum soli ipsarum logarithmis.
Si datus casus specialis, ubi haec praeccepta aliqua mutatione
indigent. Quod si scilicet in oculis maximus $B B'$ cum $B B'$ coeunt,
et, adeoque puncta B, B' respective cum D, D' , quantitates a, b valo-
re infinitos nanciscerentur. Statuendo in hoc casu

$$\frac{R' \sin \sin(A' D'' - S' \delta)}{R' \sin \delta \sin(A' D'' - S')} = \pi$$

habebimus loco aequationis ($0 = an - bn' \sin z \dots$) hanc ce

$$0 = \pi n - \frac{n' \sin(z - \delta)}{\sin z}, \text{ unde, faciendo } \frac{\pi \sin \delta}{\pi + (1 - \pi \cos \delta)}, \quad (A)$$

eadem aequatio ($c \sin \omega \sin^2 z = d$) eliciatur.

Perinde in casu speciali, ubi $\delta = 0$, fit c infinita atq. $\omega = 0$, unde factor $c \sin \omega$ in aequatione $c \sin \omega \sin^2 z = \dots$ determinatus esse videtur: nihilominus revera determinatus est, i. e. perque valor = $\frac{b+a}{2R' \sin^2 \delta (b-1)(b+d)}$ uti levis attentio docebit. In hoc itaq.

$$\text{casu fit } \sin z = \frac{R' \sin \delta \sqrt{2(b-1)(b+d)}}{2(b+a)}$$

Aequatio $c \sin \omega \dots$, quae evoluta ad ordinem octavum affertur, daret, in forma sua non mutata expressibilissime solvitur.

Ceterum e theoria aequationum facile ostendi potest, (quod tamen

perius evolvere brevitatis causa hic superfluum est), hanc aequationem, vel duas vel quatuor solutiones per valores reales admittere.

In casu priori valor alter ipsius $\sin z$ positivus erit, alterum negativum, rejicere oportebit, quia per problematis naturam

negativus evadere nequit. In casu posteriori unus valor ipsius $\sin z$ vel unus positivus erit, tres reliqui negativi.

ubi videtur, non ambiguum erit quemnam adnotare oporteat: ut

tres positivi cum uno negativo; in hoc casu e valoribus positi

videtur ii quoque si qui adnotari debent, ubi major evadit quam 0, quoniam per aliam problematis conditionem essentialem.

Quoties observationis modo erit huius temporum intervallis ab invicem distant, plerumque casus posteriori locum habebit, ut

tres valores positivi ipsius $\sin z$ aequationi satisficiant.

Inter has solutiones praeter veram reperiri solet aliqua ab z parum differt a 0, modo excessu, modo defectu hoc

phenomenon sequenti modo ex aliis induci so. Problematis
 nostri tractatio analytica ei soli conditioni pignori structa est
 quae tres corporis celestis in spatio soli iacere debeat in
 rectis, quarum unus per totum absolutum terrae, resolutionem
 observatam determinatur. Jam per ipsius rei naturam
 loci illi iacere quidam debent in iis rectarum partibus, unde
 tunc ad terram descendit: sed aequationes analyticae
 hanc restrictionem non agnoscunt, omniaq. locorum
 systemata, qui quidam cum Kepleri huius consentiunt,
 perinde compleri debent, sive ab hac terrae parte in illis
 rectis iaceant, sive ab illa, sive deniq. cum ipsa terra
 coincident. Jam hic ultimus casus utiq. problemati
 nostro satis faciat, cum terra ipsa ad normam illarum
 legum moveatur. Accipiet, aequationes comprehendere
 debere solutionem, in qua puncta C, C', C'' cum punctis
 A, A', A'' coincident: quatenus varia locos innumeras
 locis terrae ellipticis a perturbationibus et parallaxi in-
 ductas negligimus. Aequatio itaq. (c. 2. §. 1.) semper
 (admittere debet solutionem $Z = S$ si pro B, D valores
 veri locis terrae respondentibus accipiantur. Quatenus autem
 illis quantitatibus valores tribuentur ab his non nul-
 tum discrepantes (quod semper supponere licet, quodis
 temporum intervalla modica sunt), inter solutiones huius
 aequationis necessario aliqua reperiri debet quae proxime
 ad valorem $Z = S$ accedit. Plerumq. quidem in eo casu, ubi
 hoc aequatio solutiones per valores proprios ipsius S et
 admittit, tertia ex his (propter veram causam, de qua modo
 diximus) valorem ipsius Z maiorem quam S sistat, adeoq.
 analytice tantum possibilis, physice vero impossibilis erit:
 tunc itaq. quamnam adoptare oporteat ambiguum esse nequit.
 Attamen attingere utiq. potest, ut aequatio illas duas possi-
 bilis solutiones dicendas de se se admittat, adeoq. problemati

nostro per duas orbitas proprias diversas satis facere licet.
 Ceterum in tali casu orbita vera a falsa facile distinguetur,
 quae primunt observationes aliae magis remotas ac
 examen revocare licuerit.

G) Simulac circulus et eructus est, statim habetur r' per
 aequationem $r' = \frac{R \sin \alpha}{\sin \alpha'}$. Porro ex aequationibus

$b = \frac{n''}{n}$ atque $0 = a n - b n'$ ita eliciamus

$$\frac{n' r'}{n} = \frac{(b+a) R \sin \alpha''}{b \sin(\alpha - \alpha')} \text{ et } \frac{n' r'}{n''} = \frac{1}{b} \cdot \frac{n' r'}{n}$$

Item ut formulas, secundum quas situs punctorum C, C''
 et puncti C' determinandus est, tali modo tractemus,
 ut in eorum veritas generalis pro iis quos capitis, quos
 nostra figura non monstrat, statim eluceat, observamus
 sinum distantis puncti C' a circulo maximo CB (propositi
 live puncti in regione superiori, negative in inferiori)
 aequalum fieri producto ex $\sin \epsilon''$ in sinum distantis
 ~~C' a D''~~ puncti C' a D'' secundum directionem progressi
 fixam mensuratus, atque aequale $-\sin \epsilon'' \sin C'D'' =$
 $= -\sin \epsilon'' \sin(\alpha - AD'' - \delta'')$, perinde fit, sinus distantis
 puncti C'' ab eodem circulo maximo $= -\sin \epsilon'' \sin C'D'$. Ma,
 in sepe autem, videmus finis sunt ut $\sin CC'$: $\sin CC''$ sine
 ut $\frac{n''}{n'}$ sine ut $\frac{n'' r'}{n' r'}$: $\frac{n' r'}{n' r'}$.

Statim itaque $C'D' = \xi$ habemus, si hi ambo finis
 per se dividuatur $r' \sin \xi = \frac{n' r'}{n''} \cdot \frac{\sin \epsilon''}{\sin \epsilon'} \sin(\alpha + AD' - \delta')$
 Propterea simili modo statuendo $CD = \xi$ eruitur

$$r \sin \xi = \frac{n r'}{n} \cdot \frac{\sin \epsilon''}{\sin \epsilon'} \sin(\alpha + AD' - \delta')$$

Præterea erat in m. H.)

$$r \sin CB = R \sin \delta'$$

$$r \sin C'D' = R \sin \delta'' \text{ seu}$$

$$CB = \xi - AD' + \delta'$$

$$C'D' = \xi - AD' + \delta'' \text{ sine}$$

$$r \sin(\xi - AD' + \delta') = R \sin \delta'$$

$$r' \sin(\xi - AD' + \delta'') = R \sin \delta''$$

244 7.) Ut ex his aequationibus in ξ et ξ'' sit

$$p = \frac{n'r'}{n} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} \cdot \sin(2 + A'D - S')$$

$$p'' = \frac{n''r''}{n''} \cdot \frac{\sin \varepsilon''}{\sin \varepsilon''} \cdot \sin(2 + A'D'' - S'')$$

$$b = A'D - S', \quad c = A'D \sin S', \quad b'' = A'D'' - S'', \quad c'' = A'D'' \sin S'', \quad \text{hinc}$$

$$\text{erit} \quad \lg \xi = \frac{p \sin b}{p \cos b - c}, \quad r = \frac{p}{\sin \xi}$$

$$\lg \xi'' = \frac{p'' \sin b''}{p'' \cos b'' - c''}, \quad r'' = \frac{p''}{\sin \xi''}$$

ubi ξ, ξ'' semper ita assumi debent, ut r, r'' sint positivi.

8.) Arcibus ξ, ξ'' inventis, punctorum C, C', C'' positio data erit, poteritq. distantia $CC'' = 2f''$ ex ξ, ξ'' et ε' determinari. Sint u, u'' inclinationes circulorum maximorum $AB, A'B''$ (ad circulum maximum CC'') quae in figura respective erunt anguli $C''CD'$ et $180^\circ - CC'D$ habebimus aequationes sequentes.

(Analogus)
(Neptun)

$$\sin f' \sin \frac{1}{2}(u'' + u) = \sin \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2}(\xi + \xi'')$$

$$\sin f' \cos \frac{1}{2}(u'' + u) = \cos \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2}(\xi - \xi'')$$

$$\cos f' \sin \frac{1}{2}(u'' - u) = \sin \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2}(\xi + \xi'')$$

$$\cos f' \cos \frac{1}{2}(u'' - u) = \cos \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2}(\xi - \xi'')$$

Duae priores dabant $\frac{1}{2}(u'' + u)$ et $\sin f'$, duae posteriores $\frac{1}{2}(u'' - u)$ et $\cos f'$. Angulos $\frac{1}{2}(u'' + u)$ et $\frac{1}{2}(u'' - u)$ qui in ultima demum hypothese ad determinandum situm plani orbis adhibebunt, hic, in hypothesebus primis negligere licebit.

Propter simili modo f ex $\varepsilon, C'D$ et $C''D$ non f'' ex $\varepsilon'', C'D'', C''D''$ derivari possunt, sed nullo commodius ad hunc finem formulae sequentes adhibentur

$$\sin 2f = r \sin 2f'' \frac{n}{n'r'}$$

$$\sin 2f'' = r'' \sin 2f'' \frac{n''}{n''r''}$$

ubi logarithmi quantitates $\frac{n}{n'r'}$ et $\frac{n''}{n''r''}$ jam ex calculis praecedentibus ad sunt. Totus deniq. calculus coarsionem novam inde nanciscetur, quod fieri debet $2f + 2f'' = 2f'$. Si qua forte differentia prodat, nullius momenti esse poterit.

si quidem omnes operationes quam accuratissime peractae fu-
erint. Interdum tamen, calculo septem decimalibus subducto,
ad aliquat. minas si sciendi partes decimas 2 purgare poterit,
quam si opera proctum videtur facillimo negotio in sex 24. 27.
ita de par. semper ut logarithmi sinuum aequatiter augerentur
vel diminuantur, quo pacto aequationi $p = \frac{r \sin \alpha}{r' \sin \alpha'} = n$
omni quam tabulae permittunt, prociptione satisfactum erit.
Quoties f et f'' parum differant, differentiam illam in sex
24 et 24'' aequaliter distribuisse sufficiet.

Pro computandis distant. liis planetes a terra S, S', S'' habe-
mus formulas

$$S = \frac{r \sin(A'D - \zeta)}{\sin(\zeta - A'D + \alpha)} = \frac{r \sin(A'D - \zeta)}{\sin \alpha}$$

$$S' = \frac{r' \sin(\alpha'' - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{r' \sin(\alpha'' - \alpha)}{\sin \alpha'}$$

$$S'' = \frac{r'' \sin(A''D' - \zeta'')}{\sin(\zeta'' - A''D' + \alpha'')} = \frac{r'' \sin(A''D' - \zeta'')}{\sin \alpha''}$$

Uterum si observationes ab initio statim per methodum
aliquam ab aberratione purgatae fuissent, necesse calculus
omittendus, neq. adeo necessarium foret, valores distantiarum

S, S', S'' oruere, nisi forte ad confirmandum, an in quibus
calculus aberrationum superstructus erat, satis exacti fuerint.

Deniq. sponte patet, totum istam calculum, tunc quoq. super-
mendum esse, quando aberrationem omnino negligere placeat.

9. Praemissis omnibus his preparatoris cunctis facile in pla-
na, elementa orbitae omni cum exactitudine, quam permittunt
observationes, quibus superstructus calculus, determinandi.
Ut totam operationem cunctis perficere possimus volumus
illam breviter hic indicare.

Primo querantur quantitates y, s ex n. 1. $\sin A'D, A''D, \varepsilon$ ex 2,

α ex 3 et a, b, c ex 5. Atque cum quantitatibus transimus nunc
ad primam hypothesein. Cum $B = \frac{r''}{r}$ et $Q = \mu^2 \frac{r''}{r}$ queritur quan-
titas e et z ex aequatione (A) data in fine n. 5.) $\sin r', \frac{n'r'}{n}$ et $\frac{n'r'}{n''}$ ex 6.)
et cum his ultimis factoribus invenitur p, p' et ζ, ζ', ζ'' ex 7.) et
 f, f', f'' ex n. 8.)

Si haec ratione innotuerint, pro quibus primis observationibus quantitas r, r', r'' et f'' quatuor secundum superius indicatum acquisitionem novi valor quantitas y'' seu η'' et eadem ratione pro ambabus ut, tunc observationibus ex r, r', r'' et f'' quantitas y seu η .
 Si noscimus ita η'' et η , correcti valores B et L sunt sequentes
 $B = \frac{r''}{r'} \cdot \frac{\eta''}{\eta}$, $L = \frac{r'' r'}{r'' r' \cos f'' \cos f'}$ et si hi valores a prius assumptis $B = \frac{r''}{r'}$ et $L = \mu r'$ adhuc multum differunt, queruntur in nova secunda hypothesis eundem his novis B, L , uti prius cum B et L iterum (w et L ex 5.), $r, \frac{r''}{r'}, \frac{r''}{r'}$ ex 6.), ζ, r, ζ, r'' ex 7.) et f, f', f'' ex 8.) et diu iterum ex r, r', r'' h' quantitas y'' et ex r, r', r'' h, quantitas η , per quod iterum novi, veritati ad, huc propiores valores pro B et L obtineantur, quibus cum, si adhuc ab immediate procedentibus notabiliter discrepant, tertia hypothesis calculari et generalius operatio eadem continuari potest, donec novi valores pro B, L a procedentibus non amplius differant. Sed fore semper, si intervalla r, r'' sunt magna et si praeterea sibi aequalia sunt, non necessaria erit tertia hypothesis, et saepe iam cum prima satis approximata resolute obtineantur.

10) In ultima demum hypothesis elementa ipsa calculabuntur secundum methodum superius allatam, vel ex $f, r'' r'$ vel ex f'', r, r' perducendo scilicet ad finem calculum alterutrum quem in hypothesis antecedentibus tantummodo usque ad η vel η'' prosequi oportuerat. Si utrumque perficere plauserit, haec nomina numerorum resultantium novem totius laboris confirmationem suppeditabit. Attamen praestat, quam priorem f, f', f'' erant, sunt, elementa et sola combinatione loci primi cum tertio derivare, puta ex f, r, r'' atq. temporis intervallo, tendens ad maiorem calculi cordi ludinem locum medium in orbita secundum elementa inventa determinare. Haec itaq. novae functionis conicae dimensiones immolesunt, puta exentricitas, semiaxis major sive semiparameter, positio perihelii respectu locorum heliocentricorum C, C', C'' , motus medius, atq. anomalia media pro epocha arbitraria, siquidem orbita elliptica est, vel tempus transitus per perihelium

si orbita est hyperbolica vel parabolica. Superest itaq. tantum,
modo, ut positis locorum helio centri communis in orbita respectu nodi
ascendens, positio hujus nodi respectu puncti aequinoctialis, et
inclinationis orbitae ad eclipticam, vel aequatoris determinemus.
Haec omnia per solutionem trianguli sphaerici $\triangle ADE$ puen-
t. Sit N longitudo nodi ascendens i inclinatione orbitae,
 g et g' argumenta latitudinis in prima et secunda observatione
dierum $A-N=h$, $E-N=h'$ erant nimirum in triangulo NAE
latera $AD=\xi$, g , h anguli his respective oppositi i, $180^\circ-\gamma$, u
Habemus itaq.

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (g+h) &= \sin \frac{1}{2} (AD-\xi) \sin \frac{1}{2} (\gamma+u) \\ \sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (g+h) &= \cos \frac{1}{2} (AD-\xi) \sin \frac{1}{2} (\gamma-u) \\ \cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (g-h) &= \sin \frac{1}{2} (AD-\xi) \cos \frac{1}{2} (\gamma+u) \\ \cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (g-h) &= \cos \frac{1}{2} (AD-\xi) \cos \frac{1}{2} (\gamma-u)\end{aligned}$$

Quae primae aequationes dabant $\frac{1}{2}(g+h)$ et $\sin \frac{1}{2} i$, duas reliquas
 $\frac{1}{2}(g-h)$ et $\cos \frac{1}{2} i$ ex g innotescit sitis perihelii respectu nodi
ascendens, et h sitis nodi in ecliptica, deniq. innotescet i
sine et cosine si mutue confirmationibus. $\triangle ADE$ eundem quoq.
puno per venire possumus accipiendo trianguli NAE ubi
autem tantummodo in formulis praecedentibus characteres g, h ,
 A, ξ , γ in $g', h', A', \xi', \gamma'$ mutare oportet. Ut toti labori adhuc
alia confirmatio concilietur, rursus abire erit, calculum utroq. modo
perficere: unde si quae sensu differunt intervallos ipsius i , et
alt. longitudinis perihelii in orbita praedant, valores multos adoptare con-
veniet. Raro tamen ita differentias ad 0.1 vel 0.2 ascendunt, quinque
omnes calculi septem figuris decimalibus accurate elaborati fuerunt.
Ceterum quoties loco ellipticae aequatoris tantum piamini, sive aequa-
toris adoptatus est, nulla hinc in calculo differentia oritur, nisi quod
loco punctorum A, A' intersectiones aequatoris cum ecliptica maximis
 $AB, A'B'$ accipiendae sunt.

Progrederemur jam ad illam rationem hujus methodi per aliquod exemplum.
Assumamus tres sequentes observationes. Vesper:

1804	Med. temp. Paris				
24 April.	9 ^h 5' 16.5	$A=124^\circ 7' 33.2$	$B=+11^\circ 8' 24.1$		
29 -	8 43 42.2	$A'=173 44. 21.3$	$B'=11 19 42.6$		
4 Maji	8 22 51.2	$A''=173 33 33.0$	$B''=11 0 39.2$		

$$\begin{aligned}
l &= 218^\circ 42' 55''.5 & l' &= 218^\circ 33' 22''.4 & l'' &= 223^\circ 23' 15''.5 \\
\log D &= 0.0028540 & \log D' &= 0.0034240 & \log D'' &= 0.0029670 \\
\text{ergo } J &= 4.9855208 \text{ dis} & J' &= 9.9705405 \text{ dis} & J'' &= 4.9850197 \text{ dis} \\
\log \alpha &= 5.3424727, & \log t &= 7.6214048, & \log A &= 7.6537430, & \log A'' &= 7.6808882 \\
\log B &= 7.9368504, & \log B' &= 7.9651452, & \log B'' &= 7.9887417, \\
\log C &= 7.6514234, & \log C' &= 7.6756959, & \log C'' &= 7.6956918 \\
\text{hinc } \log r &= 0.3477013, & \log r' &= 0.1399755, & \log r'' &= 0.1786885, & \log r''' &= 0.1506780 \\
&\text{Ex 1.) et 2.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= 162^\circ 6' 41''.45 & y' &= 164^\circ 7' 59''.97 & y'' &= 165^\circ 42' 49''.00 \\
S &= 240 59 23.20 & S' &= 45 55 46.59 & S'' &= 50 42 47.46 \\
AD &= 36 10 38.89, & AD' &= 40 50 35.57 & E &= 2 1 4.02 \\
AD' &= 32 4 18.47 & AD'' &= 41 22 17.47 & E' &= 4 28 41.94 \\
AD'' &= 32 30 18.17 & AD''' &= 37 8 17.87 & E'' &= 2 27 38.46 \\
\alpha 3.) & \sigma = 0 5 46.54 & \alpha^* &= 173 50 8.01 & \beta^* &= 11 18 35.33
\end{aligned}$$

$$\alpha 5.) \log a = 9.9469946, \log b = 9.9765739, \log c = 2.8941157$$

*Si omnes precedentes quantitates sunt invariabiles, quomodo non de-
pendeant a P et Q.*

1. Hypothesis $P = \frac{1}{2}''$, $Q = u^2 \sin^2 u''$, vel

$$\log P = 9.9999564, \log Q = 7.8665402$$

hinc $\alpha 5.) \omega = 17^\circ 46' 21''.51$ et aequatio (A)

$$\log (x - 77^\circ 52' 8''.05) = 1.7591789 \sin^2 x \text{ ex qua } x = 19^\circ 0' 6''.28$$

et $\alpha 6.) \log r = 0.3477619, \log \frac{r'}{r} = 0.6480249, \log \frac{r''}{r'} = 0.6480685$

$\alpha 7.) \xi = 8^\circ 18' 52''.69, \xi'' = 11^\circ 15' 27''.51$

$$\log r = 0.3480400, \log r'' = 0.3463668$$

$\alpha 8.) f' = 1^\circ 31' 7''.32, f = 0^\circ 45' 39''.28, f'' = 0^\circ 45' 28''.45$

$$u = 162^\circ 41' 45''.31, u'' = 163^\circ 16' 52''.51$$

*Differentia inter f' et $f + f''$ est $0''.43$. Nos igitur hic dispen-
sando hunc parvum otorem, assumimus*

$$f' = 1^\circ 31' 7''.32, f = 0^\circ 45' 39''.07, f'' = 0^\circ 45' 28''.25$$

*Cum hiisce valoribus pro r, r', r'' et f, f', f'' dat secundam et tertiam
observatio*

$$\log(\text{quant. auxil.}) = 0.0000443, \log m = 5.9233158, h' = 0.0001605713$$

$$\log n = 0.0000485, \alpha = 0.000039495, \xi = 0.000000000089$$

hinc est correctio $\log n = 0.0000485$ uti prius.

Prima et secunda observatio dant eandem rationem

$$l = 0.0000409, \log m = 5.9207179, h' = 0.0000999715, \log n = 0.0000482$$

hinc correcti valores pro B, L $\log B = 9.9999567$, $\log L = 7.8665894$
 ergo $x = \log B - \log B = 0.0000003$, $y = \log L - \log L = 0.0000492$

Cum his novis valoribus pro B, L calculatus mane.

2. Hypothesis in qua invenitur $\omega = 17^\circ 46' 21''.75$

$$\sin(\omega - 17^\circ 52' 8''.29) = 1.7593344 \sin \omega \dots \omega = 19^\circ 0' 7''.22$$

$$\log r = 0.3471561, \log \frac{r'}{r} = 0.6480192, \log \frac{r''}{r} = 0.6480625$$

$$\zeta = 8^\circ 18' 54''.54, \zeta'' = 11^\circ 15' 28''.51, \log r = 0.3480342, \log r' = 0.3463612$$

$$f' = 1^\circ 31' 7''.40, f'' = 0^\circ 45' 39''.32, f''' = 0^\circ 45' 28''.51$$

$$u = 16^\circ 41' 44''.69, u'' = 163^\circ 16' 57''.89$$

(Differentia inter f' et $f'' + f'''$ est iterum $0''.48$, ergo posuimus apud
 nos $f' = 1^\circ 31' 7''.40$, $f'' = 0^\circ 45' 39''.11$, $f''' = 0^\circ 45' 28''.29$

Cum hac dat. secunda et tertia observatio

$$l = 0.0000442, \log m = 5.9233319, h' = 0.0000057522, \log \eta = 0.0000855$$

ac prima et secunda

$$l = 0.0000439, \log m = 5.9267353, h' = 0.0000997255, \log \eta = 0.0000482$$

hinc novi correcti valores

$\log B = 9.9999567$, $\log L = 7.8665892$, et quoniam hi valores
 ab immediatis precedentibus fere non amplius divergant, non am-
 plius necessarius est computus novus, hinc. hypothesis. — Ergo

$$2f' = 1^\circ 31' 18''.22, 2f'' = 0^\circ 2' 14''.80, 2f''' = 1^\circ 30' 56''.58$$

$$\log r = 0.3480342, \log r' = 0.3471561, \log r'' = 0.3463612$$

$$\text{ex quibus } \log \zeta = 0.1363270, \log \zeta' = 0.2477860, \log \zeta'' = 0.2580862$$

$$\text{et } \log \text{ curvatae distantiae } 0.1245284, 0.1381612, 0.1500167$$

Ad invenienda elementa ex prima et tertia observatione statim

$$\log r = 0.3480342, \log r' = 0.3463612$$

$$\log v = 1^\circ 31' 7''.40, \log x = 9.9705405, \text{ hinc}$$

$$l = 0.0001266, \log m = 0.5243749, \log x = 6.1975011$$

$$e' - e = 1^\circ 26' 18''.66 \text{ hinc differentia excentricitatum aequalium}$$

$$\text{ergo } \log a = 0.3726628, \log p = 0.3689094, \varepsilon = 0.0926261$$

$$e' + e = 368^\circ 8' 24''.13, e = 366^\circ 42' 8''.47, e' = 369^\circ 31' 45''.79$$

$$v' + v = 363^\circ 52' 0''.23, v = 362^\circ 20' 52''.83, v = 365^\circ 23' 7''.63$$

ubi a, p ad semiaxis major, semiparameter excentricitatis et v, e, e'
 ad et excentrica anomalia est.

Hinc est etiam modus motus in tempore t

$$\frac{ut}{a^2} = 2(g - \varepsilon \sin \frac{e' + e}{2}) = 9768''.7232$$

et media anomalia pro prima observatione

$$M = e - \varepsilon \sin e = 316^{\circ} 55' 44'' 105$$

et in ultima $M' = e' - \varepsilon' \sin e' = 313^{\circ} 38' 35'' 824$

Differentia $= 2^{\circ} 42' 48'' 722 = 9768''.722$ ut prius.

Si autem querimus ex r, r', g, h et t alia methodo priori elliptica elementa

erit $co = -0^{\circ} 1' 39''.34$ $\alpha = -56^{\circ} 2' 59''.77$ $\gamma = -51^{\circ} 51' 32''.87$

$\log X = 8.4119879$ $\log Y = 8.07554912$

$v = 162^{\circ} 20' 52''.83$ $v' = 305^{\circ} 23' 7''.63$ $Q = 5^{\circ} 16' 48''.64$

$e = 306^{\circ} 42' 8''.47$ $e' = 309^{\circ} 34' 45''.79$ $\varepsilon = 0.3920261$

$\log a = 0.3426028$ etc ut prius

Propterea erat $AD = 32^{\circ} 41' 18''.47$ $\gamma = 162^{\circ} 6' 41''.45$ $\zeta = 8^{\circ} 18' 57''.54$

$u = 167^{\circ} 41' 44''.69$ ergo ex ultimis equationibus in 10.)

$h = 110^{\circ} 37' 15''.74$ $g = 87^{\circ} 54' 35''.50$ $i = 5^{\circ} 6' 45''.42$ $b = 103^{\circ} 5' 39''.76$

tunc quoque elongatio perihelii a nodo $= 145^{\circ} 33' 42''.67$

et longitudo perihelii $= 248^{\circ} 39' 22''.48$

Si haec longitudo perihelii addatur ad medianam anomaliam primae observationis, habemus pro tempore primae observationis medianam longitudinem in orbita pro 1804 April 24. 3756631

Quum autem huius diurnus tropicus motus 979.8963, habemus ab hac longitudine subtrahere $6^{\circ} 11' 6''.50$ ut obtineamus medianam longitudinem 199^{\circ} 28' 55''.485 pro 1804 April 24. 50

Si subtrahimus adhuc $31^{\circ} 18' 8''.642$, obtinemus

$168^{\circ} 10' 56''.443$ pro media longitudine pro 1806 Decemb 31. med. motus Paris. Ut videamus, uti accurate observationes per haec elementa representantur, habemus cum incertis valoribus pro i et b

pro prima		pro tertia observatione	
argum. latitudis	$87^{\circ} 54' 35''.50$		$90^{\circ} 56' 50''.30$
L	$213^{\circ} 42' 55''.5$		$223^{\circ} 23' 15''.5$
long. h	0.0028540		0.0039620
long. r	0.3480342		0.3463612
heliocent. longitudo	$190^{\circ} 59' 16''.95$		$194^{\circ} 21' 56''.51$
latitudo	$7^{\circ} 6' 29''.29$		$7^{\circ} 6' 42''.90$
geocent. longitudo	$174^{\circ} 7' 33''.18$		$173^{\circ} 33' 32''.95$
observatio	$174^{\circ} 7' 33''.2$		$173^{\circ} 33' 33''.0$
Error +	$0''.02$	Error +	$0''.05$
geocent. latitudo	$11^{\circ} 37' 24''.07$		$11^{\circ} 0' 39''.19$
observatio	$11^{\circ} 37' 24''.1$		$11^{\circ} 0' 39''.20$
Error +	$0''.03$	Error +	$0''.01$

3.3) *Procedens methalis* ad huc typicis intervalla temporum
et θ'' non ex admodum magna et libet invariari fere monetas.
Postea hae methalis cum huc hinc ut replicata, quibusdam
poterunt esse conculsi: θ'' in hoc opere habet $\theta'' = 120$ dis et
 $\theta'' = 134$ dis.

$l = 1 + n \cdot \frac{1}{dm} + \frac{1}{2} \frac{d^2 l}{dm^2} + \dots$
 Periclitus causa fit $a = \frac{1}{dm}$, $b = \frac{d^2 l}{2 \cdot dm^2}$, $c = \frac{d^3 l}{12 \cdot dm^3}$

et ex ratione

$$I'' = 1 + an'' + bn''^2 + cn''^3 + \dots$$

$$dI = a + b(n^1 + n) + c(n^2 + n^1 n + n^1) + d(n^3 + n^1 n + n^1 n^2 + n^1) + \dots \quad (II)$$

$$dI'' = a + b(n''n'') + c(n'''n'''n''') + \dots$$

$$d^2l = b + c(d'' + n'' + n) + d(n''^2 + n''n' + n''n + n'^2 + n'n + n^2) + \dots \quad (III)$$

$$x' = b + c(\ddot{n} + \ddot{n}' + \ddot{n}'') + d(\ddot{n}^2 + \ddot{n}''\ddot{n}' + \ddot{n}''\ddot{n}' + \ddot{n}'^2 + \ddot{n}'\ddot{n}'' + \ddot{n}''^2) + \dots$$

et iterum $N \cdot d\mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}^2 - d\mathcal{L}}{2m - 1}$ erit

$$d^3l = c + d(n'' + n' + n) + \dots \quad (IV)$$

si in (I) pro a substituamus $a = dl - b(n' + m) \dots \text{ex (II)}$

et pro b $b = d^2l - c(n' + n' + m) \dots \text{ex (III)}$

obtinemus $\lambda = l - ndl + nn'dl - nn'n'd^2l + nn'n'n'd^3l - \dots \text{et}$

et eadem ratione substituamus in (II) pro b et c. quoniam

substituo $b = d^2l - c(n' + n' + m) \dots \text{ex (III)}$

$c = d^3l - d(n'' + n'' + n' + n) \dots \text{ex (IV) etc}$

obtinemus

$$a = dl - (n' + n)d^2l + (nn' + nn'' + n'n')d^3l - (nn'n + nn'n'' + nn'n'n' + n'n'n'n')d^4l \dots (B)$$

et eadem ratione

$$b = d^2l - (n + n' + n'')d^3l + (nn' + nn'' + nn''' + n'n'' + n'n'' + n'n''n''')d^4l \dots (C)$$

Lex Tayloriana serie (I) per se patet. Per secundam serie (B) ubi

tot pro d^3l est summa omnium per $(x-1)$ tripliciter combina-

tionem primarium & quantitatuum $n, n', n'' \dots$ et horum productorum

In serie serie (C) sunt quantitates d^3l & summa omnium per n, n', n'' tripliciter

Optus combinationes primarium & quantitatuum $n, n', n'' \dots$ et horum productorum. etc

2. substituamus in valores pro $\lambda, a, b, c \dots$ quos invenimus in articulo

substituo $(A, B, C) \dots$ in articulis I, II, III. articulo I est l, etc

seriem pro l, II pro l', III pro l'' c. s. p. ubi est l' etc

Articulis igitur, ita se longitudo, latitudo etc pro a b c

quodam, et d' etc longitudo, latitudo etc per tempore quod

si per ab hac epocha tempore m, est

$$\lambda' = \lambda + m \cdot \left(\frac{d\lambda}{dm}\right) + \frac{m^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) + \dots \text{ubi } m \text{ tempus, } \lambda \text{ pro } \lambda$$

etc. ita notat tempus m.

Si in hac serie substituamus pro $\lambda, \left(\frac{d\lambda}{dm}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) \dots$ etc. pro

$\lambda, a, b, c \dots$ superioribus inventis valores, obtinemus

$$\lambda' = l + (m-n)dl + (m-n)(m-n')d^2l + (m-n)(m-n')(m-n'')d^3l + \dots (D)$$

et igitur sunt l, l', l'' etc observati loci placitis pro temporibus

$n, n', n'' \dots$ per hanc aequationem (D) valorum cujuslibet alius ob-

servationis λ pro tempore m invenire possumus, et quoniam m arbi-

trarie eligi potest, etiam observati loci $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ pro aequaliter a-

mutu distantibus temporibus m, m', m'' indicari possunt.

Ubi hoc per exemplum declaramus, assumamus sequentes observati-

ones cometes anni 1781.

1781 Novemb. 14.	medietas Paris	geocentrica longitudo	distancia a sole
	8° 29' 44"	306° 14' 45"	34° 42' 51"
17	8 29 44	306 57 32	45 42 48
19	8 29 44	306 57 26	50 45 12
22	8 29 44	306 44 52	56 10 59
25	8 29 44	306 41 37	60 7 17

si querantur ex his loci geocentrica cometae pro 14, 16, 18 Nov 8^h 29^m 44^s
et exprimantur omnia λ in secundis, et omnia m in minutis, erit
pro distantia geoc. $l = 34^{\circ} 42' 51''$, $l' = 45^{\circ} 42' 48''$, $l'' = 29594$, $l''' = 19144$

$$dl = 9''.1659720, d'l' = 6.2000000, d'l'' = -0''.0003780, d'l''' = -0.0001466$$

$$d^2l = 0.00000001315, d^2l' = -0.00000000000032$$

$$\text{Pro longitudinibus autem est } l = 304^{\circ} 14' 45'', l' = -1033''$$

$$l'' = 366.54.22, l''' = -266''$$

$$dl = -0.2391204, d'l' = 0.0000156, d'l'' = -0.1240833, d^2l = 0.0000080$$

$$d^2l' = -0.00000000915 \text{ et pro } n' n = 4320', n'' n' = 2880''$$

$$n''' n'' = 4320', n'' n' = 7200, n'' n' = 7200, n''' n = 4520$$

Er'it ergo pro distantia a polo

$$l' = 34^{\circ} 42' 51'' + 9''.1659720 (m-n) - 0.0003780 (m-n)(m-n) \\ + 0.00000001315 (m-n)(m-n)(m-n) - 0.00000000000032 (m-n)(m-n)(m-n)(m-n)$$

et pro longitudinibus

$$l' = 304^{\circ} 14' 45'' - 0.2391204 (m-n) + 0.0000156 (m-n)(m-n) - 0.00000000915 (m-n)(m-n)(m-n)$$

$$\text{Pro 18 Novemb. est } m-n = 5760', m-n' = 1440', m-n'' = -1440', m-n''' = 5760'$$

$$\text{Hinc distantia a polo } 34^{\circ} 42' 51'' + 9''.1659720 \cdot 3362 - 15''.2'' = 48^{\circ} 25' 6''$$

$$\text{et distantia longitudinalis } 304^{\circ} 14' 45'' - 137'' + 129'' + 11'' = 306^{\circ} 54' 8''$$

Asthenis solare aethiopes

$$14. Novemb. longitudo = 304^{\circ} 1' 55'' \text{ distantia a polo} = 42^{\circ} 34' 14''$$

$$14. Novemb. \quad \quad \quad 304^{\circ} 14' 45'' \quad \quad \quad 34^{\circ} 42' 51''$$

et pro

Procedimus ad equidistantiam adhibuit Laplace ad aliam solutionem
nostram problematis, quam breviter hic indicare volumus.

Commissio illi vice versa, per applicationem observationum invariabilium
in solutionem, prius ex his resultata invenire, quae finis lo sunt in a,
arbitrario numero ablatum. Si hoc resultatum eligitur, quocumque
truncat longitudinibus et latitudinibus pro quocumque aequali, et earum
prima et secunda differentia per correspondentiam prolatum item
prioris in ista. Nos videmus quocumque hoc per aethiopes solare
inveniri, propter et minimam est a distantia geocentrica longitudinalis
pro epocha m, et lo sunt l, l', l'' ablatum longitudinalibus pro temporibus
m+n, m+n', m+n'', ... erit si retineamus priorem transpositionem
quantitatum dl, d'l, d'l'', ... dl', d'l''.

$$\lambda = l - n dl + n' d'l - n'' d'l'' + \dots$$

$$d\lambda = dl - (n+n') dl' + (n''+n'''+n''') d'l'' + \dots$$

$$d^2\lambda = d^2l - (n+n') d^2l' + \dots$$

et similes expressiones quas habebimus pro geocentrica latitudinibus,

si λ, μ, ν, \dots in $\beta, \gamma, \delta, \dots$ mutantur. Si expressiones in utroque
rationes, quae minora sunt temporum intervalla. Substituamus
quodammodo in utroque temporum observationum, et adhiberi possit ex am-
plius partibus quodammodo requiritur partes alteras in eis eligere. Adhuc
notari potest, esse, si pro unitate temporum t minus motus terra in
ca. solem assumitur. $t = 365.256$ dies. ubi est annus julianus
terra. pro $365.256 = 3548.1866$ scribitur h , tunc erit

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{h} \left(\frac{dx}{dt}\right) \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{h} \left(\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{et}$$

- 1) si retineamus hanc notationem, minus rationis motus in primis,
sunt nota aequationes motus cometae aut planete, si negligitur eius
in aspectu respectu motus Solis, quae ultima aequationes unitati ponitur.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{x}{r_3} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{y}{r_3} &= 0 \\ \frac{dz}{dt} + \frac{z}{r_3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

et eadem ratione pro terra, si coordinata sunt planum xy in eclipsi
sua facit

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{x}{r_3} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{y}{r_3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Si prima aequationum (I) multiplicatur per $\sin \lambda$, secunda per $\cos \lambda$
erit eorum differentia $0 = \frac{dx \sin \lambda}{dt} - \frac{dy \cos \lambda}{dt} + \frac{x \sin \lambda}{r_3} - \frac{y \cos \lambda}{r_3}$

$$\text{et ita summa} \quad 0 = \frac{dx \sin \lambda}{dt} + \frac{dy \cos \lambda}{dt} + \frac{x \sin \lambda}{r_3} - \frac{y \cos \lambda}{r_3} \quad (III)$$

Si x, y, z ad eclipsi suam projiciantur in planum planum x terra, et L lon-
gitudinis, λ latitudinis, $x = X + r \cos \lambda$, $y = Y + r \sin \lambda$, $z = Z + r \cos \lambda$, $Y = R \sin L$
Quodlibet valoribus pro dx, dy et substitutionem in prima (III) aequatione,
summa, obtinemus

$$0 = \frac{(X \sin \lambda - Y \cos \lambda)}{dt} + \frac{X \sin \lambda - Y \cos \lambda}{r_3} - 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{X}{r_3} - \frac{dy}{dt} \frac{Y}{r_3} \right)$$

vel, quoniam $Y \cos \lambda - X \sin \lambda = R \sin(L - \lambda)$ est,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{R \sin(L - \lambda)}{r_3} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_3}\right) - 2 \left(\frac{dx}{dt}\right) \quad (IV)$$

Si multiplicata prima aequationum (I) per $\sin \lambda$, secunda per $\cos \lambda$
et subtracta a summa horum productuum tertia aequatione, erit

$$\frac{dx \cos \lambda}{dt} + \frac{dy \sin \lambda}{dt} + \frac{x \cos \lambda}{r_3} + \frac{y \sin \lambda}{r_3} = \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) \frac{dx}{r_3}$$

vel, substitutis pro x, y, z, dx, dy, dz suis valoribus

$$\left(\frac{dx}{dt} + \frac{x}{r^3}\right) \cos L \cos \beta + \left(\frac{dy}{dt} + \frac{y}{r^3}\right) \sin L \cos \beta =$$

$$= \frac{2 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2}\right) + 2 \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) \cos \beta + \left(\frac{d^2 \beta}{dt^2}\right) \sin \beta}{\cos \beta}$$

Neque hactenus autem prima eorum summa (III) per se, et hinc per dnd
eandem summa est $\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2}\right) \cos L = -\left(\frac{d^2 L}{dt^2} + \frac{d^2 \beta}{dt^2}\right)$ vel

$$\left(\frac{dx}{dt} + \frac{x}{r^3}\right) \cos L + \left(\frac{dy}{dt} + \frac{y}{r^3}\right) \sin L = \frac{d^2 L}{dt^2} + \frac{d^2 \beta}{dt^2} \cos L$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} \beta \right) \cos L$$

Itaque per primam aequationem

$$R \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} \beta \right) \cos L = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} \beta \right) \cos L + 2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} \beta \right) \sin L \cos \beta + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} \beta \right) \sin^2 \beta$$

et per dnd, summa ex (III) subtrahitur, et breviter causa ponitur

$$T = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} \beta \right) \cos L + 2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} \beta \right) \sin L \cos \beta - \left(\frac{d^2 L}{dt^2} + \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right) \cos L$$

$$= \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \sin L \cos \beta \cos L + \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \sin^2 L$$

$$R^2 = r^3 (1 + R^2) \quad (V)$$

Itaque autem hactenus $r = \frac{d^2}{dt^2} \cos L + 2 \frac{d^2}{dt^2} \sin L \cos \beta + R^2$
obtinemus, si translationem (V) ad hanc ad quodam locum et pro r^6 in
eandem valore et alia aequatione ponimus,

$$1 + \frac{d^2}{dt^2} R^2 = \frac{d^2}{dt^2} \cos L + 2 \frac{d^2}{dt^2} \sin L \cos \beta + R^2 = \frac{d^2}{dt^2} \quad (VI)$$

per aequationem est ipse primus in puncto incognitis quatuordecim

problema ita ex aequatione (VI) variis necesse est obtemperare valores

pro x, y, z ex primis et sine conditionibus, et valore quoque $\frac{d^2}{dt^2}$

$$x = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ -\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} \beta \right\} + \sin L - \beta$$

ubi tamen differetia quatuordecim x, y, z respectu t per se

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \cos L - \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \sin L + \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \cos L - \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \sin L$$

$$\left(\frac{dy}{dt} \right) = \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \sin L + \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \cos L + \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \sin L + \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \cos L$$

$$\left(\frac{dz}{dt} \right) = \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \cos \beta + \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) \sin \beta$$

ubi facile videtur per $\left(\frac{d^2}{dt^2} \right)$ ex prioribus (not. ellipt.) determinari

omnes, sunt. et tamen E est ex conditionibus variis β et V

etiam aequationibus per se computata erit.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \right) = \frac{1 - E^2}{R^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} \right) = \frac{E \sin L}{1 - E^2}$$

Itaque in aequatione numerorum orbitae ex his quatuordecim

obtinemus, quia in calculum propius ratiis vectorum temporis

et tamen, et aliter, $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ expressio ubi $\frac{d^2}{dt^2}$ sequens

$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$ est vel positiva vel negativa, quod motus comites est

rationem cum projectione radii r . Si den ψ' est angulus linearis, quo
 rationem cum radio vectore ipso, est $\tan \psi' = \frac{\tan(\psi - \kappa)}{\cos \psi}$
 et quoniam vera anomaliam ψ , seu angulum quem radius vector cum
 axe majori facit, ex prioribus statim data est, $\psi' - \psi$ erit angu-
 lus inter lineam naturalem et lineam apponendam, seu elongatio
 pericentri a nodo, & quoniam longitudo pericentri $\psi' - \psi + \kappa$ est
 tum quoniam omnia elementa determinata erunt. —

Multo simplicior evadit, prout patet, si orbita plan-
 a sit, ut circularis vel elliptica, & quoniam, suppositio quoniam tri-
 bus, ut a puncto κ ad punctum ψ et a puncto ψ ad punctum ψ' , per
 punctum, veli approximatione & abscissa lineis hinc primis post appropria-
 tionem supponit, hinc ubi orbitam habet, ~~per~~ ψ posuit, itaq. sat sim-
 pliciter ad more naturalem.

Supponimus orbitam planam, & circulem, primo quod problema
 involvitur elementa hujus orbitae, quae problema quod geometricum
 est, solvari potest. Si nimirum sitas planam, versus solem per
 tres, vel singulares coarctatas α, β, γ determinatas, canonicas, orbitam
 esse in puncto quod per centrum solem transit, erit aequationum

$$x + py + qz = c$$
 Et cordis orbitae, & circulem, quoniam radius ex

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
 conjunctione aequationum aequationem erit orbitam planam,

itaq. quoniam fuerit, & aequationem erit ψ , & nimirum notandum
 praedictum, si significandam multitudine $\xi, \beta, \gamma, \alpha, L$, erit

$$x = \xi \cos \beta \cos \alpha + \beta \sin \alpha, y = \xi \cos \beta \sin \alpha + \beta \sin \alpha, z = \xi \sin \beta$$
 & si orbitam sub huiusmodi in ambobus, prout ubi aequationi-
 bus, et brevitate causa pariter

$$\begin{aligned}
 A &= \xi \sin \beta \sin \alpha, B = \xi \sin \beta \cos \alpha, C = \frac{\xi \sin \beta}{\sin \beta}, D = \frac{\xi \sin \beta}{\sin \beta} + E = \xi \sin \beta \cos \alpha \sin \alpha \\
 \text{erit} \quad \xi^2 + 2\xi\beta + \beta^2 &= a^2 \quad \xi + \frac{pC + qD}{1 + p^2 + q^2} = c
 \end{aligned}$$

& si orbita appropria sit, erit hinc hinc aequatione & inter ξ, p, q, α .
 & orbita ξ, p, q, α
 ita, ut & his sex ac inambibus, h. e. igitur & orbitas praedictas
 si inambibus, & incognitis quantitates α, p, q & ξ, β, γ more
 orbitae determinari possunt.

Si autem in re solvenda hinc problema statim appropria vates
 hinc matris, hinc aequatione & si inambibus elementarum
 sufficiunt.

Si minimum prius inventi valores pro x , y substituamus in aequatione $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et brevitate causa ponitur $T = (a \cos \beta \cos(L - \lambda))$ et

$$\xi = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} - T \quad (I)$$

pro secunda observatione est eadem ratio $T' = (a \cos \beta' \cos(L' - \lambda'))$

$$\xi' = \sqrt{a^2 - (x'^2 + y'^2)} - T' \quad (II)$$

Si autem K est chorda, cuius extremitates rationum m in arcibus observationibus conjungit, erit $K^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$ et

$$K^2 = 2a^2 - 2\xi\xi' \cos \beta \cos \beta' \cos(L - L') + 2\xi\xi' \cos \beta \cos \beta' \cos(L - L') - 2\xi\xi' \cos \beta \cos \beta' \cos(L - L') \quad (III)$$

Propterea est area sectoris circularis inter duas observationes $s = a^2 \sin \frac{K}{2a}$ et si $\mu = 3545''.1566$ et t intervallicum temporis est, habemus $s = \mu \frac{K}{2a}$ ergo et si, si ambae expressiones pro s sitae aequales ponantur

$$\frac{ut}{2a^2} = \sin \frac{K}{2a} \quad (IV)$$

et aequationes (I), (II), (III), (IV) habentur, ab ois casibus inter quos quatuordecim α, ξ, ξ' ergo sunt plus quam sufficientes ad determinandum hanc quantitatem.

Si omnia praedicta conjungimus, est

$$T = a \cos \beta \cos(L - \lambda), \quad T' = a \cos \beta' \cos(L' - \lambda')$$

$$T = a \cos \beta \cos(L - \lambda), \quad T' = a \cos \beta' \cos(L' - \lambda')$$

$$\lg C = \frac{\cos(L - \lambda)}{\lg \beta}$$

Si his quantitatibus auxiliariis fuerit comparata, erit

$$\sin m = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{a}, \quad \xi = a \cos m - T$$

$$\sin m' = \frac{\sqrt{a^2 - \xi'^2}}{a}, \quad \xi' = a \cos m' - T'$$

$$K^2 = 2a^2 - 2\xi\xi' \cos \beta \cos \beta' \cos(L - L') - 2\xi\xi' \cos \beta \cos \beta' \cos(L - L') - 2\xi\xi' \cos \beta \cos \beta' \cos(L - L')$$

$$\frac{K}{2a} - \sin \frac{ut}{2a^2} = 0$$

Assumitur igitur arbitrarius valor pro a et queritur cum hoc m, m', ξ, ξ', K . Si pro invento valore quantitatis K ultima expressio eva, sit z erus, a bene assumitur. In contrario casu hic calculus cum alio valore pro a repeti debet, et ita invenitur verus valor pro a . Facilis haec ratio α, ξ, ξ' ex his facile faciendum praevideat haec inclinatioem arcibus et lineam nodorum determinare non possumus, differencia argumentorum latitudinis erit $2h = \frac{ut}{a^2}$ et motus diurnus in minutis secundis $\frac{u}{a^2}$.

Si applicamus praedicta ad duas observationes 1^{ae} 24^{ae} et 29^{ae} Aprilis 1807 quas prius edimus, habebimus:

$$t = 11.9850197, \log A = 9.8407012, \log B = 0.1492157$$

$$\log A' = 9.8457471, \log B' = 0.1797447$$

$$C = 78^\circ 22' 34.97, \log V \Delta^2 - A^2 = 9.8197078, \log V \Delta^2 - A'^2 = 9.8598422$$

$$\log 2 \sin \frac{C+32}{2} = 0.3010147, 2 \Delta \cos \frac{L-L'}{2} = 2.0218832$$

$$1 \text{ Hypothesis } a=2 \text{ dat } m=19^\circ 16' 34.8, m'=21^\circ 13' 42.2$$

$$\log p = 0.0522367, \log p' = 0.0656700, K^2 = 0.0035970$$

$$\log \frac{K}{a} = 8.1757289$$

$$\log \frac{K}{a'} = 8.1806569$$

$$\frac{K}{a} = 0.0047286$$

$$2 \text{ Hypothesis } a=2.2 \text{ dat } m=17^\circ 22' 57.83, m'=17^\circ 13' 6.14$$

$$\log p = 0.1207106, \log p' = 0.1382286, K^2 = 0.0033422$$

$$\log \frac{K}{a} = 8.1185700$$

$$\log \frac{K}{a'} = 8.1185717$$

$$\frac{K}{a} = 0.0000017$$

$$\text{hinc } \cos \delta = a = 2.2000000 \text{ quod } \log a = 0.3421376$$

$$\text{et } \cos \delta' = 0.1267373, \log p' = 0.1382286$$

et hinc faciemus hinc faciemus conijectiones et latitudines

$$\cos b = \frac{\cos \delta}{a}, \sin(L-L') = \frac{\cos \delta \sin(L-L')}{a \cos b}$$

$$L = 151^\circ 12' 39.1, L' = 142^\circ 43' 38.9$$

$$b = 7^\circ 2' 33.1, b' = 7^\circ 3' 33.1 \text{ et hinc inclinatio orbitae}$$

$$= 7^\circ 11' 45'' \text{ et longitudo, nam ascendens } = 107^\circ 3' 17.8$$

(1) Quibus simpliciter vocat tota solutio, et orbita planis et axibus

et hinc $x = 2p - p$ et hinc p projectionis super lineam in

plano elliptica, et hinc inclinatio orbitae est terra in prima, et hinc

velocitas et hinc x part in una, et hinc L et hinc L' et hinc p

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p' et hinc p et hinc p'

$$a = \frac{\cos(L-L') - \cos(L-L')}{\sin(L-L')}$$

$$b = \frac{\cos(L-L') - \cos(L-L')}{\sin(L-L')}$$

$$c = \frac{\cos(L-L') - \cos(L-L')}{\sin(L-L')}$$

non sine utilitate ad huc in potest.

¶ Nimirum orbis placuit circa hunc modum esse, quantitas
 A, B, C (hinc q, r, s) sunt areae triangulorum rectilineorum,
 quae sunt constituta inter orbitam et radios trium observationum;
 et quoniam haec tria regulae habent communem altitudinem, quia
 eorum communis vertex in centro solis est, area horum trium
 quatenusque habeant eam eorum bases. Cum autem motus in
 linea recta intra tale parvum intervallum temporis, non exi-
 pimus praesupponi potest, haec bases se habeant, ergo etiam illae
 areae, vel intervalla temporum observationum. Si igitur $A, B,$
 et C priores significaverint, erit

$$0 = \frac{A}{x} - \frac{B}{x'} - \frac{C}{x''} \quad \text{et} \quad d = \frac{A}{x} - \frac{B}{x'} - \frac{C}{x''}$$

Si hanc methodum applicemus ad observationes H, P, S , ubi
 jam dati sunt valores quantitatum constantium
 A, B, C, x, x', x'' et d, d', d''

invenitur $\log d = 0.1090287$ $\log d' = 0.1913246$

est autem $x = \cos d + D \sin d$, $y = \sin d + D \sin L$, $z = S \sin L$

hinc pro prima observatione

$x = -2.3083417$, $y = -0.4076899$, $\log z = 9.4822528$

et eadem ratione pro ultima observatione

$x'' = -2.2760672$, $y'' = -0.5190821$, $\log z'' = 9.4801173$

ergo habemus

$xy'' - yx'' = -0.0344219$

$xx'' - x''x = -0.0054542$

$xy'' - x''y = +0.2687321$

itaque inclinatio orbis $n = 7^\circ 23' 21.6$

longitudo nodi ascendens $\Omega = 99^\circ 0' 13.5$

(Vide quoque Berliner Jahrbuch 1785 et 1786)

Correctio fere jam notorum elementorum

Observationes et quatuordecim, quibus per nos descriptis, quibus superstruimus, sunt, penitus per se et in se invicem, spiritus, etiam tribus observationibus derivata elementa sunt plane accurata, exceptis parvis deviationibus, quas, cum et imperfecti tueri ne nostrorum tantum approximationem logarithmicam, et in procedentibus neglectis nobis et perurbationibus ceterorum corporum habemus. Quum autem omnes nostrae observationes, uti nostri calculi, tantum modo sint approximationes ad veritatem, nostrum erit nos veritati, quantum fieri potest, adpropinquandi.

Et natura materiae, quae hic tres habet, jam sequentes, inevitabilis error observationum in derivata reflectata eo majorem et notatiliorem influxum habere, quo minus, ra sunt intervalla temporum harum observationum, vel patius, quo minus sunt helio-centricae motus planitiae in his intervallis. Quum autem omnes procedentes methodi hanc suppositionem continent, et continere debent, ut scilicet hinc investigare, quomodo ex hac ratione jam inventis approximationibus elementis, illa elementa inveniri possint, quae etiam tribus valde a se invicem distantibus observationibus, vel etiam pluribus observationibus satis spiciant.

Atque omnia haec novae observationes cum aliqua dispositione eligi debent, minimorum e numero omnium daturum observationum tantummodo illae ad calculum revocari debent, quarum bonitati fidem tribuere possumus. Ad hunc finem e pluribus singulis observationibus, quae se invicem invicem sunt admodum propinquae, una solum derivari debet, quae quasi est medium omnium precedentium, et ipsa summa recta erit ad nostros calculos, quam singulis precedentibus observationibus.

Si nimirum cum jam fere notis elementis huius geocentrii
 singularem observationum calculantur, differentias totius
 computatae. Et verorum, observatae. Et secundum in d. c.
 quod plurimum dierum erunt constanter, vel saltem semper
 etibus proportionalis. Et sunt v. c. $\alpha, \alpha', \alpha''$ observatae. Et
 sic ut rectas, vel declinationes pro temporibus t, t', t''
 et $\alpha + \delta, \alpha' + \delta', \alpha'' + \delta''$ eadem ex elementis computatae. Quia
 etiam, $\delta, \delta', \delta''$ designabunt, si observationes qua nullis
 erroribus subjectae praecipue videntur, erroris elementorum
 et erit d. c. si quantitates $\delta, \delta', \delta''$ qua constanter as-
 sumi possunt, maxime probabilis error cuiuslibet ex his
 elementis calculati. Huius aequalis $\Delta = \frac{\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2 + \dots}{n}$ ubi
 n est numerus observationum. Si autem observa-
 tiones ipsae in se non sunt ejusdem ponderis, et si
 v. c. $\alpha, \alpha', \alpha''$ designant gradum longitudinis primi, secundi
 et tertii observationis, medius maxime probabilis ve-
 torum elementorum, non amplius erit ali. prius, me-
 dium arithmeticum ex omnibus singulis erroribus
 hoc erit $\Delta = \frac{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots}{n}$ et si ita nossumus
 quantitates Δ assumemus pro veris ascensionibus re-
 ctis, vel declinationibus, vel in prima observatione
 $\alpha + \delta - \Delta$ in secunda $\alpha' + \delta' - \Delta$ in tertia $\alpha'' + \delta'' - \Delta$ et
 sic semper idem erit, quam harum observationum
 pro sequentibus disquisitionibus assumimus. —
 Opponere igitur volumus, nos habere tres tales correctas, a se in-
 vicem valde distantes observationes, et videmus, quomodo op-
 harum jam nota approximata elementa corrigere possumus. —
 Ad solutionem huius problematis dantes plures vias, quarum
 tantummodum praecipuas indicare volumus. —
 Pro duabus extremis observationibus querantur ex elemen-
 tis logarithmici curatae. Et planis. Et a terra
 $\alpha = \log. \delta, \alpha' = \log. \delta'$ et ex his huius heliocentrii, et radii ve-
 torum planis, et ex his suis orbitis, et heliocentricis,

longitudo in orbita, et ex his omnia cetera elementa, quae
 elementa igitur accurate se representabunt illos isthucos ob-
 servationes. Hisce cum duobus elementis, calculis nimirum
 focus geocentricus pro tertia observatione, et hac nimirum
 ab distincta differentia X observata et computata lon-
 gitudinis, et differentia Y amborum latitudinum, et
 si X et Y non fortiter sunt aequales, vero, cum duobus
 aliis suppositis tribus pro x, x'' adhuc duo alii errores x'
 y et x'' y oblinentur, et quibus diu veri valoris pro
 x, x'' (regula falsa) inveniantur, et ex his diu vera, attributa
 tribus observationibus satisfaciunt elementa de serui-
 nabuntur. Clarum est, pro duobus extremis observa-
 tionibus non tales eligi debere, quae in heliocentrica longitudine
 duobus, quatuor, sex angulis radii est, vel fere iidem quan-
 titatibus a se invicem distant, quia ex talibus observa-
 tionibus situs orbis non determinari potest.

1) Alia adhuc commodior methodus est sequens:

Ex jam fere notis elementis querantur pro duobus extremis obser-
 vationibus certae distantiae planae a terra, et ex his longi-
 tudines in orbita et radii vectores r, r'' . Hic situs S, S''
 et, qui simul per hanc calculum invenitur, quodammodo
 modica observatione longitudinibus in orbita et radius vector r'
 Haec ratio ne oblinentur pro omnibus tribus observa-
 tionibus quantitates r, r', r'' et $2f, 2f', 2f''$ etc. ut videamus
 $f = f + f''$ et $n = r r'' \sin 2f$, $n' = r r' \sin 2f'$, $n'' = r r' \sin 2f''$

Diu incipiat duplex calculus elementorum ex r, r', f, f''
 et $r', r'' f, f''$, hic calculus autem tantummodo continuetur
 usque ad aequationem $f = \frac{(y-1)y}{y+1}$ quod dabit y , quod y in primo
 computo fit n'' in secundo n .

Nunc habuimus tres expressiones pro p , nimirum

$$Vp = \frac{r''h}{p d}, \quad Vp = \frac{r'h}{p d} \quad \text{et} \quad p = \frac{4rr'' \sin f \sin f' \sin f''}{n - n' + n''}$$

et hi tres valores debent esse identici, si prima approximata
 elementa sunt accurata, h. e. deberemus habere in hoc caso

$$X = \gamma h d^2 - \gamma'' h'' d^2 = 0$$

$$Y = h - h' + h'' - \frac{\gamma \gamma'' h h''}{\gamma \gamma'' h h''} = 0$$

Si nunc X et Y non sunt aequalis zero, repetatur tota computatio adhuc duobus modis, cum duabus aliis certis distantis pro duobus extremis observationibus, per quas diu vera certitas distans et ex his vera elementa solent haberi, quae satis facient his tribus observationibus.

2) Ad abbreviationem horum calculorum in secunda et tertia hypothesis, dum sum modo unam amborum prius assumptorum distantiarum distantiarum mutare et ita procedere possumus. Ex jam notis approximatis elementis, calculatur pro ambabus extremis observationibus certae distantiae S et S'' et ex his elementis et geocentricis locis M (nimirum ejus longitudo et latitudo seu eius apertio recta et declinatio) in tertia observatione. In secunda hypothesis, pro qua assumitur $S+m$ et S'' querantur eadem ratione elementa ex quibus diu pro tertia observatione locus geocentricus $M+x$. Tandem in tertia hypothesis pro qua assumitur S et $S''+m$ querantur iterum elementa, et ex his pro tertia observatione locus geocentricus $M+y$.

Quoniam nam quantitates m, m'', x, y sunt parvae, assumere possumus in quarta hypothesis, pro qua assumere volumus $S+xm$, et $S''+ym''$ geocentricum calculatum locum huius observationis exhibere $M+xx+yy$ et quoniam et longitudo geocentrica et geocentrica latitudo huius aequationem dent, ex his duabus aequationibus, valores pro x et y , h. e. verae certae distantiae amborum extremarum observationum inveniantur, ex quibus diu vera elementa calculari possunt, quae his tribus observationibus per se satis faciant. Haec methodus etiam ad plures quam tres observationes extendere possumus. Si nimirum in prima hypothesis per ex S et S'' derivata elementa querantur geocentrici loci tertia, quae sit et quinta observatio, qui sint M, M', M'' et si eadem ratione sint calculati geocentrici loci in secunda hypothesis $M+x, M'+x', M''+x''$ et in tertia $M+y, M'+y', M''+y''$, habebimus, si N, N', N''

sunt respectu loci, sequentes, proprie duplicis argumentationis:

$$M + \alpha x + \beta y = N, \quad M + \alpha' x + \beta' y = N', \quad M + \alpha'' x + \beta'' y = N'' \text{ etc.}$$

e quibus diu facile maximis probabilis valores quantitatuum x, y , secundum in praecedentibus allatam methodum inveniri, et ex his illa elementa derivari possunt, quae omnibus fundamentalibus observationibus satisfaciunt.

2.) Haec ultima methodus, uti videmus, etiam facile immudiate ad parabolica elementa applicari potest, sed tamen erit commo-

dus, pro his, sequenti modo procedere.

Ex approximatis elementis, quorundam pro duabus extremis observationibus exactis radii vectores r, r'' , in secunda hypothesis, sicut hi radii $r+m, r''$, in tertia hypothesis sunt radii $r, r''+m''$. — Ex his suppositis distantis a Sole et abster-

vata quacentrica longitudine et latitudine, calculandis pro quolibet horum hypothesis elementa parabolica, diu inveniantur in quolibet horum trium hypothesis tempora

$T, T+t, T+t''$, quae difflicere debent in locis ambis extremis

observationes, et hae tempora cum revera observato in

valle temporis comparata, sunt argumentum primam sequen-

tis formae pro determinandis x et y . $\frac{tx}{m} + \frac{ty}{m''} = T - T'$

Ad inveniendam secundam aequationem, ut

elektor pro servata seu media observatione

in quolibet horum trium hypothesis, quo-

centrica longitudine, vel si latitudine, quae

magis nulla sit, quacentrica latitudine, quae

reputare sit in his tribus hypothesis

$M, M+\alpha, M+\beta$. Si diu N et

observata longitudine aut latitudo secundae,

quatio erit $\frac{\alpha x}{m} + \frac{\beta y}{m''} = N - M$.

Inventis ita x et y , vera exacta distan-

tia a Sole in ambabus primis observation-

ibus sunt r, r'' , e quibus diu vera

elementa inveniri possunt, quae hactenus

observationis accurate representabant.

Haec methodus etiam continuari potest

pro plurius observationibus, uti et ap-

Gauss
p. 222 et 223.

Vid. Olbers
Abhandlung di
Bath. d. d. d.
p. 96. et 101.

Abh. 2. p. 342.

Substituit ita: Si in ambabus
tempora t et t'' quae correspondent ele-
mentis N et N' . Formando etiam
hypothesis $N, T+t, T+t''$, inveniuntur
 $t+x$ et $t+x''$ loco t et t'' . In
hypothesis $N+m$ et T dabit $t+l$
et $t+l''$ loco t et t'' . Si tempora
observata $t+s, T, T+s''$ et veri
valores radii et inclinationis $N+\alpha,$
 $T+y$, supponere possumus variatio-
nes temporum t et t'' per
proportionalis variationibus elementis
eum. Quamvis i. quod dicitur vari-
ationem temporis $t = t' + t''$ et tempore
 $t' = n, y$ miscebit tempore quanti-
tate t et t'' quae $\frac{tx}{n} + \frac{ty}{n''}$. Sed in re-
sultione inveniuntur variationes tem-
porum t, t' per $x, \frac{tx}{n}, \frac{ty}{n''}$.

Vera elementa hinc $N+\alpha$ et $T+y$ de-
bent $T = t + \frac{tx}{n} + \frac{ty}{n''}, T' = t' + \frac{tx}{n} + \frac{ty}{n''}$
substituendo $T = t+s, T' = t'+s''$ erit

plur.

$$e = \frac{lx}{n} + \frac{ky}{n}, \quad z = \frac{\lambda x}{n} + \frac{\mu y}{n} \quad \text{e quibus}$$

$$x = \frac{n(K - ex)}{K - x}, \quad y = \frac{n(El - el)}{K\lambda - x\lambda}$$

applicari possit in computu orbitæ ellipticæ,
sed hic accedere debet quantitas hypothetica et
nimirum elliptica (Vid. Berl. Tab. 6. 1820 p. 220)

$$\lg u = \frac{\sin A \sin(L-K)}{\sin(A+n)}$$

$$\varphi = \frac{R \sin \beta \sin(L-K) \sin n}{\sin \beta \sin(B-n)}$$

$$r = \frac{R \sin \beta \sin(L-K)}{\sin(B-n) \sin n}$$

$$R \sin n \sin u = \varphi \sin \beta$$

ubi erat

$$\lg A = \frac{\cos(L-K) \lg \beta}{\sin(L-K)}$$

$$\lg B = \frac{\lg \beta}{\sin(L-K)}$$

Hæc pertinent quæ dequisitiones, quæ influxum par-
tis erroris loci geocentrici planis in epis filium heliocen-
tricum et vice versa exferunt.

Ad hunc finem referemus volumus quæ hinc æquationes
ex theoria heliocentrici et geocentrici loci quæ dant

$$\lg u, \varphi, r, \text{ et } \sin u$$

Prima harum æquationum dat

$$du = \frac{\varphi \sin u}{r \sin \beta \sin(L-K)} \{ d\lambda \sin \beta \cos \beta \cos(L-K) + d\beta \sin(L-K) \}$$

et si eadem ratione ex secunda æquatione queritur $d\varphi$, et
hi valores du et $d\varphi$ in differentiali quartæ æquationis

$$dr \sin n \sin u + r du \sin n \cos u = d\varphi \sin \beta + \varphi d\beta \cos \beta$$

substituuntur, oblinemus

$$\frac{dr}{\varphi} = \frac{d\lambda \sin \beta \cos \beta}{\sin n \sin u \sin(L-K)} \left\{ \frac{\cos(L-K)}{R} - \frac{\cos u \cos(L-K)}{r} \right\}$$

$$- \frac{d\beta}{\sin n \sin u \sin(L-K)} \left\{ \frac{\sin(L-K)}{R} + \frac{\cos u \sin(L-K)}{r} \right\}$$

1.) Sed non tractum immediatè erroris $d\lambda, d\beta$, observationis,
sed etiam errores suppositionis in situ nodi et inclinationis
nis orbitæ in locum heliocentricum ex observationibus deri-
vatum, secundum diversas circumstantias majorem vel mi-
norem influxum habere possunt.

Ut hoc accuratius inquiramus, commodè erunt æquationes
ex eadem theoria $\lg v + u = \frac{\sin q + n}{\sin q - n} \lg L - K$ etc. per quas in vari-

$$tis \quad du = d\lambda \sin u (\sin n \cos(L-K) + \cos n \cos q) - dK \sin u \cos v$$

$$dr = \frac{r \cos q \sin v}{\sin(L-K)} \left\{ dr \sin u - dK \cos u \sin v \right\}$$

ubi v, q et h indicatas significationes habent.

2.) Tandem quoque erroris suppositionis loci solis diuersum influxum
habet in heliocentricum locum planis, qui derivatur ex obser-
vato geocentrico. Si a primis æquationibus loci citati

$$\lg(L-K) = \frac{y-y}{x-x}, \quad \lg \beta = \frac{z-z}{x-x} \cos(L-K)$$

oblinemus per differentiationem

$$(dx - d\lambda)(y - Y) = (dy - dY)(x - X), \quad (dx - d\lambda)(z - Z) = (dz - dZ)(x - X)$$

pro Sole & aequationes transeunt in sequentem formam

$$dt = \alpha dL' + (1-\alpha) d\pi + \frac{\beta d\varepsilon}{\sin^n} + \alpha d\delta$$

ubi ℓ est vera longitudo Solis, si m est media anomalia, etiam est fixe $\alpha = 1 + 2\varepsilon \cos m$, $\beta = 2 \sin m + \varepsilon \varepsilon \sin 2m$.

Totus maioris momenti est, influxum parvarum variationum elasticorum, in quocentricum, sicuti planetas non tenet, & designat A, B , quocentricum, longitudinem et latitudinem planetarum, & L et L' longitudinem et distantiam terrae, & si ab initio supponamus, planetam esse cum soli in oppositione, h. e. esse $\ell = L$, generaliter habemus

$$\ell(\ell - L) = \frac{r \cos b \sin(\ell - L)}{r \cos b \cos(\ell - L) - D}$$

hinc pro $\ell = L$, $d\ell = dL$, & quo sequitur operatio, ut primam (I) multiplicamus per $\frac{1}{\sin^2}$, ad obtinendam expressionem pro $d\ell$.

Præterea est generaliter $\sin B = r \sin b$ et pro oppositione $(2 + \varepsilon \cos b = r \cos b$

ubi ε designat distantiam planetæ a terra. Si ambæ aequationes differentiantur, propter L constantem, et eliminata quantitas $d\varepsilon$ & ambabus aequationibus differentiatibus erit

$$d\beta = \frac{dr \sin(b - \beta) + r \cos b \cos(b - \beta)}{\varepsilon}$$

Est autem $dr = -\frac{2r d\varepsilon}{3\varepsilon} + \frac{\alpha \varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \sin v (dL' + d\delta - d\pi) - \alpha \cos v d\varepsilon$

Si hic valor pro dr et ille pro $d\beta$ in secunda aequationum

(I) in ultima expressione pro $d\beta$ substituatur, obtinemus

$$d\beta = E dL' + (E - \frac{2rC}{3\varepsilon}) d\delta + (D - E) d\pi + (D\beta - C\delta) d\varepsilon + D \frac{d\ell(1-\varepsilon)}{\sin^n} - D dk$$

ubi est $C = \frac{\sin \beta \sin(b - \beta)}{r \sin b}$, $D = \frac{\sin \beta \cos b \sin(b - \beta) \cos(b - \beta)}{\cos b}$, $E = \alpha D + C \frac{\alpha \sin v}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

et $\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ et $S = \alpha \cos v$

et hanc aequationem debemus secundæ aequationum (I) substituere, ut $d\beta$ pro oppositione obtineatur.

Eccum ambæ aequationes sunt etiam per simplicem transmutationem perfectæ aequationes conditionales observationum solis, si nimirum designamus per A, D ascensionem rectam et declinationem

Idem modo est preterea

$$\left(\frac{d\beta}{dr}\right) = - \frac{r \sin \beta \cos(L-A)}{r^2} = a''$$

$$\left(\frac{d\beta}{du}\right) = \frac{r}{\xi} \sin n \cos(L-K) \cos(\varphi-u) \cos(\psi-\beta) + \frac{r}{\xi} \sin(\varphi-u) \sin(\psi-\beta) = b''$$

$$\left(\frac{d\beta}{dn}\right) = \frac{r \cos n \sin u \cos(\psi-\beta)}{\xi \cos \psi} = f', \quad \left(\frac{d\beta}{dK}\right) = \frac{r}{\xi} \sin \beta \sin(L-A) = d''$$

ex quo sequitur

$$dX = a'dr + b'du + f'dn + d'dK, \quad d\beta = a''dr + b''du + f'dn + d''dK$$

Si autem π est longitudo perihelii, v , m , vera et media anomalia, a , ae , semiaxis major et excentricitas, erit

$$u = v + \pi - K \quad \text{et hinc} \quad du = dv + d\pi - dK$$

Preterea habuimus

$$dv = \frac{a^2}{r^2} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} dm + \frac{(2+e \cos v)}{1-e^2} \sin v \, de$$

$$\text{et} \quad dr = \frac{ae}{r^2} da + \frac{ae}{V1-e^2} \sin v \, dm - a \cos v \, de$$

$$\text{Si brevis causa ponimus} \quad \frac{a^2}{r^2} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} = f, \quad \frac{(2+e \cos v)}{1-e^2} \sin v = g$$

$$\frac{ae \sin v}{V1-e^2} = f', \quad -a \cos v = g'$$

$$\text{est} \quad dv = f dm + g de, \quad dr = f' dm + g' de + \frac{r}{a} da$$

Si preterea M est motus diurnus in media longitudine, M hanc media, longitudo ipsa pro quacunque epocha, quae t diebus praecedet huius praesentibus observationibus (si epocha sequitur observationem, t est negativum), habebimus

$$m = M + t\pi - \pi \quad \text{hinc etiam} \quad dm = dM + t d\pi - d\pi$$

$$\text{Tandem est} \quad i. d^2 = u, \quad \text{ubi} \quad u = 0.017202 \quad \text{hinc}$$

$$da = - \frac{2a d^2}{3\pi}$$

at colligentes omnia praecedentia et praeter brevitas causa

$$A = (af + bf')t - \frac{2a^2 r}{3\pi}, \quad B = af + bf', \quad C = b - (af + bf'), \quad D = bg - ag', \quad E = d' - b'$$

$$\text{et} \quad A' = (af' + bf)t - \frac{2a^2 r'}{3\pi}, \quad B' = af' + bf, \quad C' = b' - (af' + bf), \quad D' = bg' + ag, \quad E' = d'' - b''$$

habebimus sequentes expressiones

$$dA = A'dr + B'dM + C'd\pi + D'de + E'dK + f'dn \quad \text{(II)}$$

$$d\beta = A'dr + B'dM + C'd\pi + D'de + E'dK + f'dn$$

Ex his generalibus aequationibus etiam prius pro opposicione datos valores dA , $d\beta$, derivabimus, si in praesentibus expressionibus heliocentricam longitudinem, aequalum geocentricae ponimus, per quod unus prior adductorum angulorum auxiliarium φ , ψ , addendum latitudinis et alter heliocentrica longitudo erit, et

Defi $\xi = \frac{\sin \beta}{\sin b}$, et, uti ex suppositione oppositis a se sequitur,
 $\frac{R}{\xi} = \frac{\sin(\beta - b)}{\sin b}$ ponitur, et si laudem prima aequationum (II) per
 ξ b. elq. β multiplicatur.

Si igitur jam habemus approximates valores pro elementis
 n, k, e, π , pro singulis observationibus, ex his elementis cal-
 culabimus geocentricam longitudinem et latitudinem, quae
 cum eadem autem observata longitudine et latitudine quan-
 titatum $d\lambda, d\beta$, et hinc tot binas aequationes (III) dabunt,
 quot observationes ad hunc catalogum sunt assumptae, et
 ex omnibus his aequationibus primum methodum in
 theoria probabilitatis allatum, maxime probabilis valores
 correctionum $dn, dk, de, d\pi$, et hinc quoque illa correcta
 elementa $n+dn, k+dk, e+de$ inveniantur, quae omnibus
 his observationibus satisficient.

2) Commodius adhuc est, loco correctionum ~~geocentricarum~~
 longitudinum et latitudinum $d\lambda, d\beta$, adhibendi immediate
 correctiones geocentricarum ascensionum rectarum et decli-
 nationum $d\alpha, d\delta$, et ad obtinendas huc pertinentes ex-
 pressionem, optimum erit adhibere aequationes in loco he-
 liocentrico et geocentrico n, β datas. Et saltem inspicimus
 totam operationem, tantummodo factorum pro $d\pi$ evolvere
 volumus, ubi π est longitudo Perihelii.

Si retinemus ibi assumptas significationes quantitatuum
 A, B, C, a, b, c , et si nominamus a' semiaxim majorem, erit

$$x = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v} \cdot \sin a \sin(A+v+\pi-k)$$

$$y = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v} \cdot \sin b \sin(B+v+\pi-k)$$

$$z = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v} \cdot \sin c \sin(C+v+\pi-k)$$

Si nunc brevitas causa ponitur

$$A+v+\pi-k = A', B+v+\pi-k = B', C+v+\pi-k = C'$$

$$\text{invenitur } \left(\frac{dx}{dn}\right) = x \operatorname{ctg} A', \left(\frac{dy}{dn}\right) = y \operatorname{ctg} B', \left(\frac{dz}{dn}\right) = z \operatorname{ctg} C'$$

et eadem ratione

$$\left(\frac{dx}{dv}\right) = x(h + \operatorname{ctg} A'), \left(\frac{dy}{dv}\right) = y(h + \operatorname{ctg} B'), \left(\frac{dz}{dv}\right) = z(h + \operatorname{ctg} C'), \text{ ubi } h = \frac{\varepsilon \sin v}{1+\varepsilon \cos v}$$

Si igitur ponimus, uti prius $\frac{a^2}{r^2}(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = f$, invenitur

$$dx = \left\{ \frac{dx}{d\pi} - f \left(\frac{dx}{d\phi} \right) \right\} d\pi$$

$$\text{erat } \frac{4-y}{x-y}$$

$$d\alpha = \frac{1}{r} \cos \alpha - d\alpha \sin \alpha$$

$$d\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

[illegible][illegible]

1864	Comp. mod. Holo.	Comp. H	Comp. Inclination
Aug. 11	11° 50' 59"	32.3 12' 44.3	+5° 33' 30".1
28.	11 46 17	33.3 31 20.6	5 22 10.4
29.	11 41 35	33.3 19 58.1	5 10 29.9
30.	11 36 54	33.3 8 35.9	4 18 42.7
31.	11 32 13	33.2 54 15.7	4 40 45.7

7. Hæc observationes resumuntur nunc in geocentricis longitudinibus
et latitudinibus et his ultimis, resumuntur nunc tabulis vel sum-
marum elementis. Derivæ hæc geocentricæ longitudinibus et
latitudinibus, a tabulis ~~hæc~~ in geocentricis elementorum
pro loco ore observati sunt. Hæc Elementa sunt

Syncha 1803 $241^{\circ} 29' 32''$ *Meris Lacerta*
Emmexis majoris 0.4423790
Longi tunc nati 1803 $172^{\circ} 28' 13''$
Quasi orbis $34^{\circ} 38' 1''$

Excentricitas 0.2457396
 Longitudo Perihelii 1803 $121^{\circ} 1' 34'' 4$
 Quodlibet tropicus notus $7^{\circ} 40' 04'' 46$

Si quorundam et ex illis observatis locis, et ex his circumstantiis, per
 centrica longitudo et latitudo; obtineamus

vera observ. longitudo			vera observ. latitudo		
$11^{\circ} 7' 42'' 29'' 3$			$+ 15^{\circ} 19' 50'' 0$		
$11 \quad 7 \quad 42.7$			$15 \quad 19 \quad 21.8$		
$11 \quad 7 \quad 44.0$			$15 \quad 6 \quad 41.3$		
$11 \quad 8 \quad 56.5$			$14 \quad 59 \quad 54.1$		
$11 \quad 6 \quad 40.59.7$			$14 \quad 52 \quad 54.3$		

Correctio elementorum

in longitudine	in latitudine
$+ 7' 24'' 2$	$- 2' 16'' 3$
$+ 7' 24.7$	$- 2 \quad 11.8$
$+ 7' 29.1$	$- 2 \quad 13.5$
$+ 7' 29.4$	$- 2 \quad 13.1$
$+ 7' 30.1$	$- 2 \quad 18.1$

in medio $+ 7' 28.1 = d\lambda$ (elementa minus) $- 2'' 14'' 7 = d\beta$ (elementa plus)

Quoniam autem per singula tempora, in perihelium nostra per. temp. circa se
 corrigenda ex elementis calculata vera longitudo et latitudo
 29. Aug. et 30. Aug. per medias correctiones $d\lambda$, $d\beta$, per quod ob,

tenemus med. temp. Merol. correctio longitudo correctio latitudo

Aug. 29. $11^{\circ} 41' 35'' = t$, $11^{\circ} 7' 46'' 8 = \lambda$, $15^{\circ} 6' 40'' 1 = \beta$
 30. $11 \quad 36 \quad 54'' = t$, $11^{\circ} 6' 36'' 22.2 = \lambda$, $14 \quad 59 \quad 53.3 = \beta$

Differentia $23^h 55' 19'' - a$ $- 15 \quad 24.6 = \Delta\lambda$, $- 0 \quad 46.8 = \Delta\beta$

Longitudo $\odot + 180^{\circ} + 20'' 5$

$11^{\circ} 6' 18' 54'' 1 = L$

$11 \quad 7 \quad 16 \quad 49.3 = L_1$

$+ 57 \quad 55.2 = \Delta L$

$- 15 \quad 24.6 = \Delta\lambda$

$L - \Delta\lambda = b = 73' 19'' 8$

Nimirum 29 Augusti erat longitudo planetæ ex elementis

$11^{\circ} 7' 41' 18'' 5$

$d\lambda = + 7' 28'' 3$

$\lambda = 11^{\circ} 7' 41' 46'' 8$

Latitudo $15^{\circ} 8' 54'' 8$

$d\beta = - 2 \quad 14.7$

$\beta = 15^{\circ} 6' 40'' 1$

et eadem ratione pro 30. Augusti

Ut ex his derivetur tempus oppositionis T , est

$$b:a = \lambda - L : x \quad x = 11^h 15' 1''$$

$$t = 11 \quad 41 \quad 35$$

$$T = 30. Augusti \quad 4^h \quad 56' \quad 36''$$

vel etiam $b:a = \lambda - L : y, \quad y = 6^h \quad 40' \quad 18''$

$$t_1 = 11 \quad 36 \quad 54$$

$$T = 30. Augusti \quad 4^h \quad 56' \quad 36''$$

et pro hac tempore T quæritur geocentrica et heliocentrica longitudo

do $L' = \lambda$ et geocentrica latitudo sequenti modo.

Longitudo $a:\Delta L = T-t:x, \quad x+L = 11^h \quad 2^o \quad 0' \quad 40.0 = L'$

vel $a:\Delta L = T-T':x', \quad L'-x' = 11^h \quad 0' \quad 40.0 = L'$

$a:\Delta \lambda = T-t:x'', \quad \lambda - x'' = 11^h \quad 0' \quad 40.0 = L'$

$a:\Delta \lambda = t_1 - T':x''', \quad \lambda + x''' = 11^h \quad 0' \quad 40.0 = L'$

Latitudo

$$a:\Delta \beta = T-t:y, \quad \beta - y = 15^o \quad 1' \quad 46.8 = \beta'$$

$$a:\Delta \beta = t_1 - T':y', \quad \beta + y' = 15 \quad 1 \quad 46.8 = \beta'$$

Adhibemus igitur quæ resultatæ finale omnium observationum, heliocentrica oppositiōis 30. Aug. $4^h \quad 56' \quad 36''$ med. temp. Martiani

heliocentrica vel geocentrica longitudo $Palladis = 11^h \quad 2^o \quad 0' \quad 40.0$

geocentrica latitudo $= +15 \quad 1 \quad 46.8$

et ut et alii sint in statu, calculum harum observationum cum aliis elementis repetendum; adijungi solent adhuc elementa præcedentis calculi.

Illæ erant: Apparens obliquitas $23^o \quad 24' \quad 55.5$

Parallaxis altitudinis $Palladis \quad 2.4$

Aberratio in longitudine -12.4

in latitudine -5.2

mutatio longitudinis -13.7

Aliqui Astronomi solent indicare quæ apud resultatæ ab observatoriis oppositiōnum, heliocentricæ latitudinum β et correctiones tabularum in heliocentrica longitudine et latitudine seu cl , et db , seu per quantitates b , db præsupponunt distantiam planetæ a Sole ζ quæ notatur et quæ hoc non perficere solum habeat, melius erit neque quæ, sed etiam b , db

Nimirum habemus $\sin b = \frac{1}{2} \sin \beta$, ubi pro β per orbita geocentrica latitudo ponitur, et pro b per orbita

$ab = \frac{1}{2} \cos(\beta - b) \sin \beta + \frac{1}{2} \sin(\beta - b)$ (ubi β et b in quoque) correctiones $d\beta$, db autem sunt, uti ex praecedentiis ricavimus, per observationes ipsas immutatae. Data, hinc posuimus ibi datas $d\beta$, db hinc aequationes conditionales pro $d\beta$, db evolvere et resultatis adiacere.

Pandem quoque notes posuimus, nostras datas expressiones suppetere, quos β data, singula elementa β , π , ϵ , per comparationem cum observationibus corrigend, si agnosceretur ad quae errorum; hinc operationem applicavit prioris Astronomi praecipue apud planetas; plura tunc adsumus in β π , ϵ nomina celeb. Lalande et in illa cell. Schubert.

Atque quos adiacere posuimus tabulis matris et patris planetarum, secundum Laplace "Exposition de syst. de monde 1825."

1. Duratio sideris revolutionis

Mercurius	87.9692880
Venus	224.7008869
Terra	365.25689835
Mars	686.9796458
Jupiter	4332.5848212
Saturnus	10759.2198174
Uranus	30686.8208296

2. Semiaxes majores orbitarum

Mercurius	0.3870987
Venus	0.7233316
Terra	1.0000000
Mars	1.5236923
Jupiter	5.202746
Saturnus	9.5384861
Uranus	19.182390

3. Ratio excentricitatis ad semiaxin pro 1801

Mercurius	0.20561494
Venus	0.00686844
Terra	0.01685318
Mars	0.0933070
Jupiter	0.0481621
Saturnus	0.0561505
Uranus	0.0466108

4. Media longitudo pro initio anni 1801.

Mercurius	182.15647
Venus	11.93259
Terra	111.28179
Mars	71.24071
Jupiter	124.68251
Saturnus	150.35354
Uranus	197.55589

5. Media longitudo Perihelii pro eodem tempore

Mercurius	82.6256
Venus	148.0349
Terra	116.5521
Mars	369.3323
Jupiter	12.3810
Saturnus	99.0647
Uranus	156.1500

6. Inclinatio orbis pro 1801.

Mercurius	7.8658
Venus	3.76807
Terra	0.00000
Mars	2.85446
Jupiter	1.46029
Saturnus	2.7429
Uranus	0.86063

7. Longitudo nodi ascendens

Mercurius	51.0657
Venus	83.2262
Terra	0.0000
Mars	53.3244
Jupiter	109.3762
Saturnus	124.3819
Uranus	81.1035

Novi Planetæ.

1. Medie revolutiones

Ceres	1681.3931
Pallas	1686.5388
Juno	1592.6608
Vesta	1325.7431.

2. Semiaxes majores orbitarum

Ceres	2.764245
Pallas	2.742686
Juno	2.669009
Vesta	2.364844

3. Ratio excentricitatis ad semiaxim majorem

Ceres	0.078439
Pallas	0.241648
Juno	0.257848
Vesta	0.089130

4. Meridiana longitudo pro anno 1820

Ceres	136.8461
Pallas	120.3422
Juno	222.3989
Vesta	309.2917

5. Longitudo Perihelii

Ceres	163.4724
Pallas	134.5454
Juno	59.5442
Vesta	247.2853

6. Inclinatio orbitarum versus eclipticum pro a. 1820

Ceres	11.8044
Pallas	38.4244
Juno	14.5215
Vesta	7.9287

7. Longitudo nodi ascendens pro anno 1820

Ceres	84.6554
Pallas	191.8416
Juno	190.1421
Vesta	114.6908

Luna

Phaenomena generalia Lunae

Luna formam specialem habens, et proprium celestium, seu ut planetas secundarios, qui se distinguunt a primariis per id, ut eorum corpus centrale non sit Sol, sed aliquis planeta, quem in suo corpore comitantur, ita, ut tantummodo mediate rotentur circa Solem, ex hac ratione etiam accipitur nomen Planetarum secundariorum seu Satellitum. Cyclois, quam haec corpora in spatio absoluto describunt, est adhuc magis complicata, quam illa planetarum.

Nos nominamus tantummodo quatuor planetas, circumdatos satellitibus. Mercurius et inferioris planitae non habent satellites, nam de Mercurio satellites (Veneris non est confirmata).

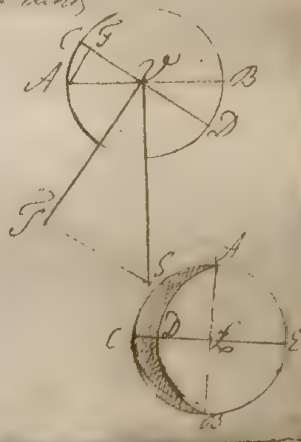
Præcipuum phaenomenon, quod se obtulit hominibus, certe fuerunt Phases Lunae, seu differentes formas, quas representat nobis in diversis partibus suæ orbis. Quum singulis fuerit per quatuor dies, illa apparet 20° - 30° a parte orientali. Solis sub forma incurvati argentei filii. Magnitudo huius filii semper augetur in ratione, in qua Luna orientem versus a Sole discedit. Post quinque dies Luna jam devenit semicircularis, si elongata est 90° orientem versus a Sole, est primus quadrans (quadratura). Ejus visibilis pars diu versus occidentem est terminata per semiperipheriam eius, aut, ad orientem per diametrum. Ista linea recta semper magis et magis incurvatur, illuminata pars semper crescit, donec post 14 dies sit directe opposita Soli, et appareat circularis, est plenilunium. Luna continuat suam viam orientem versus, limbus occidentalis acquirit formam arcus elliptici, et pars illuminata eadem ratione decrescit, uti fuerit augmentum prius. Post 19 aut 20 dies illa apparet qua semicircularis, cuius diameter est directa versus occidentem hoc est ultimus quadrans; Luna est elongata a Sole 90° versus occidentem seu 270° versus orientem. Pars visibilis semper imminuitur,

et post 24 dies, quando lunam distat $26^{\circ} - 36^{\circ}$ a Sole, iterum
apparet uti ab initio sub forma argentei fili, cujus cornua sunt
circa occasum reversus, in opposita parte Solis. Deinde illa
evanescit in radios Solis, cui semper magis adproquinquatur, et
post 4 aut 5 dies, illa iterum apparet ad orientalem partem Solis,
et praecedentia phenomena in eodem ordine revertuntur. (Clavum
est, in hoc intervallo, quando luna erat invisibilis, illam fuisse
inter Solem et Terram, vel illam fuisse in conjunctione cum
Sole, et hoc nominamus novilunium).

Per hoc jam convincere possumus, lunam esse corpus opacum, quod
accipit suam lucem a Sole; haec veritas jam periculis stuporibus
erat nota. "La lune n'a d'autre lumière que celle qu'elle reçoit
du Soleil." Almagest Lib. IV. Cap. I edit. de M. M. Halma et Delambre. p. 213.
Lunae ellipticas luminis, qui modo major modo minor est, compre-
bat, lunam, sui partem quae partem obscuram Terrae, esse corpus
sphaericum, in quo cornibus terminans huius apparet ut ellipticus.
Vidimus partem illuminatam lunae semper esse obversam Soli,
et ejus incrementum vel decrementum esse exacte modifcare
secundum distantiam a Sole: ex quo sequitur, illam habere suam
lucem a Sole. Sed dantur phenomena, quae hoc adhuc clarius de-
monstrant. Observationis longitudo et latitudo huius, quando
accedit ad suam conjunctionem cum Sole, dantur varia-
tiones positionis, ex quibus potest calculari momentum con-
junctionis, et latitudo lunae in hoc tempore. His positis so-
lite videmus, si haec latitudo lunae minor est quam summa
diametrorum Solis et lunae, locum habere eclipsin solarem.
videmus discum nigrum qui transijt per Solem ab occiden-
te orbem versus. Distantia, celeritas et magnitudo huius disci,
quae sunt perfecte conformes motui et diametro lunae, eviden-
ter probant, hoc corpus opacum esse lunam ipsam, quae tran-
sijt inter Solem et Terram, nobis obvertit partem obscuram,
quia haec pars non potest accipere aliquam lucem a Sole: ex
quo sequitur, lunam non lucere per se ipsam.

Observationes manularum Luna quae comprobant hanc veritatem. -
Nos videmus semper eandem manulam in parte altiora, & reflexum
lumen (a dextera) terra cui parit visibiles; nam eandem partem est visibilis
si de nos in visibilibus, & quod hoc non esse propriam Luna. Si
per se vis huius corporis, apparet notis huius elevationibus et cavitatibus
sed, tempore plenilunio, quando est diametraliter opposita soli, has
cavitates videmus in tota sua profunditate illustratas; quia radii
solis incidunt perpendiculariter. Quia et a dextera, illae ele-
vationes, quae circumstant illas cavitates, projiciunt umbram; pro
umbram semper ad oppositam partem solis, & prolongant in ratione
in qua solis lumen est magis vel minus ab eis respiciendo solis.
Eclipses Luna etiam comprobant hanc veritatem. Luna terra
est tota temporis huius in eclipsi, terra accipit dicitur projicere in
eius plano umbram conicam ad oppositam partem solis; ex hac
sequitur, si luna accipit suam lucem a dextera, lunam plene esse
visibilem, & quia latitudo est admodum parva, et hoc rursus
accidit, & si plenilunio, & tunc in uno huiusmodi rationem; luna, in-
dit, suam lucem sine latitudine vel ex parte, et umbra transit per lunam
a dextera extramorem, quia luna intrat in umbram terrae
a dextera huiusmodi ut videtur. Particularia de eclipsibus sub-
iungimus, non tam series esse eorum veritatem causam.
In omnibus locis terrae, ubi luna eclipsata videtur, hoc phenomenon
uniforme est idem; et apparet eandem rationem, quae probat, hoc phenom-
enon non esse prodeum per aliud corpus inter lunam
et terram, quia tunc propter paritatem antecorpus corporum, semper
fuit et iniquitudo eclipses, et sunt diverse pro diversis locis terrae;
hoc ergo est verisimile et typis, obscuritas, in umbra, quae legit
Sturani. Eandem rationem, luna, non magis lucet magna luce, tunc
est, semper obscurata, et ipsa coarctat invisibilis si terra est, sita
ita inter illam et solem, et nos videmus intra hanc manulam luna
nam post alteram in umbram. - Eclipses solares, e contrarie,
apparent diversa ratione, in diversis locis; sunt enim totales in
uno loco, in altero loco non est eclipsis. In regionibus occidentibus
videntur prius, quam in orientalibus etc. Huius effectus parallelus
nos probat, non esse solum qui perit suam lucem, sed aliquod
corpus, quod debet esse multo vicinius terra, quam sol, legere hoc affirmat;

duos vicinos, hoc ostendit esse lunam.
 Eclipses nobis dant ideam generalium utriusque orbis lunaris.
 Quod eclipsibus Solis luna est sita inter Solem et terram,
 in istis luna, illa est opposita soli; hinc non est nec planeta
 superior nec inferior, et ejus orbita includit ~~terram~~ terram.
 Sed non Solem. Parallaxis eius est fere unus gradus: ex quo
 sequitur, lunam esse fere 400 vicibus, viciniorē terrae, quā so-
 lem, et terram esse punctum centrale ejus orbis, quia paraxi-
 sis nullis aliis variationibus est obnoxia, quam illis parvis quae
 veniunt a motu elliptico. Hinc quoque possumus concludere di-
 stantiam lunae ex ejus eclipsibus. Magnitudo et distantia Solis
 et lunae determinant communem umbrae quāvis terrae partem. Latitudo
 lunae durante eclipsi, dat ejus distantiam ab axe mundi coni, et
 per observationem eclipsis cognoscimus chordam eclipticis um-
 brae, quāvis percurritur luna, quae comparata cum latitudine
 lunae, dabit diametrum umbrae, et hinc consequenter distantiam
 lunae a terra. Etiam invenimus distantiam lunae in omni-
 bus eclipsibus fere eandem. Terra igitur est verum punctum
 centrum orbitae lunaris: observationes nobis dant immo-
 diatē, rerum motum, lunae et non necessariū omnes ejus calculi,
 qui reddunt theoriam planetarum adeo complicatam, quia hi
 non videntur e centro eorum orbitarum. Sed irregularitates
 motus lunae, productae per actionem Solis, exigunt adhuc magis
 complicatos calculos, qui continentur in Astronomia physica.
 Sint S, T, V , loca Solis, terrae et planae; lineae illuminationis
 est ellipsis cujus axis minor se habet ad majorem ut
 $100:1$. In triangulo STV , $TS=a$ semper est datum:
 ascendendo dū $TV=r$, quod fere est 100 (procul) et elongatione lunae
 a sole ST , habebimus angulum STV , et hinc quolibet
 limitem illuminationis. Idem triangulum supponi-
 tat medium, inveniendo distantiam lunae, si illa soli
 est data, et vice versa: ad hunc finem d. heret esse quāvis
 exactissime observatus limis illuminationis, quod
 est admodum difficile. Si $ADBE$ est pars illumi-
 natae lunae $ACBE$, distantia communis, AB dabit adin-
 majorem = $2M$ ellipsos ADB , si mune mensurata est
 chorda



chorda DE , perpendicularis ad AB in L et subtrahendo semiasiam
 $LE = m$, nos habebimus semi axem minorem $LD = n$. Nosimus igitur
 $\frac{m}{n} = \cos SW$ (prior figura) et SW per observationem hinc
 $SW = 180 - T - V$, ex quo $SW = \frac{L \sin T}{\sin V}$ vel $LS = \frac{L \sin V}{\sin T}$. Calculus
 est simplicior, si possumus observare incrementum, primae aut ultimae
 (quadraturae) lunae, ubi ellipsis evadit linea recta, ita ut n et
 $\cos SW$ evadant aequalis zero: tunc habemus $SW = 90^\circ$, $SW = LS$,
 et $LS = LV$. -- Hoc igitur dat distantiam lunae, in ratione
 ad distantiam Solis: si vellemus absolutam distantiam hanc in
 ratione ad distantiam Solis haberemus scire parallaxin Solis aut lunae.

Prima, quae determinatu est admodum difficilis, propter suam
 parvitatem, antiquioribus Astronomis erat incognita, sed paral-
 lasis lunae, ab eis satis bene erat determinata. Aristarchus se
 servabat aequatione $LS = \frac{LW}{\cos V}$ ad deducendum parallaxin Solis
 ex illa lunae, et paulo deinceps, inventa est per hanc me-
 thodum parallaxis Solis a $15'' 30''$, quae multum a veritate differt.

Vnde debet determinari per observationes elementa orbitae lunae. Ex eo
 tempore, quo leges celeb. Keplerianae confirmatae sunt per observationes anni-
 uum planetarum, naturalis erat eorum applicatio etiam ad Solis motum.
 Applicatio hanc signum ad nihil aliud servit, quam ad dirigendum
 nos ad investigandum quoad motum lunae, quae diu dudum, ante
 hoc leges, quae applicabiles sunt ad hoc astrum. Alii tamen modo
 sermo esse potest de duabus primis legibus Keplerianis, quia circa
 motum in astra, quae revolvuntur circa commune corpus
 centrale. Vos quaerimus elementa orbitae lunaris in ordine h.
 quatuor, qui apparet n. a maxime utilitatis.

1. Motus motus sui Periodus media mensis.
2. Loca, in quibus motus est vel maxime vel minime rapidus, quod ex obser-
 vatione apparet.
3. Maxima differentia veri motus, seu excentricitas et aequatio centri.
4. Maxima elongatio lunae ab ecliptica seu inclinationis.
5. Eclipticae communis sectionis, seu nodorum antecorum planorum.
6. Inclinationis sui Pericynthas, et magnitudo lunae.

Tres sunt inequalities quae proveniunt a motu elliptico, tamen
 quae

quas habet alias, quæ veniunt ad observationem solis, & æquum
aliquas sunt ita considerabiles, ut solæ observationes illas jam
deserviant antiquioribus & astronomis.

Cum terra sit in centro orbis lunaris, facili erit describere
re ejus electa methodo generali, et Hipparchus, & Ptole-
mæus hoc fecerunt magna cum cura. Observationes celestium
corporum, quibus illi principes ætheri superstruuntur, hanc opi-
oriam, promittunt illis ad determinationem variationum ma-
ximam, celeritate hanc in diversis partibus, & ad orbem,
ejus latitudinem. Invenimus quoque, lunam habere circulum
latens 5° et aliam $1^\circ 20'$, ejus axis habere motum retrogra-
dum $19^\circ 20'$ et ejus orbem esse inclinatum respectu æquino-
ctialis sub angulo 5° . Omnia hæc bene concordant cum hactenus
observationibus, uti videbimus. —

Diversi menses.

Tempus, quod requiritur ad ^{perficendam} integram revolutionem,
vel tempus, quod perducit lunam ad eandem priorem positionem
vocatur *Mensis*; et dantur hæc differentes menses, quod dicitur,
per methodum determinandi positionem lune. Unum punctum viget
a quo debemus determinare ejus positionem, vel circa quod mu-
tuatur ^{revolutio} revolutiones, est terra, corpus centrale ejus orbis;
sed nos possumus, lunæ motum geocentricum referre ad diversa
puncta celi, et si hæc puncta sunt immota, tantummodo re-
sultat differentia relative ad initium et ad finem ejuslibet
mensis, et nulla quoad durationem; sed si habemus differentes
motus, etiam permanant menses diversæ durationis.

Latius meritalis mensis est tempus, quo indiget luna ad
describendum angulum 360° circa terram, vel quod rediit ad
nam ad eandem fixam puncta celi. Verus mensis est tunc tem-
pus quod perducit lunam ad eandem positionem initii, & hoc
fixa sunt *Æquinoctialis*. Sed quoniam positio orbis ejus sine
puncta sit considerabilibus variationibus, sequitur, lunam, in
quavis revolutione, plus vel minus appropinquari circum stellæ

ita ut non accurate veniat ad eandem. Exstantiam respectu
Sollarii. Et si dicitur ut sit, cum tunc veniat ad eandem
locum, et nominatur mensis sideralis, in quo nullum est motus
conjunctionis cum Sole, cum tunc sita cum Sole. Hic fixa
est mensis sideralis tunc percurrit plus quam 360° longi tunc
quia puncta equinoctialia habent motum retrogradum.
Revolutio respectu quatuordecim signorum, quod est mensis periodicus,
hic est brevior, cum mensis sideralis tempore quod requirit
luna ad describendum arcum, quem percurrerent puncta anni,
nascitur in uno et eodem periodo.

In descriptione unius mensis luna, quum jam erat elongata
a Sole 180° iterum illi appropinquat donec veniat in con-
junctionem, itaq; elongata est rursus 360° quoad eandem direc-
tionem ab occidentem orientem versus, vel luna fecit unam
integram revolutionem respectu Solis. Talem revolutionem
semper ellapsum ab una conjunctione cum Sole vel ab una
oppositione ac iterum, vocatur Mensis, quod dicitur, mensis
lunaris vel lunaris. Facile videtur hunc mensum
esse longiorem quam mensum sideralem tempore quod re-
quirit luna ad describendum arcum, qui est aequalis motui
proprio duranti uno mense synodico.

Si tamen apsidum lunae sit immobilis, ejus anomaliam cre-
scit 360° in uno mense siderali, sic hoc linea habet motum
et quidem celerem et admodum rapidum, necesse igitur
quoad apsidem erit eo longior quam mensis sideralis. Mensis
anomalisticus nunciat tempus unius apogei vel peri-
gei ad alterum, in quo anomaliam lunae augmentatur 360° .

Item est quoad lineam eclipticam, quae habet motum retro-
gradum: revolutio luna respectu nodorum nominatur Men-
sis draconicus, Draconiticus. Et est tanto brevior quam
mensis sideralis.

Si querimus durationem mediam mensium vel periodum
in qua locus medius luna variat 360° . Denominationes
quae sunt. Latini vocant mensibus, sunt pro mense synodico,

pro mensis synodico, mensis (μηνς), seu revolutio elong. si. m. (ἐποχης); in
mensis periodico, revolutio, seu revolutio longitudinalis (ἀνομαξισσος) (μηνς)
(ἀνδρομαξισσος, ἀνδρομαξισσος); pro mensis draconico, revolutio latitudinis (ἐπιδρακονισσος)
(ἀνδρομαξισσος); pro mensis draconico, revolutio latitudinis (ἐπιδρακονισσος)
Mensis synodicus pro consummatione una polissimum est notatu dignus,
et ejus periodus, uti et subdistinguitur se distinguunt per motus proprios, tali
modo, ut et sine apparatu in astronomico observari possint, et sine con-
jectura huiusmodi prius quam eorum, qui iam reflexiones et cognoscunt
per astronomiam, praestantur, et ad hunc modum, quod in
mensis revoluzione determinata est. Motu huius, seu novilunium (la
novilunium) primo visibile videtur, apud antiquissimas nationes, talis
plurimum admodum fuerat. Tempus inter duo talia festa, et novilunia
davit, longitudinem mensis synodici. Quod raro accidit, ut in uno
anno non locum haberet eclipses solis, vel lunae, haec eclipses erant
mediam admodum facile, ad determinationem mensis synodici, quod erat
eo accuratius, quam in prophetis brevitate harum periodorum, haec ab-
terminationes saepe recte, possunt. - Antiquiores Astronomi igitur iam
determinant longitudinem huius mensis cum praedictis, sua se-
re nullam correctionem admittit. Una vel dua revolutio,
nos iam sufficiens ad videndum, mensis synodici esse fere 29 1/2
dierum; et haec determinatio iam sufficiens ad comparandas eclipses
quoque admodum distans unam cum altera, sine timore erroris com-
mittitur in numero interceptorum mensium; quod igitur dedit et huius-
modi admodum exacta. Si novilunium cadat in primum diem lunae,
revertitur sequenti anno die vigesimo, et sic porro ita ut semper 1) dies
tardius locum habet in annis 365 dierum; annus igitur consistat
fere ex 12 mensibus synodicis et 11 diebus, quinumerus dierum sub no-
mine quatuordecim in calendaris occurrit. Continuando has observa-
tiones, invenit, quod post 19 annos novilunia accurate in eorum-
dem anni addere, vel 19 annos, clarescit accurate 235 menses synodi-
cos consistere. Haec observatio, quam Graeci adscribunt Metoni, qui
visit 430 annis antea quam videretur, illis apparuit tanti momen-
ti ut computus huius periodi 19 annorum litteris aureis in pu-
blici locis expositus erat; hinc quoque nunc in calendaris numerus
aureus, et huiusmodi huiusmodi nominatur. Subterea has periodos
et erronea duabus horis, quia nimirum sunt longitudines anni
assumptas 365 1/4 dierum, ex quo sequitur, longitudinem mensis syno-
dici = 29 diebus 12 horis 44 min. pro 29.5 mensibus, quod revolutio est 29 1/2 majus
quam

quam revera debet esse, igitur probabile est, quam jam habereant
magis exactam cognitionem longitudinis mensium, hanc periodum tantum,
modo ad facilitatem calculum posterum reliquorum fuisse applicatam.
Ut acquireremus justam ideam, debemus noscere diversas periodos, in
quas antiquiores comprehendebant totum motum Solis, lunae, et apocri-
dum et nodorum, et de quibus sermo erit inferius.

Clavis pluribus millebus annorum possumus per comparationem
priorum eclipsium cum novissimis observationibus determinare nun-
tum maximam precisionem. Antiquissima observatio quam nobis
transmisit Ptolemaeus: Almag. L. IV. cap. 6. 2. Eclipsis lunae, 10 Martii
anni 720 a. chr. n. $6^h 48'$ temp. Paris. Luna observati loci hinc sunt
verae longitudines, et hic medius motus quotiens, duae hae observationes
comparari debent, in quibus medius locus lunae erat idem, hinc alii et
aequalis centri, et quae anomaliam erant addend. Talis observatio est
eclipsis lunae 9. Septemb. 1777. $6^h 2'$ ubi luna habebat fere eandem
stationem respectu apocri, ubi in prima. Luna igitur erat
quoad suum medium motum ultra vice in oppositioe cum soli,
vel finivit eorum numerum medianam syzygiam revolutio,
ultra. Intervallum temporis est: 2437 anni et 174 dies, minus $16'$,
inter quos sunt 269 anni intercalares: hinc hoc fuit 890284. 968555... dies.
Opus longitudinis mensis, quam jam determinaverunt antiquiores,
invenitur, ipse eclipsos 30148 mensis synodicis in hac intervallo
to ex quo deinde concluditur longitudo mensis synodici = $29^d 12^h 44^m 2^s 993$
ex his eclipsibus etiam invenitur iate periodum mensium, et quidem
magis exacte quam synodicum invenire possumus. Nam
quum hic motum lunae relate ad Solem et hinc motus amborum
corporeum includit, determinatio ejus mediae longitudinis, sup-
ponit anomaliam Solis ubi et lunae, esse eandem in ambobus apocri-
da locis ubi. Et pro mensis periodico, qui tantummodo concernit
motum lunae, locus Solis est indifferens, si hanc rem modo acci-
mus, motus lunae erat eadem. In observationibus
longitudinis lunae erant $5^s 21' 28''$ et $11^s 2' 34''$. Per longitu-
dinem mensis synodici, equidistantem per se invicem, quodcum
invenitur, ipse eclipsos in hoc intervallo 35285 mensis periodicos,
quibus adhuc addi debet differentia amborum longitudinum
 $6^s 6' 8''$. Haec ratione invenitur longitudo mensis periodici = $29^d 12^h 43^m 4^s 9$
Melius erit sumere pro basi huius calculi, motum medium.

long in longitudine, qui 24 exacte natus per abhorrerent 2400
annorum (Vid. Delambre T. II. p. 315. 316. 317.).

Hic motus est, pro 100 annis Julianis, vel pro 36525 diebus, aequalis
1236 circulis + 10° 45' 43.5" = 1236.8552875 circulis.

Mensis periodicus hinc erit = $\frac{36525}{1236.8552875}$ diebus, vel dividendum per

3 et multiplicando per 32 numeratorem et denominatorem

$\frac{389600}{14289.539}$ et iterum abbreviando per 100, $\frac{432.888...}{15.84421}$ Divisio parata

Dat mensis periodicum = 27.3215873880704 = 27^d 7^h 43' 4".77832928256

Secularis motus Solis est = 100 circuli + 45' 45" ex quo resultat motus

secularis hinc respectu Solis = 1236 circulis + 30° 46' 58.5" =

= 44526.4° 11625. Duratio unius revolutionis synodici hinc est

$\frac{360 \times 36525}{44526.4 \times 11625}$ dies vel multiplicando per 800 et dividendo per 11 numeratorem

et denominatorem, $\frac{95640000.0000}{3088306.3}$, quales dabit mensis

synodicum = 29.530588529 dies = 29^d 12^h 44' 2".84978.

Si secularis motus punctorum aequinoctialium = 5010" = 1° 23' 30"

subtra hinc ab illo long, differentia erit motus sideralis in 36525

diebus = 1236 circuli + 306° 49' 13.5" = 28875989.225, quod dat revol-

utionem sideralem = $\frac{21600 \times 36525}{28875989.225} = \frac{21600 \times 1461}{1155039.569} = \frac{3155760000}{1155039.569}$

Revera dividendo erit mensis sideralis = 27.32166139322922 dies

= 27^d 7^h 43' 11".5443751. Secundum Ptolemaeum est mensis

synodicus 29^d 12^h 44' 33" hinc fere dimidio minuto secundo major;

mensis periodicus secundum eundem 27^d 7^h 43' 2".25 hinc vero

major duobus et dimidio minutis secundo, quia ille supponebat motum

medium Solis vero majorem.

Motum hinc et singulas revolutiones esse diversis magnitudinibus, patet

patet ex eo, quod antiquiores Astronomi minimorum hanc magni-

tudinem sequenti modo. Quam qualis est oppositio, hinc, maxime citis re-

fractis, parallaxis et refractionibus, exiget correctiones, quae sunt de his

ignotis erant, Astronomi autem hunc desequum hanc summae aequum, erant

astronomicis et ipsum hinc in par, parallaxis, non habet infirmum.

Medium eclipsas eis erat monstrum, ubi luna erat opposita soli

per plenam et hinc, utrum totum, hinc, omnia theoria Solis cum satis

notia erat. Hinc long, hinc observationum eclipsium hinc, reverso

erant ad figuram.

1. Intervalla inter eclipses non esse aequalia, et hanc inaequalitatem

motus synodici esse alius naturae et majorem, ut nobis explicari

per eccentricitatem Solis hinc, orbitam hinc, quae esse eccentricam

2. At in aequalitate, ubi v.c. maximum vel minimum intervallum

temporis inter duas plenitudo, non cadere in eandem regionem eorum

refertur

xxxxxx 27759, quod fuit 76 annos julianos, 940 menses synodicos plus 6^h, 1816 menses periodicos plus 6^h, 1808 menses anomalisticos minus 16^h, et 4620 menses draconicos plus 2^h 13^h. - Maximus error est iste, qui respicit motum apsidum.

Una antiquissima periodorum est nota sub nomine periodi Chaldaei, 6585¹/₃, vel 18 annorum julianorum 10 vel 11 (quod fuit 4 annos bis, sexles continet); Ptolemaeus nominabat hanc periodum Tempus periodicum (Χρονος περιδικος. Almag. IV. c. 2. p. 216). - Hae periodus proprie continet 6585¹/₃ 42' 35". 50183, quod fuit primum observatum antiquiorum Astronomorum 223 menses synodicos, 239 menses anomalisticos, 242 menses draconicos et 241.03 menses periodicos; per primum exactas observationes hoc fuit 223 menses synodicos, 239 menses anomalisticos minus 6^h 12', 242 menses draconicos minus 54' et 241 menses periodicos plus 18^h 21'. Ad exprimendam hanc periodum numero integro, haec periodus fuit triplicata et nominata Evolutio (εξελυσις). Probabiliter ex periodo chaldaica orta est illa Metonis. Quum nimirum post 18 annos, novilunia accidebant 11 tardius, naturaliter erat, addere 12 novilunia seu annum lunarem 354 quod cum istis 11 diebus formabant periodum 19 annorum.

Hipparchus haec periodus non apparebat admodum exacta, qui, comparando suas observationes cum illis Chaldaeorum, invenit minimum numerum dierum, qui reducebat eclipses ad eorundem menses et motus (ex 1605 μγβι καὶ ex 1605 κινυμαβι ibidem) q. 12600¹/₃ vel fere 345 annorum, et hoc tempus continere 4267 menses synodicos, 4573 menses anomalisticos, et 4612 menses periodicos minus 2^h. Ex hoc resultat longitudo mensis synodici, adoptata per Ptolemaem, uno = $\frac{12600 \frac{1}{3}}{4267}$ vel 29^d 12^h 44^m 3^s. 26224 et longitudo mensis

anomalistici = $\frac{12600 \frac{1}{3}}{4573} = 27^d 13^h 18^m 34^s. 2108, quod non multum differt a modernis resultatis. - Post saltem periodum, eclipses iterum sequuntur in eisdem intervallis, sed non erunt ejusdem naturae et magnitudinis, nec accidunt eisdem diebus anni.$

Hipparchus Chaldaeos periodos substituit alteram secundum proprias observationes, 5923 mensium synodicorum et 5923 mensium draconicorum, vel fere 441 annorum et 103 dierum in ejus fine eclipses reperiuntur similis magnitudinis et durationis. - Ex hoc sequitur, menses synodicos et draconicos esse inter se uti 5923 ad 5923 (Ratio haec perfecte exacta)

Motus diurni et horarii lunæ, in longitudine, et respectu Solis, respectu
 apsidum et nodorum, ita uti eos Ptolemæus invenit (Hæc. l. IV. c. 3. p. 723)
 Tantum variationem mensis anomalistici = $24^{\circ} 13' 18'' 40.5$ et mensis dra-
 conici = $24^{\circ} 54' 51'' 35.75$. Prima est major $7''$ ultima solum $\frac{1}{2}''$ quam
 revera deberent esse.
 Si non videremus ad eclipses, quæ dependunt a latitudine lunæ, per
 generationem ad noviluniam et pleniluniam, quæ tantum modo depen-
 dent a synodica revolutione et anomalistica, etiam inveniri pos-
 sent periodi breviores, quæ non nimis ex parte essent. Quum v. l. re-
 meri mensium synodicorum et anomalisticorum, elapsorum in
 12600^{to} periodi Hipparchi nimirum 4269 et 4543, sunt divisi-
 les per 17, obtinemus pro Syzigiiis, quæ fere succedunt in eodem
 ordine et fere in eodem intervallis, periodum 17 vicibus brevio-
 rem, 7412.2 vel 20 annorum julianorum et 10^{to}, quæ continet
 281 menses synodicos, et 269 menses anomalisticos.
 Menses anomalistici et draconici determinabuntur inferius, quum
 supponant cognitionem motuum apsidum et nodorum.
 Menses synodici, invicem per comparisonem observationum an-
 tiquissimarum et modernarum, dimiduo minuto sciundo est bre-
 vior, quam ille Ptolemæi: ex hoc concluderet, quia ambobus ex ma-
 gno numero observationum conclusi sunt, mensis nunc esse
 breviorum, vel motum lunæ celeriorum. Comparando antiquissi-
 mam observationem cum modernis, nos habebimus motum median-
 lunæ in duabus epochis, si supponimus, illum infra hoc tempus
 nullas variationes subivisse. Sed si motus medianus continuus
 acceleratus vel retardatus est, observatio instituta in me-
 dio huius periodi, non concordabit cum calculo, qui institui-
 tus est cum suppositione motus invariabilis. Quæstiones
 quas Astronomi instituerunt relate ad observationes
 decimi, decimi septimi et ad initium decimi octavi seculi
 probant sine exceptione, accelerationem motus mediani lunæ
 ita uti in quolibet seculo luna percurrat fere $9''$ plus quam
 in seculo immediate precedenti. Hæc $9''$ quibus crescit
 motus medianus lunæ in 100 annis, vocantur æqualis seculi
 lunæ, quæ calculata est sequenti modo:
 Supponamus incrementum esse per observationes antiquissimas

mediam longitudinem mensis semper fuisse = M , et ob pro-
 tiones modernas dare actuale longitudinem = M' ; nomina,
 nus numerum mensium et ap. prout in hac intervallo
 in et faciamus $M - M' = N$. Quod autem est $N = 0''.5$ et
 intervallum inter Hipparchum et Mayer est 1900 ani-
 quae sunt 23500. mensis synodici, hinc $m = 23500$. Natu-
 rale est suppositio, accelerationem motus lunae, quae sit
 effectus vis constantis, quoque esse uniformem. Sane qui libet
 mensis immutatus eadem quantitate. Nominando hinc ex
 immutationem accipiet mensis, habebimus $\omega = \frac{N}{m} = \frac{0''.5}{23500}$
 $= 0''.0000212766$. Primus mensis erat M , hinc secundus
 $M - \omega$, tertius $M - 2\omega$, et infimus mensis = $M - (n-1)\omega$. Lun-
 na igitur perficiebat n revolutiones tempore $M + (M - \omega) + (M - 2\omega) + \dots$
 $+ (M - (n-1)\omega) = nM - \omega(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1)) =$
 $= nM - \frac{n(n-1)\omega}{2}$; si motus lunae nulli variationi esset sub-
 jectus, tantum tempus nM requireretur. Proinde in fine
 n mensium lunae descripsit, praeter n revolutiones integras,
 angulum φ qui respondet tempori $\frac{n(n-1)\omega}{2}$ vel fere
 $\frac{n^2\omega}{2}$. In centum annis n est = 1237, ex quo sequitur
 acceleratio secularis lunae $= 0''.0000106383(1237)^2 = 16''.248$
 in quibus luna percurrit φ'' . Calculato ita motu medio
 in uno saeculo, scimus lunam percurrere in saeculo sequen-
 ti φ'' plus, et quum percurreret in saeculo praecedenti φ'' minus,
 in duobus saeculis $36''$ etc. quia acceleratio secularis proportionata
 est quadrato temporis etc. Haec acceleratio φ'' est conformis novis
 tabulis celeb. Mayer qui eam prius supponebat φ'' . Pro epo-
 cha ubi acceleratio secularis est nulla, assumitur est annus 1700.
 Motus medius igitur, deductus e tabulis celeb. Mayer est ille
 decimi octavi saeculi, consequenter addi debuit φ'' pro 100 annis
 posterioribus post 1700, $2\varphi''$ pro 200 annis etc., et pro praee-
 dentibus eadem quantitas debet subtrahi. Nominando ut
 motum medium pro t annis, qui locum habebat anno 1700, et
 quum tabulae immediate dant. Et longitudinem medianum
 in eadem epocha, L, L' illas quae respondent epochae sequenti

$\left(\frac{t}{100}\right)^2$

aut procedenti illi anni 1700^{mi} t annis, verus motus medius
pro temporibus subsequentibus erit = $ut + \frac{t^2 \cdot 9''}{10000}$ pro proce-
dentibus = $ut - \frac{t^2 \cdot 9''}{10000}$, hinc erit $L = E + \left(ut + \frac{t^2 \cdot 9''}{10000}\right)$ et
 $L' = E - \left(ut - \frac{t^2 \cdot 9''}{10000}\right) = E - ut + \frac{t^2 \cdot 9''}{10000}$ ex quo sequitur, aequatio,
nunc secularum $\frac{t^2 \cdot 9''}{10000}$ semper esse addendam et pro temporibus
elapsis, et pro temporibus futuris; quod quoque ex illo ostenditur,
quia $(-t)^2 = +t^2$.

Hae aequatio per omnes observationes et antiquas et moder-
nas est stabilita. Si calculantur observationes antiquae p.
cunctum tabulas celeb. Mayer, non applicando aequationem
secularem, inveniantur errores semper positivi qui ascendunt
ad 28'; sed applicando hanc aequationem, errores sunt modo
positivi modo negativi, et semper infra 6'; quod conforme
est naturae errorum observationum. In Astronomia phys.
sua ostenditur, aequationem secularum esse unum effec-
tum attractionis Solis. --- Per theoriā huius attractionis
invenit Laplace valorem exactum aequationis secularis
longitudinis medii lunae esse, nominando i numerum
seculorum elapsorum ab anno 1700
 $+10''.181621268. i^2 + 0''.0185384408. i^3$;

ultimus terminus est negativus pro seculis ante 1700 (-i).

Theoria attractionis etiam indicavit, appere, seu anomaliam
mediam et nodos esse subiectas aequationibus secularibus, et
illos inveniri, multiplicand illam longitudinis per 4.00052
et per 0.735452.

Haec semper erant ejusdem longitudinis quod quoque videtur
in Astronomia physica; propterea prius nationes se servie-
bant magno numero differentium annorum: ex quo sequitur,
periodum, expressam per numerum annorum et non diurnum,
non posse servire ad determinationem mensuram, saltem si
mensura adhibita in hac periodo non est satis nobis; et hoc locum
habet quoad periodum sexcentorum annorum, quam antiqui

populerunt ante diluvium. Statim videmus, hanc periodum con-
tinere 421 menses synodicos. Sed assumendo pro basi longi-
tudo actualium anni et mensis, $365^{\circ} 5' 48' 52''$ et $29^{\circ} 12' 44' 3''$,
invenitur, 600 annos conficere $219145^{\circ} 8' 40'$, et 421 menses fa-
cere $219146^{\circ} 12' 15'$. Tale errorum plus quam unius diei an-
tiquiores non potuerunt committere, quum habuerant jam cogni-
tionem magis exactam aliarum periodorum, uti v. c. Chaldeis.
Supponere igitur debemus, illorum annum, vel illorum mensem
vel annum et alterum fuisse differentes ab illis, qui nunc sunt
in usu, vel istam periodum esse formatam ex praedilectione na-
meri 60. Nominand annum hujus antiqui temporis = A, men-
sem = M, numerum elapsorum annorum in hac periodo,
600 = n, numerum mensium 421 = m habemus aequationem
 $nA = mM$ ex qua $\frac{A}{M} = \frac{421}{600} = 12.36833...$ Haec ratio est
major quam nunc est, ex qua sequitur annum hujus tempo-
ris fuisse majorem quam nunc.

Bailly (Histoire de l'Astron. ancienne l. 3. § 6.-10.) contendit
probare per comparationem plurium periodorum antiqua-
rum, mensem fuisse $29^{\circ} 12' 44' 4'' 5$, vel $1''.5$ majorem
quam nunc, et periodum 600 annorum esse inventam
4600 annis ante Chr. n. Tunc 421 menses, erunt aequales
 $219046^{\circ} 15' 28' 34''.5$, quod divisum 600, dabit longitudi-
nem anni tropici = $365^{\circ} 5' 31' 56''$. Ex hoc sequeretur im-
minutio anni $3' 10''$ et mensis $1''.5$ in 6380 annis vel in
48550 mensibus, ex quo sequeretur in minimis accretio
mensis = $\frac{15''}{48550} = 0''.0000191 = \omega$, quod daret accelera-
tionem secularem lunae = $\frac{\omega}{2}(1237)^2 = 14''.6$. Per hoc tempore
luna perierit $8''$, quae quantitas igitur est aequatio
secularis quae jacet in medio inter primas et ultimas
tabulas Mayeri.

Apisides et excentricitas lunae

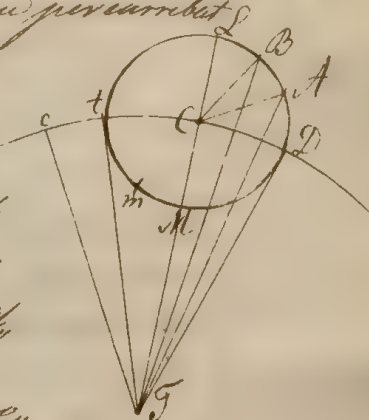
Si aliquod corpus celeste est in sua linea apsidum, seu motus est in suo maximo vel minimo celeritatis, et motus motus est si elongatum est 90° a linea apsidum. — Huius proprietati communis omnium orbitalium, inniuntur methodi quae, per viam ad determinationem positionis apsidum, quia tanta differentia inter maximam et minimam celeritatem dat maximam variationem centri, seu excentricitatem, ita ut haec elementa simul sunt determinata. Magnitudo diametri et parallaxis lunae est talis, ut ope illarum immediate determinare possimus rationem quae existit inter diversas distantias, seu mensuratio exacta horum angulorum supponit methodos, quae ignotae erant antiquis. — Horum observationes, certe habent tantummodo eclipses lunares, quarum magnitudo illis serviebat ad determinationem loci nodi, propterea apsidum erat determinata per intervallum inter duas subsequentes eclipses. —

Eclipses aequaliter distans a praecedenti et subsequenti, debent cadere in apsidum, quia luna unum mensem ante et mensem post, habebat eandem celeritatem; erat igitur apogaeum aut perigaeum, quoniam intervallum temporis erat maximum vel minimum respectu aliorum intervallorum duarum eclipsium. Quia haec planeta maximis et minimis celeritatis, non respondebant semper iisdem regionibus caeli, sed progrediebantur secundum ordinem signorum, antiqui notabant tempora, post quod eclipses, separatae a praecedenti et sequenti per intervalla maxima vel minima, cadebant iterum in eadem puncta caeli; et hoc erat periodus, in qua linea apsidum, fecit unam integram revolutionem. Haec ratione videtur, hoc accidere post 223 pleni lunae, et lunam pervenisse 239 vicibus ad suam maximam vel minimam distantiam a puncto maxime vel minime rapido motu, et consequenter 223 menses semper eos esse aequales 239 mensibus anomalisticis. Haec ratione oritur sunt ipsae periodi, ope quarum Hipparchus

1792

Apollonius determinabat menses tanta cum precisione. —
 Per hoc quoque cognoverunt motum apsidum, et fere eorum po-
 sitionem ad orbem epocham, sed non excentricitatem. — Ad hunc
 effectum, Ptolemaeus se serviebat epicyclo, qui hic propter mo-
 tum sine apsidum, magis commodus erat quam circuitus excen-
 tricus.

Sit terra T in centro circuli CC , cuius peripheriam percurrit
 motu uniformi centrum epicycli L CA M in mense
 periodico, contra ordinem signorum CC , interea luna
 L percurrit peripheriam epicycli uniformiter in dire-
 ctione opposita L CA M . Supponamus, lunam fuisse
 in L in eodem momento quando centrum epicycli, ponit
 in C , et post aliquot dies, ultimum esse in c ; dum locus
 medius luna erit in radio TC , et verus locus ab hoc dif-
 fert quantitate, qua luna elongata est a recta TC ,
 quae nunc habet positionem TC ; quoniam igitur verus mo-
 tus luna in apogeo L sit lentior quam medius, et in perigeo A
 lenior, ergo debet ire a L retraham versus, versus B ita M in
 perigee versus, versus m , hinc debet ire in peripheria epicycli
 contra ordinem signorum. Si ergo centrum epicycli L in C , et
 luna in B , locus medius et verus luna erunt in rectis TC , TB , et
 TB erit aequalis centri. — Si linea apsidum esset immobilis,
 mensis anomalisticus esset aequalis mensi siderali aut periodico:
 ex quo sequitur, quoniam centrum C descripsit mensis periodicum,
 lunam quoque debere esse in apogeo L . Sed quia revolutio anomalis-
 tica diutius durat quam periodica, luna neque erit in L in fine
 mensis periodici. Generationem omnes anguli, quos luna in epicy-
 clo circa C describit, sunt semper minores quam anguli quos C
 circa T describit: hinc si C venit in c et L in B , $\angle CB$ $\angle TC$
 in ratione mensis periodici ad anomalisticum, vel aliis verbis
 $\angle TC$ et $\angle CB$ sunt motus medii periodici et anomalistici. Omnia
 igitur reducuntur ad determinationem rationis inter radios CT = a
 et CL = c , vel excentricitatis $\frac{a}{c}$ = y , et situs et motus lineae apsidum,
 quae determinabitur per mediam anomaliani L CB .



Ad hunc finem Ptolemaeus se serviebat tribus eclipsibus lunaribus,
 observatis Babylone annorum 720 A 719 ante Chr. n. pro quibus

dat sequentia data (Hmag. l. IV c. 5)

	Longitud. lunae	Temp. interval	Motus verus	Motus medius	Motus anomal. med.
I	$5^{\circ} 24' 30'' = C$	$354^{\circ} 24' 34''$	$349^{\circ} 15' = E$	$345^{\circ} 51' = L$	$366^{\circ} 25' = M$
II	$5^{\circ} 13' 45'' = C$				
III	$11^{\circ} 3' 15'' = C$	$176^{\circ} 20' 12''$	$169^{\circ} 30' = F$	$170^{\circ} 7' = L$	$186^{\circ} 26' = m$

Si A, B, D, sunt loci lunae in his tribus eclipsibus, erit $BLD = m$
et minus quam 180° , et motus verus a B ad D aequalis est minori
quam motus medius L; hinc centrum C et perigaeum M sita sunt
extra segmentum BAD. Propterea habemus $ALB = M$
 $BCL = 360 - M = 53^{\circ} 35'$, hinc $BCL \setminus BLD$, ex quo fluit, A
adire inter B et D. Nosimus itaq. $ALB = 53^{\circ} 35' = a$, $BLD = m = 150^{\circ} 26'$
 $ALB = E - L = 3^{\circ} 24' = \lambda$, $BLD = L - F = 38^{\circ} = \mu$. Ponendo nunc
 $\frac{a}{c} = \frac{1}{y} = q$, $BLD = x$, $BLF = y$, $CBF = x - y = z$, habemus in tri,
angulis CFB, CFA et CFD
 $\sin z = q \sin y$, $\sin CAF = q \sin CFA$, $\sin CDF = q \sin CFD$, sed habemus
 $CFA = \lambda + y$, $CFD = \mu + y$, $LCA = x + \lambda$, $LCD = m + x$ ponendo
 $x - \lambda = n$, $m - \mu = v$, erit $CFA = LCA - CFA = n + z$,
 $CFD = LCD - CFD = v + z$, ex quo reseruantur sequentes aequationes
I. $\sin z = q \sin y$, II. $\sin(n + z) = q \sin(\lambda + y)$, III. $\sin(v + z) = q \sin(\mu + y)$
et substituendo I in II et III venit

$$\begin{aligned} \sin n \cos z + q \cos n \sin y &= q \sin \lambda \cos y + q \cos \lambda \sin y \text{ et} \\ \sin v \cos z + q \cos v \sin y &= q \sin \mu \cos y + q \cos \mu \sin y \end{aligned}$$

Haec duas aequationes dant

$$y = \frac{\sin y}{\sin z}$$

$$\begin{aligned} y \sin n \sin v \cos z &= \sin v (\sin \lambda \cos y + \cos \lambda \sin y - \cos n \sin y) \\ &= \sin n (\sin \mu \cos y + \cos \mu \sin y - \cos v \sin y) \end{aligned}$$

et ex hac aequatione invenitur

$$\begin{aligned} \frac{y}{\sin y} &= \frac{\sin n \sin \mu - \sin \lambda \sin v}{\cos \lambda \sin v - \sin n \cos \mu + \sin n \cos v - \cos n \sin v} \\ &= \frac{\cos(n - \mu) - \cos(n + \mu) - \cos(v - \lambda) + \cos(v + \lambda)}{\sin(v + \lambda) + \sin(v - \lambda) - \sin(n + \mu) - \sin(n - \mu) - 2 \sin(v - n)} \end{aligned}$$

Invenito hac ratione valore quantitatibus y, aequationes I et II dant

$$q = \frac{\sin z}{\sin y} = \frac{\sin n \cos z + \cos n \sin z}{\sin(\lambda + y)} \quad \text{hinc}$$

$$\cos z = \frac{\sin n \sin y}{\sin(\lambda + y) - \cos n \sin y} = \frac{\sin n}{\cos n \sin y} - 1$$

per quod dicitur $x = y + z$ et $y = \frac{\sin y}{\sin z}$.

Ex precedenti exemplo habemus $\lambda = 3^\circ 24'$, $\mu = 3^\circ$, $n = 50^\circ 11'$, $v = 149^\circ 49'$
hinc $\log y = 0.017212$, $y = 59' 10''$; $\log z = 0.2019487$, $z = 11^\circ 25' 2''$

$x = 12^\circ 24' 12''$ (vel secundum Ptolemaeum $12^\circ 24'$) ex quo sequitur
excentricitas $y = 0.0869405 = \sin(4^\circ 59' 15''.5)$ secundum Ptolemaeum
maum $y = 0.0869444$. — Maxima aequalio centri hinc est
 $= 4^\circ 59' 15''.5$ vel fere 5° . — Ptolemaeus invenit apocentrum celi

psium, quas ipse observavit $y = 0.0872222$, hinc maximam
aequationem centri $5^\circ 0' 14''$. Assumendo medium plurimum alio-
rum observationum, ille hanc invenit $5^\circ 1'$ (Strag. l. IV. c. 10)

Quidam nos scimus aequationem centri esse $6^\circ 18'$ et forsitan
quilibet staretur de magnitudine huius erroris sed videlicet
in subsequentibus, illos 5° esse effectum collectum duarum aequa-
tionum et Ptolemaeum de huiusmodi et alteram harum aequa-
tionum $LFB = y$ est angulus quo media longitudo lunae in me-
dio secundae eclipsis superabat longitudinem veram $B = C$.

Quod invenimus $C = 5^\circ 13' 45'$ et $y = 59'$, hinc erit media longi-
tudo seu epocha $= 5^\circ 14' 44'$. — Anomalia media erat $LFB = x = 12^\circ 24'$
ex qua deducitur longitudo apogeei $= 5^\circ 2' 20'$.

Per eundem calculum concludit Ptolemaeus ex tribus obser-
vationibus, quas ipse instituit, longitudinem veram lunae
in secunda eclipsis $C = 5^\circ 25' 10'$, aequationem centri $y = 48' 20'$,
anomaliam mediam $x = 64^\circ 38'$ et intervallum inter hanc eclip-
sin et precedentem $= 311783^\circ 23' 26'$. Hinc erat tunc media
longitudo $L = C + y = 29^\circ 30'$ et longitudo apogeei $= L - x = 10^\circ 24' 52'$.

Motus medius lunae in hoc intervallo hinc erat in longitudine
 $= 11420$ circuli + $224^\circ 46'$, ille anomalis $= 11315$ circuli + $52^\circ 14'$ et ille
apogeei $= 96$ circuli + $1^\circ 2' 32'$, ex quo deducitur motus medius diu-
tus lunae in longitudine $= 13^\circ 10' 34'' 58''' 33'' 30'' 30''$

anomalis $= 13 \quad 3 \quad 53 \quad 56 \quad 17 \quad 34 \quad 59$

apogeei $= 0 \quad 6 \quad 41 \quad 2 \quad 15 \quad 38 \quad 61$

ex quo deinceps mensis synodici $= 29^\circ 12' 44' 3'' 26224$

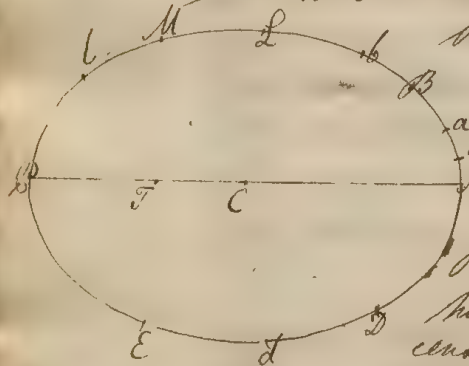
ab ipso; mensis anomalistici $= 27^\circ 13' 18' 34.9488$

et duratio unius revolutionis apsidum $= 3231^\circ 14' 47' 56'' 3124$

Novos methodi ad determinationem parallaxis per observationes, ubi
et inventio tantum achromatis, et micronetrorum, suppeditant medium
inveniendi positionem apsidum, vel saltem eandem motum, per epo-
chas, ubi diameter lunæ, cuius totalis variatio est 4', habet suum ma-
ximum et minimum valorem. Quum autem et in apsidibus, luna
suam distantiam et magnitudinem tantummodo insensibiliter
mutat, eligi debent planeta medius distans, ubi luna illam rapi-
dissime mutat. Quocirca diametro apparentiori duobus punctis
oppositis orbitæ ejusdem magnitudinis, medium inter hec pun-
ta dabit longitudinem apsidum pro epocha medius inter duas ob-
servationes.

Sequenti modo possunt apsidæ et eccentricitas simul inveniri.

Est ABP orbita elliptica lunæ, T terra, AP linea apsidum, et



B, L duo loci veri lunæ (longitud.) hinc ABP , AP vel
 AB , AL veræ anomalie. Si nunc habemus magnitudinem
a numerum tantum observationum, et ex eis eligi-
mus epocham B , a qua omnes ceteræ longitu-
dines numerantur, pro qualibet observatione L
scimus motum verum $BP L = l$ per observationem
et motum medium $AP M = m$ per sinus ellipticum,
hinc $LM = m - l$. Sint $Bb = f$, $Ll = g$ æquationes
centri, quæ conveniunt anomalie veris, AB , AL ;

hinc erunt b et l loci medii (med. longitud.) et motus medius
 $bt = m = BP M$, ex quo sequitur $Ml = Pb$ vel $Ll - Lm = g - m + l = f$
et $g - f = m - l$.

Si nunc super aliis observationes comparantes cum B , f ma-
net invariata, sed differentia motus medii et veri $m - l$ crescit
cum g . Maximum huius differentie erit in puncto L maxime
æquationis, et in æquatione $g - f = m - l$, g est maxima æquatio,
sed f incognitum. Comparando B eandem ratione cum obser-
vationibus aliis, v. c. in D quæ 14 diebus elongata sunt ab L , notus
est ex observationibus et tempore elapso motus verus et medius
 $BP D = \lambda$, $BP E = \mu$, $ED = \lambda - \mu$.

Nominando æquationem $Dd = h$ quæ respondet anomalie AD ,
motus medius etiam est bDd ; ex quo sequitur $bd = \mu = BE$,
 $Ed = Bb = f$, vel $\lambda - \mu - h = f$, hinc $h + f = \lambda - \mu$. Si igitur

queritur etiam in parte D observatio quae dat differentiam motus
veri et medi $\lambda - \mu$ maximam, hanc si erit aequatio maxima,
hinc $h = g$ et $g + f = \lambda - \mu$

Addendo hanc aequationem precedenti $g - f = m - l$ habebimus

$$g = \frac{\lambda - l}{2} - \frac{\mu - m}{2}$$

Hae ratione invenitur quae observationum insti. h. t. in
distantiis mediis, maxima aequatio quam exactissime, quia in his
punctis illa se insensibiliter mutat.

Si in intervallo inter observationes L et D, apogaeum ab A ad a
est promotum, deinde erit in α in medio hujus intervalli, h. e. est

$A\alpha = \alpha\alpha$, si motus apogaei durante hoc tempore supponitur
uniformis. Sed quoniam sunt L. D puncta maxime aequationis,
habemus quoque $AL = \alpha D$, ex quo sequitur $\alpha L = \alpha D$: aliis verbis,
medium α inter duas longitudes observatas L. D, est longitu-
do apogaei pro epocha media. Sed quoniam aequatio in his punctis
insensibiliter se mutat, potest ista differentia considerabilis
inter AL et αD , etiam si error sit insensibilis relative ad g
vel h , ita ut haec determinatio apogaei non esset admodum
secura. — Quum autem epocha B sit arbitraria, possumus
assumere pro epocha observationem institutam in appi-
dibus ipsis, quae fere jam sunt nota, ubi drin fit $f = 0$, et

$m - l = g = h = \lambda - \mu$. Mutabimus igitur epocham B tandem, do-
ne maxime differentia motus veri et medi inter omnes alias
observationes, $m - l$ et $\lambda - \mu$ deveniant aequalis et oppositae
naturae. Deinde est simul longitudo observata B, longitudo
apogaei et longitudo media luna, hinc epocha. Saltem
inveniemus tales observationes duas, ut $m - l$ sit $> \lambda - \mu$, si

B assumitur pro epocha, et $m - l < \lambda - \mu$, si b est epocha: drin
cadit linea apogaei inter B et b, et si habemus multas ob-
servationes inter B et b, haec duo puncta, unum alteri, jam
magis appropinquari possunt ita, ut drin facile per interpola-
tionem veritabilis positio apogaei determinari possit.

Haec ratione omnia elementa elliptica sunt determinata, et clarum est, R. L. D. orbi neccessario esse longi tudines in orbita, sed quoniam observationes tantummodo dant longi tudines in elliptica, illae ex his deduci debeant, ad quem finem neccessaria est cognitio nodorum et inclinatio lunae, quae cognitio a quo lunae, uti videbimus, non magnis cum diffi cultatibus est connexa.

Si haec ratione determinata est positio apsidum pro differentiis usque, etis, platin, virbimis, illas habere motum rapidum secundum ordinem priorum. Secundum novissimas tabulas celeb. Börg, motus anomalisticus lunae in 365 diebus = $1325^{\circ} 40' 17''$ et $198^{\circ} 40' 17''$ S. Subtrahendo hoc a motu seculari lunae in longi tudine = $1336^{\circ} 10' 7''$ et $52' 43''$ venit motus secularis apsidum in longi tudine = $4069^{\circ} 3' 25''$ et mo tus sideralis = $4067^{\circ} 59' 55''$ S. Apices igitur faciunt unam revolu tionem respectu punctorum aequinoctialium in

$$\frac{12960000.36528}{1464860575} = 3231.4611238683927 = 3231^{\circ} 11' 4' 1'' 10222913$$

et unam revolutionem sideralem in

$$3232.5667007028921 = 3232^{\circ} 13' 36' 2'' 940704 \text{ ex quo con-}$$

cluditur longitudo mensis anomalistici

$$= 27.5545525363815 = 27^{\circ} 13' 18' 23'' 3391433616.$$

Epocha seu longitudo media perigee est, secundum easdem tabulas pro initio praesentis saeculi, h. e. pro media nocte Paris, per quam incipit 1. Januarii anni 1801, = $8^{\circ} 26' 6' 36''$ A

Medii motus adoptati per Ptolemaeum (Almag. l. IV c. 3) dant longi tudinem mensis anomalistici 7° majorum.

Hic motus uniformis seu medius apsidum combinatus est cum alio motu admodum difforni quem proxime Ptolemaeus dedit, et de quo statim agemus. Neccessarium igitur est ex hac ratione ad determinationem motus medii, assumere observationes admodum elongatas unam ab altera, ut in hoc longo intervallo, inaequalita tes periodice se compensent vel saltem sint impossibiles.

Aequatio longitudinis lunae

Aequatio si per Hipparchum et Ptolemaeum inventa est per solas

solus eclipses luna; illa igitur tantummodo indicabat inaequa-
 litates, quas habuit luna in syzigiis, si simul ejus aequatio centri
 erat in suo maximo, h. e. si linea apsidum et syzigiarum erant per-
 pendiculares una in alteram. Ptolemaeus erat primus qui ob-
 servavit lunam extra syzigiis ope instrumenti quod ipse ex-
 cogitavit ad hunc finem (Almag. l. IV. c. 1.) et haec observationes ei
 ostenderunt maximam aequationem 5° applicatam secundum
 theoriam epicyclorum, non satis facere observationibus extra sy-
 zigiis; errorem hujus calculi, qui potuit suspicari quia secunda
 aequatio connexa cum priori 5° crescere in ratione majoris elon-
 gationis lunae a syzigiis, et esse maximum in illis quadraturis
 ubi prima aequatio erat maxima vel ubi luna 90° ab apsi-
 dibus erat elongata, et tunc coincidebant apsidibus et syzigiis;
 sed in illis quadraturis, ubi luna simul erat in apsidibus,
 hinc prima aequatio = 0 erat, secundam quoque evanuisse vel
 calculum secundum primam aequationem concordasse cum
 observationibus, ita bene uti in syzigiis, ex quo sequitur
 aequationem 5° fuisse generatim conformem observationibus,
 si linea apsidum et syzigiarum erant perpendiculares
 una ad alteram. (Almag. l. V. c. 2.) — Haec circumstantiae per-
 fecte concordant cum hodierna theoria secundum quam haec se-
 cunda aequatio est functio $\sin(\mu - 2\eta)$, ubi μ est anomalia
 media, et η elongatio lunae a sole. In quadraturis η est
 90° vel 270° , hinc $2\eta = 180^{\circ}$ et $\sin(\mu - 2\eta) = -\sin\mu$, quod est minus
 si $\mu = 0$ vel $\mu = 180^{\circ}$, sed maximum si $\mu = 90^{\circ}$ vel $\mu = 270^{\circ}$.
 Ptolemaeus invenit sequenti modo, hanc secundam inaequalita-
 tem esse $2^{\circ} 40'$. Una observatio (Almag. l. V. c. 3.) illi dedit lon-
 gitudinem veram Solis = $10^{\circ} 18' 30''$, illam lunae $7^{\circ} 9' 40'' = L$.
 Ex notis mediis motibus calculavit pro hac epocha longitudi-
 nem mediam Solis = $10^{\circ} 16' 24'' = M$ et lunae = $7^{\circ} 18' 20'' = L$,
 et anomaliam mediam lunae = $87^{\circ} 19' = \mu$, hinc prima aequatio
 = $-4^{\circ} 58'$. Summa amborum aequationum antea erat
 $(-L) = -7^{\circ} 40'$, hinc secunda aequatio = $-2^{\circ} 42'$, quod erat ejus ma-
 ximum, quia $M - L = 89^{\circ} 7' = -\eta$, hinc luna erat in sua ultima
 quadratura.

quadratura: $\mu - 2\eta = 26.5^\circ 33'$ hinc $\sin(\mu - 2\eta) \text{ fere } = -1$.

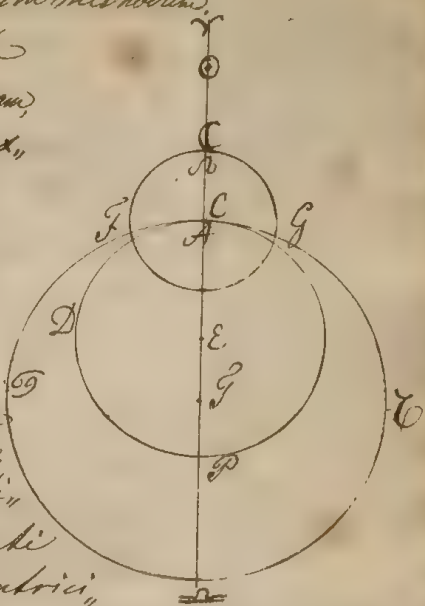
Sumendo medium piturum seminum observationum Ptolemaeus invenit maximum = $8^\circ 40'$

Prima aequatio igitur erat minimum = 5° in syngis et ascendebat ad $8^\circ 40'$ in duabus quadraturis. Debeant igitur concludere, causam quae audit primam aequationem in quadraturis, quae orbis illam imminuit in syngis, et hinc illam habere veritabilem valorem in totis hos duos aspectus, h. e. in octantibus. Ex hoc sequitur, secundam aequationem habere suum maximum valorem positivum, si lines syngiarum coincidunt cum linea apsidum et suum maximum negativum, si lines syngiarum et apsidum sunt perpendicularis una in alteram, et esse nullam, si haec duo lines faciunt angulum 45° . Nominando hinc primam aequationem g , et secundam h , habemus $g + h = 8^\circ 40'$ $g - h = 5^\circ$ hinc $g = 6^\circ 20'$ $h = 1^\circ 20'$ Ptolemaeus invenit idem resultatum sequenti modo.

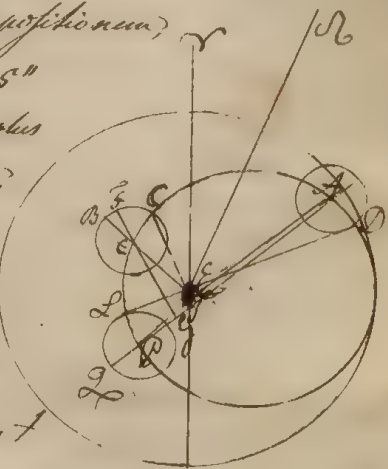
Prima aequatio semper est maximum, si anomalia est $\pm 90^\circ$ vel si recta, quae coniungit terram et lunam Et (sic proce), est longius ad epicyclum. Haec aequatio $Ct = g$ est autem propter secundam aequationem invariabilis a 5° ad $8^\circ 40'$, hinc sequitur, nominando radium epicycli $Ct = c$, et radium circuli deferentis $CC = a$, hinc $ab = g$, radium a esse variabilem, quia secundum hypotheseis epicycli c est constans: aliis verbis, terra non est in centro deferentis, vel centrum epicycli describit peripheriam circuli excentrici. —

Haec explicatur prima inaequalitas per epicyclum, secunda per circulum excentricum. Si luna 90° distat ab apsidibus et syngis aequatio g est maximum, hinc a minimum, vel centrum epicycli est in perigeo circuli excentrici, sed si luna est in syngis, g est minimum, a maximum, et C in apogeo: ex quo sequitur epicyclum C progredi a perigeo ad apogeeum in quarta parte mensis et facere unam revolutionem in semi-mense synodico. Supponamus igitur C fuisse in apogeo excentrici, et lunam simul fuisse in conjunctione cum sole et in luna epicycli de hinc: his positis, in fine semi-mensis synodici, epicyclus C erit iterum in apogeo, luna in oppositione cum sole, et progredietur fere 13° ultra lineam apsidum epicycli propter

Differentiam motus anomalistici et synodici ad explicanda omnes
has inaequalitates lunae, Ptolemaeus adhibuit sequentem methodum.
Sic Terra, $VT =$ linea aequinoctiorum supposita
immobilis, et $AG =$ circulus concentricus ad eclipticam,
cujus centrum est in T . Sit in T centrum circuli ex-
centrici in E , A et G sunt apogaeum et perigaeum circuli
excentrici, in cuius peripheria centrum C epicycli CEG
facit unam revolutionem secundum directionem ED
in uno mense periodico, interea luna percurrit, in uno
mense anomalistico peripheriam epicycli secundum di-
rectionem CG . Supponamus, ab initio epochae, apogaeum
 A vel centrum circuli excentrici, centrum C epicycli,
modum ascendente, lunam et Solem esse omnes in li-
nea TV , hinc lunam in conjunctione, in nodo ascendente
et in apogeo, et maximam aequationem q sui excentrici,
talem q esse minimum $= 5''$, et longitudo Solis et lunae $= 0$.



Supponamus post 24 horas omnia haec acquisisse positionem,
quam repraesentat figura. Atque propterea, $VSC = \alpha = 13^\circ 10' 35''$
erit motus medius periodicus lunae, $BCC = \beta = 13^\circ 9' 54''$, motus
anomalisticus, et VSL motus retrogradus nodorum,
qui est $3''$ per diem, ubi inferius videbimus. Unde
motus epicycli C facit in mense synodico duas re-
volutiones in peripheria excentrici AG , et hinc
esse elongatum ab A dupplo motu synodici,
 $ASC = \delta = 24^\circ 22' 53''$: motus retrogradus apogeei et
excentrici circuli erit igitur $= \delta - \alpha = 11^\circ 12' 18''$.



In quadraturis, C est in perigee G , et maxima aequatio LSB
devenit maximum $= 7^\circ 110'$; sed si luna eodem tempore est
in linea apsidum AG , tunc aequatio q erit nulla quodam,
que sit distantia CT . In syngis C est in apogee: aequa-
tio q devenit minimum $= 5'' = ASB$ et excentricitas
 $AS = \sin 5'' = 0.0869405 = y$, sed in B excentricitas est
 $BS = \sin 7^\circ 110' = 0.1334096 = \lambda$. Nominando igitur radium

$$\frac{AD}{AG} = \gamma$$

centrici $AE = CE = a$, radii cyclici $LB = AD = CC = c$
 et $ED = e$ habebimus $c = (a+e)\gamma = (a-e)\lambda$, ex quo
 $\frac{e}{a} = \frac{\lambda - \gamma}{\lambda + \gamma} = 0.2108875$ et $a+e = \frac{2\lambda a}{\lambda + \gamma}$, hinc
 $\frac{e}{a} = \frac{2\lambda a}{\lambda + \gamma} = 0.1682451$ (Almag. l. V. c. 4.)

Quia secunda inaequalitas fit maxima in A et B , positiva
 in B , negativa in A , illa erit nulla 90° ab A et B , si tunc
 est in stantibus, et dein invenitur sola in aequalitate prima
 g . Eructo igitur perpendiculari EC in AB , habebimus $\sin g$
 $= \frac{e}{a}$ et $EC^2 = AB \cdot BG = (a+e)(a-e)$, vel $\frac{EC}{a} = \sqrt{(1+\frac{e}{a})(1-\frac{e}{a})}$
 $= 0.97751$, hinc $g = 6^\circ 11'$, quae est aequatio centri in
 stantibus. Minoris valor inter ^{maximam} et minimam
 aequationem centri autem erit (max. $7^\circ 40'$ min. $5'$)
 $g = 6^\circ 20'$

Hae est vera aequalitas centri, seu prima inaequalitas lunae; haec
 est secundum Ptolemaeum $= 6^\circ 20'$, secundum Mayer $= 6^\circ 18' 33''$
 Haec inaequalitas mutatur per secundam inaequalitatem quam
 Ptolemaei Astronomi appellant evictionem, a 5° usque $7^\circ 40'$; evic-
 tio hinc est secundum Ptolemaeum $= 1^\circ 20'$, secundum Mayer
 $= 1^\circ 20' 34''$. Stupenda est ista magna praecipio qua determi-
 navit Ptolemaeus has duas inaequalitates principales lunae.
 Secundum Ptolemaei descriptionis evectio est $+80^\circ \sin(\mu - 2\eta)$,
 aequatio centri $= -6^\circ 19' \sin \mu$. In syngiis habemus $2\eta = 0$, in
 quadraturis $2\eta = 180^\circ$. Antiqui, qui haec harmonice observarent
 eclipses seu syngias, debebant invenire aequationem lunae
 $= -6^\circ 19' \sin \mu + 80^\circ \sin \mu = -5^\circ \sin \mu$, ex quo sequitur maxima aequa-
 tio $= 5^\circ$. Cum Ptolemaeus assumeret hunc valorum pro basi su-
 arcum observationum lunae in quadraturis ubi aequatio est
 $= -6^\circ 19' \sin \mu - 80^\circ \sin \mu = -7^\circ 40' \sin \mu$, ille invenit secundum aequa-
 tionem seu evictionem $= 7^\circ 40' - 5^\circ = 2^\circ 40'$.
 Ex his duarum aequationum Ptolemaeus eo pervenit, ut ob-
 servationes, cum sua theoria ita bene in quadraturis uti in sy-
 ngiis concordarent, sed in ceteris quadraturis, praecipue in athen-
 tibus, quum luna esset eodem tempore in apsidibus, invenit adhuc

Dein est $\sin LCA = \frac{1}{2}$ et $CG = CE$, hinc $\sin LCA = \frac{1}{2}$ et $LCA = 18^\circ 41'$, hoc perfecte concordat cum hodierna theoria.

Secundum Ptolemaeum, haec correctio apparet modo positiva modo negativa, ascendit ad $13^\circ 9'$. Quam Ptolemaeus ad has obsequas adhibuit, tantum tales octantes, ubi luna simul in apogeo fuit et hinc duplex constantia Solis ab apogeebus lunae aliquoties erat 90° , argumentum huius correctionis potuit esse duplex distantia. Solis a luna vel ab ejus apogeebus. Ptolemaeus elegit primam, sed theoria et hodierna observationes deducunt resultatam, aequationem apogee dependere a dupla distantia Solis ab apogee lunae, et ejus maximum valorem esse a 12° usq. 13° . Ptolemaeus hinc determinavit hanc correctionem magna cum praecisione, sed non dedit justam ejus explicationem. Prominavit hanc correctionem, modo positivam modo negativam apogee eccentrici, ex versis periclysis et apoclysis (Almag. l. V. c. 8. Colonne 3. de la table pag. 312). Multi Astronomi errant, qui credunt hanc correctionem esse factam in saeculo 12. per mensurationem diametri lunae.

La Lande in sua Astronomia l. II § 1431 pag. 162 edit. 3. ita dicit: "C'est en observant ainsi les diametres de la lune que Horaceius vers l'an 1638 trouva qu'il fallait admettre un balancement de l'apogee et un changement d'excentricité pour expliquer la seconde equation trouvée par Ptolemaee."

et § 1434 pag. 165

"Horaceius dut en effet être conduit à cette hypothese par l'observation des diametres de la lune qui pouvaient servir à faire connaître le lieu de l'apogee; il dut s'apercevoir par leurs moyen que l'apogee de la lune se trouvait dans un lieu ou il plus avance de 25° environ lorsque la distance du soleil à l'apogee de la lune était à peu près de 45° ou de 225° que lorsque elle était de 135° et de 315° de sorte que le mouvement de l'apogee n'était point uniforme mais sujet à un balancement annuel de plus de 12° , ce changement de l'apogee étant une fois reconnu, sa liaison avec le changement de l'excentricité était aisée à percevoir. Les tables de Flamsteed ont cette theorie d'Horaceius etc."

Astronomi hodierni invenierunt per disquisitiones admodum exactas, primas duas inaequalitatis lunae fere easdem uti Ptolemaeus, et parva differentia, magis est resultatum theoriae quam observationum. Aequatio elliptica sui centri est, secundum tabulas celeb. Bürg, $6^{\circ} 18' 28''$ excentricitas $1^{\circ} 20' 30''$ hinc maximus valor ambarum inaequalitatum simul est $7^{\circ} 39' 58''$ uno minuto primo minor quam secundum Ptolemaeum. — Aequatio $6^{\circ} 18' 28''$ dat excentricitatem $e = 0.0550266$.

His temporibus exacta mensuratio diametri lunae cum microscopio pervenit ad determinationem magna cum praecisione veri loci et veri motus apsidum lunae; et ejus comparatio cum motu medio, qui jam exacte est notus indicabat modum admodum simplicem, verum locum apsidum plus, vel minus, et in maximo $12^{\circ} 18'$ distare a medio loco. Haec differentia est nulla, si Sol est in linea apsidum lunae, vel si ab eis est elongatus 90° ; et est maximum, si Sol ab apsidibus est elongatus 45° . Quam hoc quatuor modis accidere potest, observatum est, correctionem esse positivam, hoc est apogaeum verum distare $12^{\circ} 48'$ a loco medio, si longitudo Solis est major 45° vel 225° quam illa apogei lunae, sed hanc correctionem esse negativam, si haec differentia est 135° vel 315° . — Videmus hoc perfecte concordare cum hypothesi Ptolemaica, secundum quam verus et medius locus apogei sunt in lineis PC et GC (vid. fig.); locus verus hinc est post medium, uti in figura, in ultimo semicirculo PCH. e. in secundo et tertio quadrante distantis Solis ab apogeo. Luna quia motus epicycli C in peripheria excentrici est dupplus motus synodici, in altero semicirculo h. e. in primo et tertio quadrante hujus distantis, verus locus est ante medium. Facillimam quoque videmus hanc correctionem

in line esse comedam cum evectioe. Ex praecedentibus sequitur, unum
et alterum dependere a distantia solis ab apogeo lunae sequenti ratione.
Nominando. hanc distantiam $= \alpha$, apogaeum lunae $= A$, ejus corre-
ctionem $= B$, correctionem aequationis centri $= E$, videmus, esse,
si α est 0 vel 180° , B verum et E maximum positivum; si α
est 90° vel 270° , B esse verum et E maximum negativum; si α est
 45° vel 225° , B maximum positivum et E verum; si tandem α
est 135° vel 315° , B esse maximum negativum et E verum, ita ut hoc
praesentat sequens tabula, in qua maximum positivum et negati-
vum est designatum per $+M$ et $-M$. —

α	B	E	α
0	0	$+M$	180°
45°	$+M$	0	225°
90°	0	$-M$	270°
135°	$-M$	0	315°

Non inutile erit notare, nos non debere con-
fundere evectioem in sensu ptolemaei, qui
eam spectavit uti correctionem maximam aequa-
tionis, cum evectioe modernorum, qui
eam spectant uti aequationem particularem
longitudinis, vel uti correctionem generalis centri. In primo sen-
su, illa est maxima qualibet vice, quando α devenit $= 90^\circ$, ali-
n est quicunque numerus index, in secundo sensu illa non potest
habere effectum, si aequatio centri; ad ejus correctionem illa est
destinata, ipsa est nulla, vel si luna est in apocibis: hinc clarum
est, evectioem debere dependere non solum ab α , sed etiam
ab anomalia. Adhuc sermo erit. —

Aequationes B et E sunt functiones α , quae pro α et $180^\circ + \alpha$
eosdem valores habent; ex quo sequitur, has quantitates esse
functiones $\sin 2\alpha$, quia $\sin 2\alpha = \sin 2(180^\circ + \alpha)$. — Maximus valor
ipsius B est $12^\circ 18'$ vel $12^\circ 11'$; ex quo

$$\sin B = \frac{c}{a} = \frac{A-y}{A+y} = \frac{\sin 8^\circ 40' - \sin 5^\circ}{\sin 8^\circ 40' + \sin 5^\circ} = \frac{\sin (8^\circ 40' - 5^\circ)}{\sin (8^\circ 40' + 5^\circ)}$$

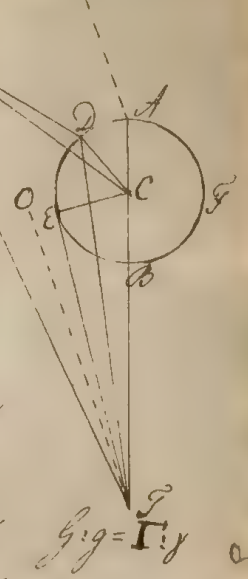
vel nominando aequationem centri $6^\circ 28' = g$, et evectioem $1^\circ 20' = h$,

$$\sin B = \frac{g}{g+h} \text{ vel approximative } \sin B = \frac{g}{g}$$

ex quo clare apparet in linea comedio, quae existit inter evectioem
et aequationem apsidum. Revera, ad explicandum, hanc ultimam
secundum methodum ptolemaei per motum circulare, sit
T terra et focus seu punctum excentricum orbitae lunaris, Cijus

centrum

centrum; TA positio media apogei, et TC excentricitas media
 $y = 0.0550266$. Supponamus verum centrum orbis non
 esse in C , sed describere circulum $AEBF$ circa C , ita ut aequalis
 BC sit maximum, si centrum est in E vel F , ubi CE , CF sunt
 tangentes circuli EF . His positis, habemus $BC = CE$, hinc
 $\sin BC = \frac{CE}{r} = \frac{h}{r}$ et $CE = \frac{h}{\sin BC}$. - Sputando evectiorem h simpli,
 iterum correctionem maximam aequationis g vel excentricitatis y
 et nominando maximum valorem huius aequationis $g = 40' = G$,
 habebimus $G = y + h$, hinc $CE = (\frac{G}{y} - 1)y$. Quum autem aequatio
 centri sit fere in ratione excentricitatis, sit Γ maximus valor
 excentricitatis modificatus per evectiorem: dein nos habebimus
 $CE = (\Gamma - 1)y = \Gamma y = TA - TC = (A - C)$. Radius CA circuli quem de-
 scribit centrum orbis lunaris, hinc est aequalis maximo va-
 riationi excentricitatis seu aequationis centri, vel potius, ille se
 habet ad medianam excentricitatem $TC = 0.0550266$ uti evectio $1^{\circ}20'$
 ad aequationem centri $6'20'$. Haec omnia sunt ab invicem, faci-
 les consequentis detectionum Ptolemaei. --



Secundum hanc hypothesein est $CE = BC = 12^{\circ}18'$, $CE = y = 0.055026$
 et $CE = CA = y \sin 12^{\circ}18' = 0.0117221 = S$. --
 Si centrum orbis est in alio puncto D , aequatio apsidum AED
 $= B$, dependet ab angulo AED , et nos habemus $\sin B = \frac{S \sin AED}{y + D \cos AED}$.
 Haec aequatio est nulla si $AED = 0$ vel 180° , devenit autem nona,
 simul, si $\cos AED = -\frac{S}{y} = \cos 77^{\circ}42'$; ex quo sequitur $AED = 180^{\circ} \pm 77^{\circ}42'$,
 $AED = 102^{\circ}18'$. -- pro B maximo valore positivo, et $AED = 25^{\circ}24'$
 pro ejus valore maximo negativo. Comparando hoc resultatum
 cum praecedenti tabula, videmus, orbem generatum poni $AED = 2\alpha$,
 ex quo dein venit $\sin B = \frac{S \sin 2\alpha}{y + D \cos 2\alpha}$ et $D = \frac{y \sin 2\alpha}{\sin B} - \frac{S \cos 2\alpha}{\sin B}$,
 quod dein dat correctionem excentricitatis $= TD - y$. Haec correctio
 est nulla, si $TD = y$ vel $\cos 2\alpha = -\frac{S}{y}$, quod dat fere $\alpha = 48^{\circ}$, $\alpha = 132^{\circ}$,
 $\alpha = 228^{\circ}$, $\alpha = 312^{\circ}$; haec correctio est maximum positivum, si D
 cadit in A , quum sit $\alpha = 0$ vel 180° ; maximum negativum, si D
 cadit in B , ubi α est 90° vel 270° . Faciendo $\frac{S}{y} = \varepsilon = 0.219$, habebi-
 mus $\sin B = \frac{\varepsilon \sin 2\alpha}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos 2\alpha + \varepsilon^2}}$, $TD = y \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos 2\alpha + \varepsilon^2}$ vel fere

$PD = r(1 + e \cos 2\alpha)$, correctionem eccentricitatis $E = S \cos 2\alpha$, et
 ejus augmentum $= -2e d\alpha \sin 2\alpha$, quod conforme est tabulis praecedentibus.
 Invenitur hac ratione pro data epocha, h. e. pro distantia solis &
 a loco medio Capogei, vera eccentricitas e . P et correctione apo-
 gei APD , noscimus veram longitudinem apogei, et hinc corree-
 tam medianam anomaliam; ex quo concludimus aequationem
 centri correctionem et longitudinem veram lunae. —
 Haec erat methodus, quam prout asserunt Astronomi, sed propter
 longitudinem calculi nunc est rejecta. Quamvis hinc tantum no-
 de agitur de correctione longitudinis lunae, et hinc correctio
 hinc apsidum non est necessaria, nunc adhibetur sequens
 simplex approximatio. —

Si in orbem hypotheticum simplicem ellipticum habemus
 $\frac{r}{p} = \frac{1 + e \cos u}{1 + e \cos v}$, et $u - v = g$ aequationem centri, ubi u et v sunt
 anomaliam media et vera. Si luna est in L (ultima fig.) possumus
 supponere sine sensibili errore CL aequalem distantis me-
 dis quod est $CL = p$, et in triangulo CLP , $h\angle L = \frac{p \sin \angle CLP}{1 - e \cos \angle CLP}$.
 Sed AL est anomaliam media μ , hinc $h\angle L = \frac{p \sin \mu}{1 - e \cos \mu}$ ergo
 $L = g$. Si verum centrum orbis non est in C , sed in D ,
 angulus L vel g se mutet in $DLP = g'$ hinc habemus
 $g' - g = dg = CLD$. Sed $\sin CLD = \frac{CL}{DL} \sin DCL$ ubi CL
 est constans, et DL tantummodo parva quantitate se va-
 riat, quia CD est admodum parva respectu CL ; hinc fa-
 ciens $DL = n$, et $\sin CLD = CLD$, habebimus $2CLD = dg$
 $= 2n \sin DCL$, ejus maximus valor $= 2n$ locum habet, si DCL
 $= 90^\circ$; ita ut maximus vel et minimus valor eccentricitatis
 erunt $e = \frac{2n}{p}$ et $e = 0$ $g = g + 2n$ et $A = g - 2n$. Sed videmus
 esse $g = 7^\circ 40'$ et $A = 5^\circ$, ex quo sequitur $2n = \frac{g - A}{2} = 1^\circ 20'$ et
 evellit $dg = 80' \sin DCL$. Sed $DCL = ALD - AD = \mu - 2\alpha$, hinc $dg = 80' \sin(\mu - 2\alpha)$
 Nominando C , O longitudes medias lunae et solis et $\eta = C - O$ elongationem lunae
 a sole, habemus $\alpha = O - \text{apog} C = O - (C - \mu) = \mu - \eta$ et $\mu - 2\alpha = 2\eta - \mu$. — Possumus

itaque eversioni dare has duas formas

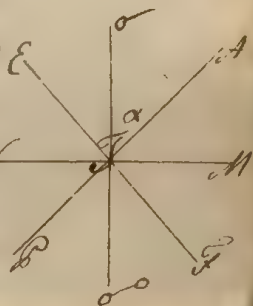
$$dq = 80' \sin(\mu - 2\alpha) \text{ vel } dq = 80' \sin(2\eta - \mu) \text{ inde praevidetur}$$

Nos supponimus anomaliam, computatam ab apogeo, esse multo minorem quam 180° , et hinc $\mu > \nu$: ex quo sequitur, si locus medius est datus, qui casus semper in tabulis suppositus (Vide: Berol. astron. Tafeln Band II. Side 47-50), subtractione debetur eccentricitatem a medio loco lunae vel a loco correcto per aequationem ellipticam centri; hinc habebimus $dq = -80' \sin(\mu - 2\alpha) = -80' \sin(2\eta - \alpha)$. Si anomaliam sunt computata a perigeo, eversioni assumet signum +. Haec ultima forma est illa, quae est adaptata in tabulis; et ipsius valor exactus, conclusus ex observationibus et ex theoria attractionis, est secundum tabulas celeb. Blorg, $= +80' 29'' \cdot 5 \sin(2\eta - \mu) + 35'' \cdot 4 \sin(2\eta - \mu)$. (Vide: Tablas astron. publ. par le bureau des long. de France P. I. Tab. XIII de la lune).

Eversio est effectus maxime considerabilis actionis solis in lunam: igitur fundata est in principiis physicis, sed observationes jam a tempore ptolemaei ejus dederunt comprobationem empiricam.

Eversionem est correctio, maxima aequationis centri, quae praesentatur tabula, et quae dependet solum a quantitate α ; sed est correctio centri generatione vel longitudinis lunae quaecumque sit ejus anomaliam: haec igitur dependet necessario a duobus argumentis, 1) a valore excentricitatis, quod dat argumentum α , et ab anomaliam μ ; ex quo resultat argumentum compositum $\mu - 2\alpha$.

Tabulae calculatae per praecedentes formulas aequationis centri et eversionis, debuerunt satisfacere omnibus observationibus, si haec essent solae inaequalitatis lunae. Sed hoc non erat casus; et facile erat delusio novarum inaequalitatum, quia maxime considerabilis inter illas, locum habet in aspectibus ubi eversionem est nulla. Si luna apsidum est in octantibus, faciendo cum syngis et quadraturis angulos 45° , correctio E (praevidetur) est nulla, et excentricitas habet primum medium valorem: quum igitur luna drive in syngis et quadraturis elongata est 45° ab apsidibus, debuerit habere in his duobus aspectibus eandem aequationem centri et eandem celeritatem. Sed terra in T , sed in T , α anomaliam est AB , NN , ET erant lineae apsidum, et quadraturarum et mediarum distantiarum, formantes inter se angulos $45^\circ = \alpha$. Si luna est in O , anomaliam est $\mu = \alpha$, et argumentum eversionis $\mu - 2\alpha = \alpha$, hinc eversionem $dq = -80' \sin \alpha$. In ultimo quadrantis M , $\mu = 180^\circ + 2\alpha$, $\mu - 2\alpha = 180^\circ$, $dq = -80' \sin \alpha$ in primo P



quadrantis N , habemus $\mu = 90^\circ + \alpha$, $\mu - 2\alpha = 90^\circ - \alpha$, $dq = +80' \cos \alpha$, tandem
 in oppositione S μ est $180^\circ + \alpha$, $\mu - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$, $dq = +80' \sin \alpha = +80' \cos \alpha$.
 Inter ea Tycho cui orbem hanc inventivam, observavit, celum
 statum lunae esse sensibilibus majorem in S quam in N ; et conti-
 nuare a S usq. ad E ita ut locus calculatus lunae maxime differet
 a vero loco lunae in medio inter S et N in E , et hanc differentiam
 crescere usq. ad $37' 14''$. Observata luna in diversis punctis orbis S per
 illi ostendit, hanc correctionem non dependere a positione appi-
 cendi, sed solum ab elongatione lunae a sole η . Haec erat maxi-
 mum positivum in aetantibus E, S , quae veniant immediate
 post syzigias, ubi η est 45° et $180^\circ + 45^\circ$; maximum negativum
 in aetantibus A, G , quae praecedunt syzigias, ubi η est $360^\circ - 45^\circ$
 et $180^\circ - 45^\circ$; erat nulla in syzigis et quadraturis, ubi η est 0° , 180° ,
 90° , vel 270° , et hoc quoque est ratio, cur haec correctio antiquiori-
 bus erat ignota, quia illi lunam tantummodo in syzigis vel qua-
 draturis observaverunt. Ita uti Ptolemaeus ope quadraturarum
 deluxit evolutionem, ita Tycho observando aetantes, deluxit hanc
 novam inaequalitatem quam appellavit variationem. Mayer
 invenit eundem valorem $37' 14''$.

Ea praecedentibus sequitur variationem posse exprimi per $+37' 14'' \sin 2\eta$.
 Haec est ad evolutionem et annes aequationes, de quibus adhuc sermo erit,
 effectus attractionis solis, et secundum tabulas celeb. Bürg,

$$= -2' 2'' 1 \sin \eta + 35' 41'' 7 \sin 2\eta + 3' 3 \sin 3\eta + 7' 3 \sin 4\eta$$

Haec expressio devenit maximum, si $\eta = 135^\circ$ et $\eta = 225^\circ$ h. e.
 $\mp 37' 14''$, ubi eam Tycho invenit. Variatio contenta est in
 Table XXXIV de M. Bürg.

Correctio hac ratione loco lunae per tres praecedentes aequationes,
 Astronomi observaverunt, calculum admodum bene concordare
 cum observationibus in fine Junii et Decembris, sed non aliis
 temporibus, praecipue circa aequinoctia.

Jam Tycho observavit hanc inaequalitatem, sed neq. hic neque
 Regulus determinaverunt ejus magnitudinem; hi Astronomi cogitarunt,
 hoc esse aequationem temporis propriam lunae. Sub hac forma eam quoque
 Horrelius in suas tabulas introduxit, determinando ejus valorem, ita uti
 est in oculis per observationem et per theoriā attractionis minimam
 $= 11' 16''$

Primum quod observare debuerunt est, hanc inaequalitatem, quae se
regulat secundum simplices, et quae habet pro periodo annum solarem,
non dependere ab orbita lunae, sed ab orbita terre et speciatim ab anomalia
Solis: Neptis ei dedit nomen aegualionis annuales, quod etiam
conservavit. Secunda observatio erat, primis temporibus, ubi motus so-
lis est rapidissimus, lunam fuisse retardatam, vel minus progressam
intra orbita, effectis vero tempore contrarium: ex hoc sequitur, aegualionem
annuam debere habere eodem argumentum vel aegualio centri Solis,
sed cum signo opposito. Ex tempore quo Newton probavit, actionem
Solis esse constantem omnium inaequalitatum lunae, natura eis erat ma-
jor, hanc actionem debere esse plus vel minus magnam secundum
distantiam Solis, ex quo debebat resultare nova aegualio, dependens
ab anomalia Solis vel aegualio annuales lunae. Dominans a anomalia
Solis, mediana Solis, numerata a perigee, aegualio annuales est secundum
Juno Burg $\text{I. VII} = -11^{\circ} 11' 3'' \sin a - 6'' \sin 2a$, haec aegualio igitur est nulla
quando Sol est in apsidibus, est maximum positivum vel negativum
 $= 11'' 12''$, si $a = 271^{\circ} 1' 53''$ vel $a = 88^{\circ} 58' 7''$.

Quia aegualio elliptica Solis fit $= +115' 22'' \sin a$ etc, Sol appropinquatus
vel elongatus a Luna, h. e. syzigia versu accidunt prius aut tardius
quam syzigia media, angulo $(115' 22'' + 11' 12'') \sin a$, quod fuit $126' 34''$, si a
est 90° vel 270° ad instantia veris et autumnii.

Antiqui, qui ne suspicabantur quidem, terminum $11' 12'' \sin a$, particu-
larum lunae, attribuerunt hanc accelerationem vel retardationem tan-
tum Soli: naturale igitur erat, ut invenirent aegualionem centri Solis
admodum magnam, quia eorum observationes syzigiarum illam dabant
confusam cum aegualione annuali. Ex eadem ratione simili invenirent
aegualionem centri lunae admodum parvam.

Quatuor aegualiones procedentes, solis, quarum cognitio debetur observa-
tionibus, sunt appellatae quatuor magnae inaequalitates lunae. Prima,
aegualio centri, provenit unice a motu elliptico lunae secundum leges Ke-
pleri, ita ut illa planetarum: ejus argumentum est anomalia media
 μ , ejus maximus valor $6^{\circ} 18' 28''$, ejus periodus est mensis anomalistici.
Secunda exetio, est uti omnes sequentes, effectus perturbationum
proventarum per Solem. Ejus maximus valor est $1^{\circ} 20' 30''$, ejus argu-
mentum $27 - \mu = \mu - 2\alpha$. — Quam motus diurni, nimirum synodici
et anony

et anomalisticis, sunt $\eta = 12^{\circ} 11' 26''$ et $\mu = 13^{\circ} 3' 54''$, motus diurnus
 evectiois $2\eta - \mu$, est $10^{\circ} 18' 59''$, quod est ad 360° , uti η est ad $31^{\circ} 19' 26''$
 quod est periodus evectiois.
 Tertia inaequalitas, variatio, habet pro argumento δ , id quod nominamus
 ad Saturnum lunam (Page) η . Haec dependet a phaetibus lunae, ejus periodus
 est mensis synodicus, et ejus maximus valor $37' 6''$.
 Quarta, seu aequatio annualis, habet pro argumento anomaliam medianam
 Solis α , ejus periodus est annus anomalisticus, et ejus maximus valor
 $11' 12''$.
 Periodus, composita ex quatuor procedentibus, id est sit multiplex eorum,
 cumq; earum, erat illa quatuor magnarum inaequalitatum, seu temporis,
 in quo omnes quatuor aequationes se pallebant, et iterum incipiunt, ita
 ut durante tali periodo, ex omnibus quatuor aequationibus composita
 aequatio, qua una sola speculari posset. Sed talis periodus, ut sit exacta,
 deberet esse excessiva longitudinis, et nullam haberet utilitatem.
 Inter ea possumus nos servire simili periodo ad verificationem
 aut diuturnam inaequalitatum per observationes: talis est periodus
 Chaldaica ad verificandam simul primam et tertiam inaequalita-
 tem. Magnitudo et periodus quatuor procedentium inaequalitatum
 sunt ita notabiles, ut Astronomis non effugere poterunt. Natu-
 raliter detectae sunt, quando perveniebant ad earum maximum, per
 quod eodem tempore cognita est earum periodus vel earum argumen-
 tum, et ejus maximus valor sui coefficientis constans formulae, per
 quam effectus sunt expressi. In autem sunt proportionales sinusibus
 tangentibus, aut alii functioni argumenti, hoc tantum modo expe-
 riendo et per hypothesis inveniendi potuit. Tandem per Astronomicam
 physicam, innoverunt haec functiones a priori. Quam periodus sui
 argumenta triam ultimarum inaequalitatum, quae sunt compositae
 ex anomalia Solis et ex elongatione lunae a Sole, clare ostendunt,
 has correctiones omnes dependere a Sole, hoc locum dedit ad detectionem
 theoriae physicae perturbationum lunae per actionem Solis. Per illos
 quatuor aequationes eo pervenerunt, ut locus calculatus lunae cum
 observationibus ad aliqua minuta concordaret: inaequalitates, quae
 adhuc locum habebant, non patuerunt majores esse $1'$ vel $2'$, igitur erat
 insensibilis pro Ptolemaeo qui suis observationibus tantummodo
 ad $10'$ fere respondere potuit. — Quam autem exactius observa-
 tionibus

observationum novissimis temporibus tam procul est, error aliquot
 minutorum jam admodum esset considerabilis. Quibus quæri debent novæ
 inæqualitates lunæ productæ per actionem solis, de huiusmodi harum per
 varium correctionum erat per longum tempus occupatio principis
 maximorum Astronomorum. Per observationes solum problema
 non resolvi potest; observationes quidam ostendunt, aliepe adhuc
 inagnitas correctiones, sed quoad ejus naturam nihil in diuervit.
 Hæ correctiones sunt compositæ e magno numero independentium
 æquationum, quarum periodi sunt ita differentes inter se, ut
 omnes conditiones delegendi ordinem vel legem, quam sequerentur,
 erant inutilis. Propterea earum summa tantum modo appendebat
 ad aliquot minuta, et quam observationibus, in quas per altitudinem
 et diametrum lunæ, cum aliis non satis notis et ab istis
 correctionibus quoque affectis quantitatibus summi habent influ-
 xum, ad 1' fides tribui non poterat, impossibile erat, per observa-
 tiones solas, summam correctionum de componendi in singulas per-
 tes, quarum aliquæ forsitan minus considerabiles erant, quam erro-
 res observationum. Recurrere igitur debuerunt ad theoriam
 physicam, et nunc orla est maxime difficilis et periculis pars
 Astronomiæ, nimirum constructio exactarum tabularum prin-
 cipis physici innixarum. — Newton monstravit viam: ocu-
 patus erat calculo inæqualitatum lunæ, et plures Astronomi
 calculabant secundum ejus formulas, tabulas lunares, quæ autem
 adhuc valde distant ab exactitudine. Theoria lunæ erat tunc ad-
 huc obiectum dignum disquisitionum celeb. Geometrarum, uti
 v. c. Dalmbert, Clairaut, Euler etc. Anno 1753 L. Euler publi-
 cavit suam primam theoriæ motuum lunæ, et Tob. Mayer cor-
 rexit tabulas datas per Eulerum, comparando eas cum observa-
 tionibus, quod in occasione dedit ad delegendas planas novas
 æquationes; sed nec tabulis Mayeri, nec formulæ Euleri satis
 juvabant. Anno 1772 L. Euler publicavit suam novam theoriæ
~~motus~~ motus lunæ, in qua adhibuit methodum plane differentem
 per quam invenit novas æquationes. Brevi tempore prius appa-
 ruissent v. l. m. tabulæ Tob. Mayeri, quæ fundate sunt et
 in theoria Euleri et in comparatione 200 observationum et
 quæ dant locum lunæ magna cum præcisione. — Anno 1799 appa-
 ruit

apparuit tandem Mechanica celestis per B. S. Laplace, opus
quod epocham fecit et facit in historia Astronomiae et culturae
ingenii humani. Lib. VII. tom. II. huius operis sacra est
Theoria lunae: ille continet magnam numerum novarum in aequa-
tionibus, derivatarum e theoria attractionis, et confirmationum
per observationes, quae faciunt basin ultimarum tabularum a
celeb. Bürg et Burckhardt. His disquisitionibus, ita ingeniosus
ut molissus, debemus hanc magnam prædictionem, quae actualiter
nossumus motum lunae, et utilitatem istam magnam, quae pro-
degit navigationi et Geographis. —

Ad simplificationem aequationum lunae, Mayer proposuit in una sola ta-
bula omnes eas, quae poluerunt mitti sub eodem argumentum: et per
hoc reduxit novas inaequalitates ad numerum decem. Hæc præter
debeant uti empirici, sed ad explanationem constructionis et usus tabu-
larum, dare debemus ideam generalis omnium inaequalitatum lunae.
Quoniam illæ proveniunt ab actione Solis, quæ secundum habent, si orbi-
tes Solis et lunæ essent inactares, et in hoc casu deperirent illæ omnes
a ratione constanter inter diametros amborum orbitarum. Sed quoniam
ipsæ orbitæ sunt ellipticæ, valor medius harum inaequalitatum,
qui semper determinabitur per præcedentem rationem, erit subiectus
pauca variationibus quas nominamus correctiones et quæ
dependunt a variationibus distantiarum Solis et lunæ: manifestum
est, actionem Solis orbere esse plus vel minus fortiter, in ratione,
quæ appropinquatus vel elongatus a luna. Atque, quoniam hæc correc-
tiones dependunt ab anomalia Solis et lunæ, earum argumenta
erunt hæc ipsæ anomalie, combinata cum argumentis aequationum
diversis modis: maxima harum est evolutio. —

Aequationem aspectuum conjungunt Theoria Astronomi cum
evectione, quæ habet idem argumentum, sed ejus correctio depen-
dens ab anomalia Solis, requirit tabulam specialem. Hæc motus
influit mediate in longitudinem lunæ, variando ejus anomaliam
et consequenter aequationem centri. Quoniam anomalia lunæ est unum
principale argumentorum, quod introat in omnes aequationes, inepi-
debet una correctione anomalia; hæc correctio ascendit usque ad $22' 17'' 5$,
quod producit variationem aequationis centri, vel longitudinis $2\frac{1}{2}'$. —

Hanc similes correctio dependens ab anomalia Solis, est applicanda ad lineas
modorum. Videamus dispositionem tabularum colli. Börg, quae spectant
longitudinem. —

Notinemus longitudinem veram Solis \odot , ejus medianam anomaliam a
longitudine medianam $\text{long. } C$, ejus anomaliam medianam computatam
a perigeo A , longitudinem medianam nostram ascendentes N , ejus supple-
mentum $360^\circ - \odot N = N$, longationem a Sole $C - \odot = E$.

Quintum fit per aequationes annuales ejus argumentum est a
(Tab. VII), haec adhuc indiget correctione, fundum dixerat distantiam
long a terra, quae hinc dependet ab A et a , ejus argumentum est $A - a$
(Tab. XVI). — Variatio, quae habet, pro argumento E , (Tab. XXXIV) est
igitur correctio quae dependet ab A et a , earum argumenta igitur
erunt composita ex E vel $2E$, a et A . — Evidens aequaliter est subje-
ta correctionibus quae dependunt ab a et A , praeter argumentum hunc
tionis $2E - A$, ex quo resultant argumenta ejusdem formae uti illa
variationis. Generaliter facile videmus, perurbationes motus hunc
circa terram, praesentias per Solem, debere necessario dependere ab ejus
situatione relative ad punctum quod occupat Luna in sua orbita, hinc
1) ab E 2) a differentia distantiarum terrae a Luna et Sole, hinc ab A
et a , ex quo sequitur, fere omnia argumenta esse composita ex E , A et a .
Omnes haec correctiones sunt contentae in tabulis VII, IX, X, XI, XIII,
XXII, XXIV, XXV, XXVI.

Quum actio Solis, necesse est, orbita mutari in ratione qua, vel rursus,
vel a plano orbitae lunaris, resultant aequationes, quae dependunt
a distantia Solis et Lunae a nodo: igitur habent argumenta composita
ex \odot per N , \odot et C (Tab. XXIII, XXIV); argumentum $C - N$ dicitur quod
inversionem ad eclipticam (Tab. XXXVII). Haec aequationes, ita ut si
omnes ceteris, indigent correctionibus, propter ellipticitatem orbitae
lunaris, quae igitur dependunt ab A , ita ut earum argumenta
erunt composita ex N , \odot , C et A (Tab. XXV, XXIX, XXX, XXXVI).

Aequatio centri est contenta in Tab. XXXVIII.

Haec sunt 28 aequationes longitudinis; tabulis XXXI, XXXIII conti-
nentur correctiones argumentorum (quod motum apsidum et nodorum).

Possumus construere omnes tabulas istas, ut apud omnes media
argumenta a , A , E , etc. sunt. Sed quum hac ratione evaderent adhuc
magis complicatae, in plures sectiones distribuitae sunt istae, ut in
qualibet sectione adhibeantur argumenta correctae per tabulas proce-
duntium ~~ex~~ sectionum. —

Designand hinc per $C, C', C'', C''', A, A', N$ valores quantitatum
 C, A, N , correctos per successive sectiones, omnes aequationes suas
in longitudine sunt contentae in sequentibus formulis; cifras romanas
inditant tabulas celeb. Bürg. quae praesentant quantalibet aequationem.
In editione harum tabularum publicarum, per le Bureau des lon-
gitudes de France, omnes aequationes sunt constructae add. sing. quae
per eorum naturam, modo sunt positivas, modo neg. atque: ad hunc effe-
tum aucta est quaelibet aequatio quantitate constanti in numero ro-
tundo, qui solutus dabit ipse aequalis ejus maximo valori negativo.
Secundum hanc dispositionem tabularum add. hinc sunt fa-
cienda, et in fine calculi summa omnium, constantium subtrahenda,
seu evitandum est hanc subtractionem, dispositio ita est facta,
ut haec summa sit accurata 360° —
Prima correctio longitudinis C , contenta in tabulis VII — XXX, est

$$\begin{aligned}
 & - (11'' 11' 3 \sin a + 6'' \sin 2a) \text{ VII} + 11'' 5 \sin (E+a) \text{ VIII} \\
 & + (4'' 9 \sin (E-a) + 2'' 6 \sin 2(E-a)) \text{ IX} \\
 & - (2'' 6 \sin (E+a) + 4'' 6 \sin 2(E+a)) \text{ X} \\
 & - (21'' 4 \sin (E-a) + 58'' 6 \sin 2(E-a)) \text{ XI} \\
 & + (1' 26' 29'' 5 \sin (2E-a) + 35'' 4 \sin 2(2E-a)) \text{ XII} \\
 & - 5'' 8 \sin (2E+a) \text{ XIII} + 2'' 1 \sin (2E-3a) \text{ XIV} \\
 & + 39'' 3 \sin (A-a) \text{ XV} + 53'' 9 \sin (2E+a) \text{ XVI} \\
 & + 26'' 5 \sin (2E-a) \text{ XVII} + 1'' 1 \sin (E-A+a) \text{ XVIII} \\
 & + 14'' 6 \sin (2E-A+a) \text{ XIX} + 48'' 6 \sin (2E-A-a) \text{ XX} \\
 & + 2'' 2 \sin (2E+A+a) \text{ XXI} + 1'' 3 \sin (2E+A-a) \text{ XXII} \\
 & - 6'' 8 \sin N \text{ XXIII} - 62'' 5 \sin 2(C+N) \text{ XXIV} \\
 & - 6'' 4 \sin 2(C+N-A) \text{ XXV} - 10'' 6 \sin (4E-A) \text{ XXVI} \\
 & + 1'' 1 \sin (4E-3a) \text{ XXVII} - 1'' 2 \sin (2A-2E-a) \text{ XXVIII} \\
 & + 6'' 9 \sin (2E-A-2C-2N) \text{ XXIX} - 8'' 8 \sin (2E+A-2C-2N) \text{ XXX}
 \end{aligned}$$

Argumenta, quae referuntur ad solem, C et a , debent sumi e tabulis
Solaribus, argumenta C, A, N sunt calculata in tab. lam. (Tab. I — VI)
Invenienda hac ratione prima correctione. Per 24 praecedentes aequatio-
nes, formabitur nunc longitudo prima vice correctae $C' = C + p$, quae
serviet ad formationem sequentium argumentorum. Sed antequam
calculatur aequatio centri, corrigi debet ejus argumentum, anomaliam
 A , quae est multo major quam media, non solum quantitate p , sed
adhuc correctione, quae sequitur ex motu apsidum: haec est
 $p = -22' 17'' 3 \sin a - 11'' \sin 2a$ (XXXI). Correctio nodi, vel ejus supplementi q
est $q = +9' \sin a + 4'' \sin 2a$ (XXXII). Hoc dat valores correctos quantitatum
 A et N , nimirum $A' = A + p$, et $N' = N + q$. Anomalia A' dat

(XXXIII) aequationem centri, $ae = +6^{\circ}18'12''2 \sin A + 2^{\circ}56'4 \sin 2A + 3^{\circ}3 \sin 3A + 1^{\circ}9 \sin 4A + 0^{\circ}1 \sin 5A$,
 quacum nunc formatur longitudo correcta secundam vice $C'' = C' + ae$
 et longitudo correcta, $E'' = C'' - O$. Hoc est variationem (XXXIV)
 $Q = -2^{\circ}2'1 \sin E' + 35'11''7 \sin 2E' + 8^{\circ}3 \sin 3E' + 7^{\circ}3 \sin 4E'$ et longitudo,
 nunc correctam tertiam vice, $C''' = C'' + Q$ quacum invenitur aequatio
 $r = -1^{\circ}24'4 \sin(2C'' + 2N'' - A'')$ (XXXV), et $C^{IV} = C''' + r$. Hoc argumen-
 tum dabit reductionem ad eclipticam (XXXVI)

$R = -6^{\circ}46'8 \sin 2(C^{IV} + N^{IV}) + 2^{\circ}1 \sin 4(C^{IV} + N^{IV})$, ex qua tandem habetur ve-
 ra longitudo in ecliptica $C^V = C^{IV} + R$, quae diu corrigi debet per muta-
 tionem, ita uti hoc fit relate ad Solem. Reductio R invenitur
 in tabula XXXVII confusa cum una perurbatione ejusdem argumenti $C + N$.
 Applicando conjunctim haec aequationes cum signis oppositis ad
 aliquam longitudinem observatam, habebimus aliquam longitu-
 dinem medianam, quae servare potest quae epocha. Haec est in tabulis
 celeb. Bérz. pro initio anni 1801 Paris, $= 3^{\circ}21'36''30''6$.
 Nullum dubium est propter has inaequalitates productas per
 actionem Solis, lunam quoque subjunctam esse perurbationibus produ-
 ctis per attractionem planetarum. Haec sunt majores sunt multo
 minores quam illa Solis, hinc non possunt producere inaequalita-
 tes majorem $1''$ vel $2''$. Interim Bérz. habet in suis tabulis lunc
 publicatis per le bureau des longitudes en 1812, quoque in calculum
 dedit actionem planetarum Jovis et Venus, quorum unus est
 maximus, alter tunc vicinissimus; ille invenit has aequationes

$$-1^{\circ}1 \sin(\varphi - \delta) + 8^{\circ}4 \sin 2(\varphi - \delta),$$

$$+ 0^{\circ}8 \sin(\delta - \varphi) - 0^{\circ}2 \sin 2(\delta - \varphi)$$

2 Venus
 8 Terra
 24 Jovis

Eadem tabulae dant aequationem:

$$P = -10^{\circ}59'8 \sin a - 7^{\circ}1 \sin 2a + 9^{\circ}3 \sin(E+a) + 2^{\circ}3 \sin(E-a) + 7^{\circ}3 \sin 2(E-a) - 2^{\circ}3 \sin(E+a) - 4^{\circ}3 \sin 2(E+a)$$

$$- 2^{\circ}3 \sin(E-a) - 5^{\circ}9 \sin 2(E-a) + 56^{\circ}28'3 \sin(2E-A) + 35^{\circ}5 \sin 2(2E-A) - 5^{\circ}7 \sin 2(E+A) - 0^{\circ}9 \sin(2E-3A)$$

$$+ 10^{\circ}4 \sin(A-a) - 1^{\circ}7 \sin(2E+a) + 14^{\circ}7 \sin(2E-a) - 18^{\circ}4 \sin(2E-A+a) + 190^{\circ}0 \sin(2E-A-a)$$

$$+ 2^{\circ}1 \sin(2E+A-a) - 7^{\circ} \sin N - 59^{\circ}2 \sin 2(C+N) + 7^{\circ}4 \sin 2(C+N-A) - 12^{\circ}2 \sin(4E-A) + 1^{\circ}1 \sin(4E-3A)$$

$$- 4^{\circ}6 \sin(2A-2E-a) + 6^{\circ}6 \sin(2E-A-2C-2N) - 10^{\circ} \sin(2E+A-2C-2N);$$

$$et - 83^{\circ}8 \sin(2C+2N-A) - 70^{\circ}6 \sin(A+a) - 6^{\circ}3 \sin 2(A+a) + 6^{\circ}7 \sin(2E-A-2a) + 2^{\circ}8 \sin(2A+a-2E)$$

$$- 1^{\circ}8 \sin(2N+2O+a) - 0^{\circ}9 \sin(2E-A+2a) + 0^{\circ}8 \sin(2A-a) + 0^{\circ}7 \sin(A-2a);$$

aequationem centri

$$= +6^{\circ}8'12''4 \sin A + 12^{\circ}57'1 \sin 2A + 3^{\circ}7'2 \sin 3A + 1^{\circ}8 \sin 4A,$$

variationem

$$= -2^{\circ}2'7 \sin E' + 35'38''6 \sin 2E' + 2^{\circ}9 \sin 3E' + 9^{\circ}1 \sin 4E'$$

et reductionem ad eclipticam $= -6^{\circ}52'2 \sin 2(C^{IV} + N^{IV})$

Nodi et inclinatio orbitae lunae

Quoniam terra constanter sit in planis eclipticae et orbitae lunaris, po-
 sitio horum duorum planorum potest esse determinata, per observa-
 tiones admodum simplices: et una sola revolutio lunae sufficiat
 ad hunc effectum, si hic satelles moveretur rigore in eodem plano.
 Observationes habitudinis lunae durante una integra revoluzione,
 sunt temporales, ubi ejus habitudo est nulla; et ubi est maximum
 primum tempus dat locum nodorum, secundum inclinationem
 orbitae, quam jam Ptolemaeus magna cum praecisione determina-
 vit, supponens eam 5° . Motus retrogræsus nodorum est ita rapi-
 dus, ut observari possit facile jam post unam vel duas revoluciones.
 Minuta, ubi luna transit per eclipticam, ubi nimirum ejus lati-
 tudo est nulla, in una revoluzione jam retrocedebant $1\frac{1}{2}^{\circ}$, et in fine
 21 mensium jam integro signo, ita ut nodi faciant unam revolu-
 tionem in 18 et $\frac{1}{2}$ annis. Occultationes stellarum indicant hunc
 motum adhuc magis sensibili modo. Regulus, stella primae magni-
 tudinis, saepius occultatur a luna; quod probat, lunam diu esse
 admodum vicinam suo nodo, quia latitudo stellarum tantummodo est
 24° vel 28° . Vidimus, qualibet mense sequenti, lunam se elevare
 septembris enim versus, et in fine 4-5 annorum lunam esse supra
 Regulam in distantia 5° , igitur esse elongatam a nodo ascendenti
 90° , in eadem regione, ubi erat in nodo ante quatuor annos. Post
 novem annos luna iterum occultat Regulam, descendens meridien-
 tem versus: post 14 annos transit supra hanc stellam in distantia 5° ,
 et in fine 18 $\frac{1}{2}$ annorum stella occultatur, uti prima vice; nodi re-
 veniebant ad eandem positionem, perierant unam revolutionem
 in 18 $\frac{1}{2}$ annis. Eclipses sunt decem resultatum, quum earum ma-
 gnitudo dependat a latitudine lunae, essent constanter ^{eiusdem} naturae
 in eadem regione caeli, si nodi essent immobiles, sed hoc immutatur
 ab anno ad annum donec post 18 annos eclipses revertantur jam
 duo eundem ordinem.

Periodus Chaldaica non est satis exacta ad determinationem mo-
 tus nodorum; sed illa 441 annorum, imaginata per Hipparchum,
 dat mensuram anomalissimam fere ad aliquam minutam secundam.

Ptolemaeus (Almag. l. IV. c. 9.) determinavit motum nodorum ope
 duarum eclipsium lunae, admodum a se invicem elongatarum,
 quae locum habuerunt circa eundem modum, in eadem margine lunae,

post eundem nodum: cui una latitudo anni, λ , est negativa et nos habebimus

$$\lg\left(\frac{L+L'}{2} - P\right) = \frac{\sin(A-\lambda')}{\sin(A+\lambda')} \lg\frac{L-L'}{2} +$$

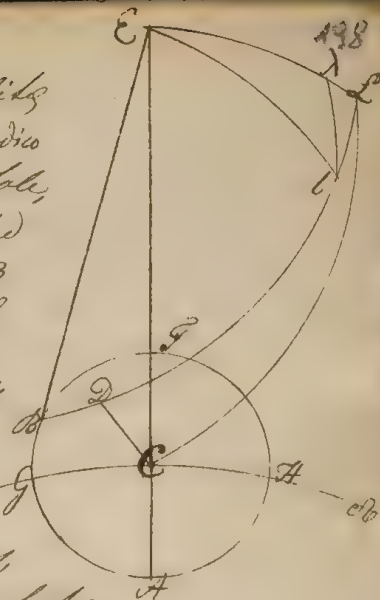
$$P = \frac{L+L'}{2} - \left(\frac{L-L'}{2} - P\right)$$

$$\lg i = \frac{\lg L'}{\lg\left(\frac{L+L'}{2} - P\right)}$$

Faciendo has observationes in pluribus transitibus lunae per nodum invenietur motus nodorum et variatio inclinationis. Secundum tabulas celeb. Bürg, motus nodorum in 365^d est = -19° 19' 43".36; sine in 36525^d = -6963106" = -5^h 134° 11' 40" relative ad puncta aequinoctialia, et motus sideralis in 36525^d = -5^h 135° 35' 10" = -6968110"; ex quo concluditur duratio unius revolutionis nodorum relative ad puncta aequinoctialia = 6798.1789720095934 = 6798^d 4^h 17' 43".18162887, duratio unius revolutionis sideralis nodorum = 6793.291149829984 = 6793^d 6^h 59' 15".3447922176. Cum motus pericelici lunae in 36525 diebus fit = 1936^h 307^m 52^s 43".5 motus relative ad nodos erit = 1342^h 82^m 4' 29".5 ex quo habetur duratio unius mensis draconici = 27^d 212217681667 = 27^d 5^h 51' 35".6769603 quae huiusmodi 0".4 differt a resultato quod invenit Ptolemaeus. Cum motus retrogradus nodorum fit, uti omnes perurbationes lunae, effectus attractionis Solis, necessaria est correctio, quae dependet ab anomalia Solis, et quae prius est data (quando sermo erat de tabulis). Hae epochae et motus medii nodorum possunt calculari, pro epocha data, locus nodorum et limitum, ubi latitudo est aequalis inclinationi; sed Tycho jam observavit motum nodorum et inclinationem habere inaequalitatem, quae dependet ab elongatione lunae. Et, et quae igitur ita uti variatio, non potuit cognosci ab antiquis, qui tantummodum observaverunt eclipses. Haec de huius est confirmata a tempore Tythonis. Si nodi sunt in quadraturis, limites in syzygiis, inclinatio est 5°, ubi invenit Ptolemaeus, sed si nodi sunt in syzygiis, inclinatio est = 5° 17' 34", si nodi et limites coincidunt cum octantibus, valor est intermedius = 5° 8' 47". Linea nodorum habet in syzygiis et quadraturis, prout propositionem mediam conformem praecedenti Theoriae: sed extra hos aspectus, declinat ab hac, et maximam octantibus, ubi differentia est 1° 46'. Tycho explicavit has duas inaequalitates per hypothesin admodum simplicem, quae quoque inventa est conformis Theoriae et observationibus.

Est

Sit E polus eclipticæ, Centrum; circa quod verus polus orbis
 lunaris describit parvum circulum AB in semimenſe ſig. nodico
 ſecundum hæc legem. Si luna eſt in conjunctione cum ſole,
 polus orbis eſt in puncto E quælibet inſiſtens ac E ; ſed
 ſi elongatio lunæ a ſole eſt $= E$, polus erit in B it ECB
 $= 2E$. Conſequenter polus eſt in primo et tertio octanti in C ,
 in prima et ultima quadratura in A in ſecundo et quarto
 octanti in H et ibi ſignificans in F . Inclinatione nuda hinc eſt
 $EC = EQ = EH = 5^{\circ} 3' 44'' = v$, minima $EB = 5^{\circ}$ maxima
 $EA = 5^{\circ} 17' 34''$ hinc diameter $AB = 17' 34''$ $CF = CH = 8' 47'' = \alpha$
 vel ſecundum Bürg $v = 5^{\circ} 46''$, $\alpha = 8' 48''.4$; et vera incli-
 natione eſt EB , ſi elongatio eſt $E = \frac{1}{2} EEB$. Circulus maximus,
 perpendicularis ad EC , ubi GC , debet tranſire per nodos orbis,
 B, V , qui ſunt poli circuli maximi EC : conſequenter, ſi polus eſt
 progreſſus a F ad B , BEV erit angulus rectus, hinc B eſt pro-
 greſſus verſus EC angulo BEV , qui eſt correctio nodorum, ubi eſt
 correctio poli B . Maximus valor huius correctionis CEH invenitur
 duccendo circulum maximum EH vel EG tangendum ad circulum
 parvum AB : erit habemus $\sin CEG = \frac{\sin \alpha}{\sin v}$, hinc $CEG = 1^{\circ} 38' 12''$
 Hæc correctio nodorum et inclinationis non eſt immediata in tabu-
 lis, ſed ibi invenitur effectus, quem habet hæc correctio in lati-
 tudinem lunæ, ſeu æquatio latitudinis, de qua ſtatim erit ſermo.
 Si BLV eſt ordo ſignorum, et L locus lunæ non correctus $NCL = \alpha$
 erit argumentum latitudinis, vel diſtantiæ lunæ a nodo B ,
 computata in orbita, et $ECN = 90^{\circ} - \alpha$. Faciendo $ECB = 2E$, verus
 polus orbis erit in B , a quo luna conſtanter orbit diſtare 90° . Per
 correctionem de qua hic agitur, luna translata eſt in L , ſi ſunt
 BL et LC 90° : ducta hinc CD perpendiculariter ad BL , LD erit æqua-
 lis LC et $DB = \alpha$. Sed habemus $LCB = 90^{\circ} - \alpha + 2E$, ex quo ſequitur
 $DCB = LCB - 90^{\circ} = 2E - \alpha$, et BD ſeu $LD = \alpha \sin(2E - \alpha)$. Conſe-
 quendo EL , EL , demittendo in EL perpendiculari LD , et nominando β
 latitudinem lunæ, habemus $EL = 90 - \beta$ et $EL - EL$ vel $LD = +\beta$ cor-
 rectionem latitudinis. Preterea in triangulo ELC habemus
 $\sin EL = \frac{\sin ECL}{\sin EC \sin L} = \cos \alpha \sin v$ et ſere $ELB = EL$, quia
 differentia BL C nunquam aſcendit ſupra $8' 48''$: hinc habemus
 in parvo triangulo ELD , $LD = \alpha \sin(2E - \alpha) = \frac{\alpha \sin(2E - \alpha)}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \sin^2 v}}$ vel
 ſere $LD = \beta = +8' 48''.4 \sin(2E - \alpha)$.



Hæc correctio est æquatio II latitudinis in tab. XXXVIII celeb. Bing.
 quæ resultatam potest adhuc simpliciori modo inveniri. Nos præ
 figura supponit, ordinem figurarum esse circa punctum C orbis JPB
 hinc circa punctum E ellipticus BDEPA vel BLEB, ita ut punctus orbis
 C, et hinc quoque nodi retrocedant angulo CEB, hinc $\angle CEB = \angle DEB$.
 Sed $\alpha = C - B$ ex quo $\partial\alpha = -\partial B = \angle CEB$ ---- (1)

Proterea, $CE = v$, $BE = v'$, sunt in clinatio media et apparens,
 ex quo sequitur $\partial v = BE - CE$ ---- (2)

Notis in triangulo CEB, $CE = v$, $CB = a$, $\angle BCE = 2E$ habebimus

$$\cos BE = \cos a \cos CE + \sin CE \sin 2E \text{ ---- (3)}$$

$$\text{Sed } \angle CEB = \frac{a \sin 2E}{\sin v - a \cos v \cos 2E} \text{ ---- (4)}$$

Quum autem a minus sit quam 1, possumus facere $\sin a = \sin a$
 et $\cos a = 1$, quod datur

$$(3) \cos BE = \cos CE + a \sin v \sin 2E, \quad (4) \text{Sed } \angle CEB = \frac{a \sin 2E}{\sin v - a \cos v \cos 2E}$$

vel fore $\angle CEB = \frac{a \sin 2E}{\sin v}$, quod substituendum in (1), dabit

$$(5) \partial\alpha = \frac{a \sin 2E}{\sin v}$$

Ad habemus $\cos BE - \cos CE = 2 \sin \frac{CE - BE}{2} \sin \frac{CE + BE}{2} = (CE - BE) \sin CE$
 fore substituendo hoc in æquatione (3) habebimus

$$(CE - BE) \sin v = a \sin v \sin 2E, \text{ hinc per æquationem (2)}$$

$$(6) \partial v = -a \cos 2E$$

Sed nos habemus $\sin \beta = \sin \alpha \sin v$ cujus differentiale est
 $\partial \beta = \frac{\partial \alpha \cos \alpha \sin v + \alpha \cos \alpha \cos v}{\cos \beta} = \frac{a (\sin 2E \cos \alpha - \cos 2E \sin \alpha \cos v)}{\cos \beta}$

Supponendo hinc $\cos v$ et $\cos \beta = 1$ quia sunt semper majores
 quam 0.996, erit $\partial \beta = a \sin (2E - \alpha)$ uti prius.

Hæc inæqualitas proprie est effectus variationis in latitudine, quum
 ejus argumentum $2E$ debet esse combinatum cum α , quia in eodem
 modo actio solis non potest promoveri, bene a plano suæ orbis.

Proter correctionem præcedentem debetiam per Tycho-nem, theoria
 dicit, plures parvas correctiones latitudinis. — Præter videmus, actio
 nem solis debere non solum longitudinem sed et latitudinem suam
 variare in ratione, in qua sunt remotius ab elliptica, et in ratione
 diversarum distantiarum suarum et solis, quorum primum dependet
 ab argumento latitudinis $\alpha = C - B$ vel $C + B$. Aequationes la-
 titudinis hinc habebunt præter argumenta communia cum illis

longitudinis

longitudinis, E. a. A, ad huc α pro argumento. Hæ æquationes, quæ ap-
plicantur ad idem sunt continentes in tab. XXXI^{III} Bürg et habent sequen-
tem valorem:

$$C = -3''.1 \sin(\alpha - a) (A)_{III} + 1''.6 \sin(\alpha - A) (II) - 25''.1 \sin(\alpha - 2A) (I) - 1''.9 \sin(\alpha - 3A) (IV) \\ + 9'' \sin(2E - \alpha + a) (VII) + 3''.7 \sin(2E - \alpha - a) (VIII) + 2''.2 \sin(2E - \alpha + A) (IX) \\ - 15''.9 \sin(2E - \alpha - 2A) (X) - 5''.2 \sin(2E - \alpha - 2A) (XI) - 8'' \sin C'' (XII);$$

quibus addi debet æquatio $A = +8' 48''.4 \sin(2E - \alpha) (A)_{II}$, et latitudo ipsa B ,
quæ dependet simpliciter ab inclinatione orbitæ lunaris ad eclipticam
 v , et a distantia lunæ a nodo α . Nos habemus æquationem

$\sin B = \sin v \sin \alpha$, argumentum variabile est $\alpha = C'' - \delta'$, et coefficientis
constans $\sin v = \sin 5^\circ 8' 46'' = 0.0896959 = \lambda$. Ope serici, quæ dat angulum
in functione sui sinus, erit $B = \lambda \sin \alpha + \frac{\lambda^3}{8} \sin^3 \alpha + \frac{3\lambda^5}{40} \sin^5 \alpha + \dots$

et substituendo pro $\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha$

$$\sin \alpha = \frac{8}{5} \sin \alpha - \frac{18}{16} \sin 3\alpha + \frac{16}{16} \sin 5\alpha$$

$$B = \left(1 + \frac{\lambda^3}{8} + \frac{3\lambda^5}{64}\right) \sin \alpha - \frac{\lambda^3}{8} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{16}\right) \sin 3\alpha + \frac{3\lambda^5}{640} \sin 5\alpha + \text{etc.}$$

Si vellemus omnia exprimere in secundis, habebimus

$$\lambda = 5^\circ 8' 21''.1, \lambda^3 = 2' 28''.85, \lambda^5 = 1''.2, \text{ hinc}$$

$$B = 5^\circ 8' 39''.7 \sin \alpha - 6''.29 \sin 3\alpha + 0''.01 \sin 5\alpha,$$

vel secundum tabulas celeb. Bürg (XXXI^{III})

$$B = 5^\circ 8' 40''.8 \sin \alpha - 5'' \sin 3\alpha$$

Latitudo correcta hinc erit, $\beta = B + A + C$. In tabulis publicatis
per le bureau des longitudes, omnes hæ æquationes sunt adhibita
cum signo contrario, quia ipsæ tabulæ dant complementum latitu-
dinis vel distantiam lunæ a polo boreali eclipticæ. Tabulæ celeb.
Bürg harum dant latitudinem ope sequentium æquationum:

$$\beta = 5^\circ 8' 38''.3 \sin \alpha - 5''.7 \sin 3\alpha + 8' 46''.2 \sin(2E - \alpha) - 25''.9 \sin(\alpha - a) \\ + 23''.9 \sin(\alpha + A) + 14''.7 \sin(\alpha - A) - 24'' \sin(\alpha - 2A) - 10''.1 \sin(2E - \alpha + a) \\ + 22''.4 \sin(2E - \alpha - a) + 2''.5 \sin(2E - \alpha + A) - 16''.3 \sin(2E - \alpha - A) \\ - 5''.2 \sin(2E - \alpha - 2A) - 8'' \sin C''.$$

Notis, longitudine vera in orbita C'' , inclinatione v et argumento
latitudinis $\alpha = C'' - \delta'$ habebimus reductionem ad eclipticam

$$\alpha = \frac{v^2}{2} \left(1 + \frac{v^2}{6}\right) \sin 2\alpha - \frac{v^4}{32} \sin 4\alpha$$

ubi v est $5^\circ 8' 46''$.

Motus horarius et parallaxis lunae

Si agitur de cognitione loci lunae pro pluribus epochis, quae a se invicem tantummodo aliquot minutis aut horis, sunt elongatae, qui casus occurrit in calculo eclipsium et in pluribus aliis occasibus, admodum moleste esset, omnes locos lunae sumendi ex tabulis. Facilius hoc perficitur, calculando locum exactum pro epocha intermedia et diu interpolando pro ceteris momentis quae motus horarii sunt. Ad hunc finem autem necessaria est cognitio motus horarii magnaeurae praecipue. Simplicissimum modum est sine dubio, calculando longitudinem et latitudinem lunae pro duabus epochis una hora a se invicem elongatis, et sumendo earum differentiam pro motu horario. Sed quoniam tabulae diu tantummodo numerum integrum minutorum secundorum, possunt oscillare errores plus minus minutorum secundorum. Quod tamen, quoniam motus tunc non sit uniformis, orberemus adhibere saltem differentias secundas, quae supponit calculum trium locorum lunae. Simplicius et securius erit, si serviemus formulis quae quia derivatae e theoria physica, sunt basis procedendum omnium aequationum. Methodus per quam conclusionibus istis formulae e theoria, consistit in querenda expressione generali variationis momentanea $\dot{\phi}$ longitudinis aut latitudinis vere, et ex hac deducendi ϕ per integrationem, quae tantummodo per approximationem perfici potest. Ex hoc sequitur, ex praecipuum celeritatis seu motus horarii $\dot{\phi}$ esse magis exactum, quam valorem ϕ ex illa deducendum. Sed motus horarius non est exacte celeritas $\dot{\phi}$, multiplicata per unam horam, quia motus non est uniformis in una hora: igitur quoque secundae differentiae requiruntur.

Sit y quaecumque aequatio lunae, calculata pro epocha t , et querendus est valor y' eadem aequationis pro epocha $t + \Delta t$. His positis supponendo Δt constans, erit per theorema Taylori

$$y' = y + \frac{\dot{y}}{1} \Delta t + \frac{\ddot{y}}{2} \Delta t^2 + \frac{\ddot{\ddot{y}}}{6} \Delta t^3 + \text{etc}$$

et motus verus lunae u , in tempore Δt , est aequalis motui medio m , in eodem tempore, plus variatione omnium aequationum $(y' - y)$. Faciendo hinc $\Delta t = 1^h$, m erit motus medius horarius = $32' 56''.46$ et verus motus horarius in longitudine, $u = m + y' - y$, ubi successive pro y omnes aequationes longitudinis poni debent; hinc habemus

$$(A) \quad u = m + \frac{2y}{87} \cdot \Delta t + \frac{3y^2}{87^2} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \dots$$

Non inutile erit, applicandi hanc formulam ad unam precedentium
aequationum, v.e. ad maxime considerabilem illam centri. Faciendo
hinc $6^{\circ}18'12''.2 = E$, $12^{\circ}56''.4 = E$, $87''.3 = L$, $1''.9 = C$, erit

$$y = E \sin A + 2L \sin 2A + 3L^2 \sin 3A + 4C \sin 4A$$

quod dat $dy = E dA \cos A + 2L dA \cos 2A + 3L^2 dA \cos 3A + 4C dA \cos 4A$
 $dy = dA (E \cos A + 2L \cos 2A + 3L^2 \cos 3A + 4C \cos 4A)$
 $- dA (E \sin A + 4L \sin 2A + 9L^2 \sin 3A + 16C \sin 4A)$

Substituendo hos valores in aequatione (A) venit

$$(B) \quad u = m + \frac{dy}{dt} \cdot \Delta t (E \cos A + 2L \cos 2A + 3L^2 \cos 3A + 4C \cos 4A) \\ + \frac{dy}{2dt^2} \cdot \Delta t^2 (E \sin A + 4L \sin 2A + 9L^2 \sin 3A + 16C \sin 4A) \\ - \frac{dy}{2dt^2} \cdot \Delta t^2 (E \sin A + 4L \sin 2A + 9L^2 \sin 3A + 16C \sin 4A)$$

Ad habemus $A = A + E + p$, ubi $p = -22'17''.3 \sin a - 11'' \sin 2a$, hinc
 $dA = dA + dE + dp$, $dp = -0.0068196 da \cos a$.

Sumendo pro da augmentum anomalie Solis in una hora $= 224''.8 = 0.00071655$,

da revera est multiplicatum per $\frac{dy}{dt}$, hinc erit $\frac{dy}{dt} \cdot \Delta t = -0.00000464 \cos a$.

quod dat (1) $E \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \Delta t \cos A = -0.105 \cos a \cos A = -0.052 \cos(A-a) - 0.052 \cos(A+a)$

Differentiale huius termini, a huius procedente per E , L , C , sunt in
sensibilibus. Primum terminus dA est motus motus anomalie in
tempore Δt , $\frac{dy}{dt}$ est ipse abscissus, et $\frac{dy}{dt} \cdot \Delta t$ est motus motus in
una hora $= 0.009501136 = 02'39''.75$. Secundus terminus $\frac{dy}{dt} \cdot \Delta t$ est quan-

titas, qua summa E omnium 24 aequationum calculatarum ante
aquisitionem centri, crescit in una hora, vel quod revenit ad idem,
est illa pars motus horarii, qua resultat ex 24 aequationibus
 E , ita ubi $y' - y$ est pars qua oritur ex aequatione centri y . Sum-
ma, qua resultat ex E , est contenta in tabulis XLVII, XLVIII.

Nominando hinc eorum summam α , habemus $\frac{dy}{dt} \cdot \Delta t = \alpha$

vel secundus terminus quantitas $\frac{dy}{dt} \cdot \Delta t = \alpha$. Quod attinet

differentiale secundum, habemus $dA = dE$, quia $d'p$ est insensi-
bilis, et motus motus dA est constans. Hinc habemus $\frac{dy}{dt} \cdot \Delta t = d\alpha$

et $\frac{dy}{dt} \cdot \Delta t = \frac{dA}{dt} \cdot \Delta t$ est variatio horaria quantitas α . Pars ma-

xime considerabilis quantitas α est illa, qua provenit ex evectio-

(Tab. XLVIII): est $40'' \cos(2E-A) = 0.0001989 \cos(2E-A)$, omnes ceteros

aequationes conjunctas non ascendunt ad $3''$. Hinc habemus

$d\alpha = -0.000194(2dE - dA) \sin(2E-A)$
 quoniam autem sit $2dE - dA = 2dC - 2dC - dA$ erit
 $2dE - dA = 65'53'' - 4'56'' - 32'40'' = 28'17'' = 0.0082273$ pro una hora.

quod dat $\frac{dA}{dt} \cdot \Delta t = \frac{dA'}{dt'} \cdot \Delta t' = -0.000016 \sin(2E-A) = -0.33 \sin(2E-A)$,
 ex quo $\frac{dA'}{dt'} \cdot \Delta t' \cdot 2 \cos A' = \frac{2}{\Delta t'} \cdot \frac{dA}{dt} \cdot \Delta t \cdot \cos A' = -0.018 \cos A' \sin(2E-A) =$
 $= -0.009 \sin 2E - 0.009 \sin 2(E-A).$

Quoniam hi parvi termini habent eadem argumenta E et $E-A$, ubi
 variatio seu aequatio XXVI longitudinis (Tab. XXXIV) et aequatio V
 (Tab. XI) connexas sunt cum his aequationibus XXVI et V motus non
 rii in tab. LI, XLVII. In aequatione (B) hinc nihil restat, quam
 termini $\frac{dA'}{dt'}$, $\frac{dA''}{dt''}$ et invenitur est

$$\frac{dA'}{dt'} \Delta t' = \frac{dA}{dt} \Delta t + \alpha + \frac{d\alpha}{dt} \Delta t, \text{ hinc}$$

$$\frac{dA'}{dt'} \Delta t'^2 = \frac{dA}{dt} \Delta t^2 + 2\alpha \frac{dA}{dt} \Delta t + \text{etc}$$

quod substitutum in (B), dabit

$$(C) \quad u = m + \left(\frac{dA}{dt} \Delta t + \alpha \right) (2 \cos A' + 2 \cos 2A' + \text{etc}) + 2 \frac{d\alpha}{dt} \Delta t \cos A'$$

$$- \frac{dA}{dt} \Delta t \left(\frac{dA}{dt} \Delta t + \alpha \right) (2 \sin A' + 4 \sin 2A' + \text{etc})$$

Introducendo praecedentes valores $m = 32' 56''.46$, $\frac{dA}{dt} \Delta t = 0.009501136$,
 $2 \frac{d\alpha}{dt} \Delta t \cos A' = -0.052 \cos(A'-a) - 0.052 \cos(A'+a)$,

$2 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0.11$, $2 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0.00376$, $2 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0.00018$ quia α est datum
 in secundis in tab. XLVII, XLVIII et rejuvendo, ter minus $\cos(A'-a)$
 qui est conjunctus cum aequatione IX (Tab. XI) in tabula XLVII, venit

$$(D) \quad u = 32' 56''.46 + 3' 35''.602 \cos A' + 14''.743 \cos 2A' + 1''.063 \cos 3A'$$

$$+ 0''.072 \cos 4A' + \alpha(0.11 \cos A' + 0.00376 \cos 2A' + 0.00018 \cos 3A')$$

$$- 0''.052 \cos(A'+a) - 1''.0242 \sin A' - 0''.1402 \sin 2A' - 0''.0152 \sin 3A'$$

$$- 0''.0014 \sin 4A' - \alpha(0.001 \sin A' + 0.00014 \sin 2A' + 0.00002 \sin 3A')$$

Primum terminus constans, et quatuor sequentes, qui habent argumen-
 tum A' vel XXI , sunt contenti in tab. XLIX ubi constanter subtra-
 hi debent 2'. Sumendo e.g. $t=0$, quing termini erunt $= 32' 56''.46$
 $+ 3' 35''.602 + 14''.743 + 1''.063 + 0''.072 = 36' 47''.94$, et subtrahendo 2',
 $34' 45''.94$ praecise uti in tabula. Terminus $-0''.052 \cos(A'+a)$ super ar-
 quimentum est $XXI+I$, invenitur in ultima columna tab. XLVII,
 ubi addita est constans 0.8, ita, ut pro $A'+a=0$ inveniat in tabula
 $-0''.05 + 0''.8 = 0''.75$. Terminus $\alpha(0.11 \cos A' + \text{etc})$ contentus in tabula I,
 habet duo argumenta α et A' . primum est summa 24 aequationum
 (Tab. XLVII, XLVIII), quae, negligendo terminos infinitesimales, reductae sunt
 ad 20. Sed quoniam aequationes tabulae XLVII aequae sunt 8, et illae
 tabulae XLVIII, 46, quolibet argumentum α in tabula I est nimis ma-
 jor 64. Assumendo e.g. $A'=0$ et $\alpha=41''$, nostra aequatio dabit
 $41''(0.11 + 0.00376 + 0.00018) = 41'' \cdot 0.118 = 4''.82$, si volumus assumi facere tabulae I,

Debet

debet fieri argumentum $44''54''=95''$ et invenitur $10''.84''=4''.34''+6''$
quia addita constans est $6''$. Credere possumus, terminos sequentes
sint, $\sin 2A'$ etc. potiusque spe comprehensas in tab. XLIX et ultimum
terminum $\alpha(0.001 \sin A + \text{etc})$ in tab. I, quae habent eadem argumenta
 A' et α , sed hi termini sunt multiplicati per \det' vel \det' et $\alpha \det$,
dum procedentes termini sunt multiplicati per \det et α : hi ultimi
variant hinc signum, si queritis motus pro hora procedenti, quum
 \det et α deveniant negativum, sed primi conservant idem signum
quia \det' et $\alpha \det$ sunt positivi: hinc separati sunt ab illis debitis
XLIX, I, et sunt appellati aequatio secundae orionis. Quia duos ter-
mini $-1''.0242 \sin A'$ etc. inveniantur in tab. I. VII. sub h. tab. XVI,
aucti quantitate constans $1''.048$. Faciendo $A'=90^\circ$, hi termini sunt
 $-1''.0242 + 0''.0482 = -1''.009$, et invenitur in tabula, $1''.048 - 1''.009 = 0''.039$.
Ultimus terminus $-\alpha(0.001 \sin A + \text{etc})$ est constans in tabula I. VII,
ubi constans addita est $0''.054$. Sit e.g. $\alpha = 36''$ et $A = 90^\circ$, nostra aequa-
tio dabit $-36''(0.001 - 0.00002) = -0''.035$, in tabula invenitur, cum ar-
gumentis $\alpha + 54'' = 90^\circ$ et $A = 111^\circ$ $0''.054 - 0''.035 = 0''.018$.

Explicata hac analysi, quilibet comprehendat facile omnes cete-
ras aequationes motus horarii in longitudine.

Termini procedentes dant motum horarium in orbita, igitur actus
necessaria est ~~reductio~~ reductio ad eclipticam, ut habeamus mo-
tum in longitudine: Sit NL orbita, long L , Ll ipse motus
horarius in orbita, Nll ecliptica, Lll circulus latitudinis
hinc $NL = \alpha$ argumentum latitudinis, $Nl = \beta$ latitudo. His
propositis habemus $Lg Nll = Lg \alpha \cos v$, hinc

$$d. Nll = \frac{d\alpha \cos v \cos Nll}{\cos \alpha} = \frac{d\alpha \cos v}{\cos \beta}, \text{ quia } \cos \alpha = \cos Nll \cos \beta.$$

Sed quoque habemus $\sin \beta = \sin v \sin \alpha$, hinc $d. Nll = \frac{d\alpha \cos v}{1 - \sin^2 v \sin^2 \alpha}$, et reduc-
tio motus horarii ad eclipticam, vel quod a motu procedenti in orbita
 $d\alpha$ subtrahi debet, ad obtinendum $d. Nll$, h. e. $d\alpha - d. Nll = \zeta =$
 $= \frac{d\alpha(1 - \cos v - \sin^2 v \sin^2 \alpha)}{1 - \sin^2 v \sin^2 \alpha} = d\alpha - \frac{d\alpha \cos v(1 + \sin^2 v \sin^2 \alpha + \sin^4 v \sin^4 \alpha + \text{etc})}{1 - \sin^2 v \sin^2 \alpha}$

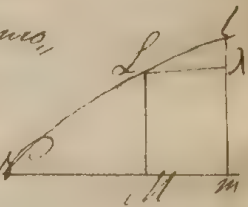
et exprimendo $\sin^2 \alpha$, $\sin^4 \alpha$ per $\cos 2\alpha$, $\cos 4\alpha$

$$\zeta = d\alpha \left\{ 1 - \cos v \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 v + \frac{3}{8} \sin^4 v \right) + \frac{\cos v \sin^2 v}{2} (1 + \sin^2 v \cos 2\alpha - \frac{\cos v \sin^4 v \cos 4\alpha}{8}) \right\}.$$

Substituendo $v = 5^\circ 8' 46''$, habetur

$$\zeta = d\alpha (0.00000035 + 0.0040386 \cos 2\alpha - 0.00000806 \cos 4\alpha)$$

Valor maximus quantitatis $d\alpha = 32' 56''.46$ dat $\zeta = 0''.0007 + 0''.9823 \cos 2\alpha - 0''.0189 \cos 4\alpha = 5'$



et ξ mutabilis in proportionem, in qua motus verus $d\alpha$ major vel minor est quam $32'56''46$, hinc habemus $\xi = 5 \frac{1}{32'56''46} d\alpha$. Hæc est dispositio tabularum celeb. Mayer. — Tabula 66 continet ξ pro argumento α ; tabula 67, cuius argumentum est $d\alpha$, dat factorum $\frac{d\alpha}{32'56''46}$ per quem multiplicari debet æquatio tab. 66 ad oblinendum ξ . In tabulis celeb. Bürg, re actio est speculata u. l. æquatio motus horarii, et calculata u. l. ceteræ. Reductio est $2 = -6''46''8 \sin 2\alpha$. Faciendo hinc $406'' = 6''$ et in partibus radii $0.001972222 = 6$, habebimus $\frac{d\alpha}{dt} \cdot \Delta t = -26 d\alpha \cos \alpha$ et $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \Delta t^2 = +46'' d\alpha \sin 2\alpha$. Atqui verus motus horarius hunc relative ad nodos, $d\alpha$, est æqualis medio motui, plus summa æquationum motus horarii. Sed hæc æquationes sunt contrariæ, in tabulis, cum motu medio $= 32'56''46$. Terminando hinc α summam æquationum motus horarii in longitudine, sumatarum e tabulis, et medium motum horarium relate ad nodos, $33'14''4 = 1984''4 = C''$ et in partibus radii $0.009620643 = C''$, habebimus $d\alpha = C + (\alpha - 32'56''46)$ hinc $d\alpha = C + 2C(\alpha - 32'56''46)$. Quæ autem sit variatio horaria reductionis, vel quod revenit ad idem, reductio motus horarii $\xi = \frac{d\alpha}{dt} \Delta t + \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \Delta t^2$ veniet

$$\xi = -26C'' \cos 2\alpha - 26(\alpha - 1976''46) \cos 2\alpha + 26C'' \sin 2\alpha + 46C(\alpha - 1976''46) \sin 2\alpha$$

$$= -2''8273 \cos 2\alpha - 0.00394444(\alpha - 1976''46) \cos 2\alpha + 0''0753 \sin 2\alpha + 0.0000759(\alpha - 1976''46) \sin 2\alpha.$$

Faciendo $\xi = -A - B + C + D$, C, D sunt æquationes secundæ ordinis, quæ resultant ex $d\alpha^2$ et quæ igitur non mutant signum, uti A et B , si agitur de tempore elliptico. Sic habemus $A = 2''8273 \cos 2\alpha$ vel $\cos 2\alpha = \frac{A}{2''8273}$ hinc $B = \frac{A \cdot 0.00394444(\alpha - 1976''46)}{2''8273} = 0''00080393(\alpha - 1976''46)$ ubi t'' est expressum in secundis. Similiter habemus $C = 0''0753 \sin 2\alpha$ vel $\sin 2\alpha = \frac{C}{0''0753}$ hinc $D = \frac{C \cdot 0.0000759(\alpha - 1976''46)}{0''0753} = C''0.001008(\alpha - 1976''46).$

Hæc reductio est in tabulis celeb. Bürg, æquatio XXVIII motus horarii. Eius primus terminus A , qui habet pro argumento $\alpha = XXVIII$ est contentus in tabula LV. secundus terminus, qui habet argumentum A et α , in tabula LVI. Tertius terminus C , qui habet idem argumentum α , invenitur in tabula LVII sub titulo XXVIII, terminus D , qui habet sua argumenta C et α , est contentus in tab. LXI. Sit ex. grat.

$$\alpha = 30^\circ, \alpha = 38' 10'' = 2290'', \text{ ergo } A'' = 3''.9136, C'' = 0''.0652$$

$$B = 3.9136. 0.000504. 313''.54 = 0.00197245. 213''.54 = 0''.6184$$

$$D = 0.0000652. 313''.54 = 0.00197245. 313''.54 = 0''.0204, \text{ ex quo venit}$$

$$\xi = -A - B + C + D = -4''.4464. -$$

In tabulis invenitur (I.V) cum argumento $\alpha = I^s$, $A = 4''.09$, sed quia addita sunt $8''$ habetur $A'' = -3''.91$. — cum argumentis $\alpha = 38' 20''^* A$

* quia summa omnium sequentium $8''$ est aucta

$$A = 4''.1 \text{ invenitur } B = -10''.62, \text{ h.e. } B = -0.62. - \text{ cum argumentis}$$

XXVIII = I^s invenitur (Tab. L.VII) $C = 0''.141$; ubi constantis addita est $0''.075$, hinc $C = +0''.066$, cum argumentis $\alpha = 38' 10''$ et $C = 0''.141$ invenitur (Tab. L.XI) $D = -2''.281$, et subtracta constanti $2''.299$, venit

$$D = +0''.018, \text{ hinc } \xi = -4''.446, \text{ uti prius. — Eodem modo invenitur}$$

motus horarius in latitudine. Assumendo pro exemplo, masi,

$$\text{magnitudinem latitudinis } B = 5^\circ 8' 40''.8 \sin \alpha - 5'' \sin 3\alpha =$$

$$D \sin \alpha - L \sin 3\alpha, \text{ habetur } dD = D d\alpha \cos \alpha - 3L d\alpha \cos 3\alpha,$$

$$d'B = -D d\alpha \sin \alpha + 9L d\alpha \sin 3\alpha, \text{ ex quo deducitur motus horarius}$$

$$\text{in latitudine } b = dD + \frac{d'B}{d\alpha}, \text{ et ponendo motum horarium loco}$$

$$d\alpha, \text{ erit } b = d\alpha (D \cos \alpha - 3L \cos 3\alpha) - \frac{d\alpha}{2} (D \sin \alpha - 9L \sin 3\alpha). -$$

$$\text{Substituendo } d\alpha = c'' = 1984''.4 \text{ et } c = 0.009620648 \text{ hinc quoque}$$

$$\frac{d\alpha}{2} = 0.00046278, D = 5^\circ 8' 40''.8, L = 5'' \text{ erit}$$

$$b = 2' 58''.182 \cos \alpha - 0''.1443 \cos 3\alpha - 0''.8571 \sin \alpha + 0''.0021 \sin 3\alpha, \text{ ubi no}$$

tari potest, duos terminos, qui sunt aequationes secundi gradus, non

mutare signum pro hora antecedenti epo chae. Duo priores ter

mini sunt contenti in tab. L.XII, ultimus in tabula L.XV. Sed

quia nos supposuimus $d\alpha$ aequale motui medio c , loco motus

veri $d\alpha$, qui est datus prius, $d\alpha$ multiplicari debet per $\frac{d\alpha}{d\alpha'} = N$ et $d\alpha'$

per $(\frac{d\alpha'}{d\alpha}) = N$ factores N , N inveniantur in tabula L.XVII..

Theoria parallaxis quae deditur, usque prae applicationem habet

ad sensum. Ista aequatio, quam ibi deditur, dat immediate parallaxin

hanc sub aequatione $= \alpha$, quae est parallaxis horizontalis pro locis sub

aequatore. Sed quum distantia hanc est variabilis, propter motum

ellipticum et actionem Solis, ejus parallaxis debet necessario esse

subiecta aequationibus variationibus. Dabitur igitur certus valor ^{quidam} para

llaxis aequatorialis, qui magna cum praecisione determinari debet,

quia est quantitas absoluta seu differentia constantis, a quo omnes

correctiones dependent; et hic naturali videtur, eligere ad hunc effe

ctum parallaxin hanc in sua media distantia, quae est aequalis semiaci

majori ejus orbitæ ellipticæ. Determinatio parallaxis micis exigit
molestas disquisitiones; nos hic dabimus adeam operationes, per quas
concludi potest parallaxis ex observationibus.

Nominando c distantiam micam hanc a terra vel semidiametrum ejus
ellipticæ, & parallaxin æquatoriam quæ respondet c , & distantiam
hanc in momento unius observationis, & parallaxin æquatoriam
quæ hinc conuenit, habemus $\alpha = \frac{c}{t}$, $\alpha' = \frac{c}{t'}$, ubi semidiameter æquatoris
terrestris pro unitate est assumpta. Cum eccentricitas & orbitæ
ellipticæ nota sit, et anomaliam vera & tabulis data sit, habebimus
 $\frac{c}{t} = \frac{1-y^2}{1-y \cos v} = \frac{\alpha}{\alpha'}$, thine $\alpha = \frac{\alpha'(1-y^2)}{1-y \cos v}$; verum quidem est, hoc non

revera esse parallaxin micam, quam querimus, quia et α non
exactly sunt conformes valores theoricæ ellipticæ, quoniam non solum
dependat a c , sed etiam ab actione solis; sed quoniam hujus effe-
tus modus est augmentum, modus imminutio quantitas laetæ & micæ
summa ex magno numero observationum, parum tantummo-
do differt a valore exacto, et corrigi potest per sequentium obser-
vationem. Theoria physica nobis suppeditat argumenta et for-
mam correctionum parallaxis, quæ resultant ex actione solis, etiam
non de eadem eorum coefficientibus, qui dependunt ab α ; interea
ratio, quæ existit inter hos coefficientes, est satis nota, ut indi-
cetur ii, qui sunt maxime considerabiles. Nominando eos α, β etc.

parallaxis correcta erit data per seriem hujus formæ
 $\alpha' = \alpha + \alpha \cos A + \beta \cos B + \dots$ Eligentur igitur observationes, ubi
 $\cos A$ et $\cos B$ sunt nulli vel $\alpha \cos A + \beta \cos B = 0$; tunc possumus
sine errore sensibili supponere $\alpha' = \alpha$; valor quantitatis α , qui
per hunc processum inuenietur, sufficit dein ad determinationem
veræ exactam coefficientium α, β etc. — His positis, possumus
calculari cum argumentis A, B etc. et coefficientibus α, β etc. cor-
rectionis, quæ conueniunt cuiusque observationi α' , quarum summa
subtrahita ab α' , dabit valore exactum quantitatis α .

Parallaxis hanc est ita considerabilis, ut Astronomi Græci
Alexandriæ eam jam determinaverint aliqua cum præcisione.
Secundum Hipparchum, maxima parallaxis est $55' 30''$, minima
 $47' 30''$. Ptolemæus inuenit distantias hanc in quadraturis
æquales $43\frac{1}{2}$ et $32\frac{1}{2}$ semidiametris terre, in syzigiis $64\frac{1}{2}$ et $53\frac{1}{2}$

et 338 (Almag. (V. c. 13) quod dat parallaxes $79' 38''$ et $104' 42''$ in qua-
draturis, et in syngis $53' 34''$, $63' 57''$ hi ultimi valores sunt vicini-
simi veritati. Anno 1284, Alfonso X, rex. Castellae, invenit per
calculum, maximam parallasin = $63' 17''$, minimam $53' 19''$, fere
ut ptolemaeus; hoc resultatum est magis exactum quam illud
prius inventum a Copernico, Tychoe et Keplerio. — Maxima
parallaxis est secundum Lalande = $61' 29''$, minima $53' 51''$, se-
cundum Mayer $61' 32''$, $53' 54''$ et media prius designata per α ,
= $57' 11''$. — Secundum Bürg, parallaxis media sub aequatore
est $57' 1''$, et variat per naturam ellipsis, a $54' 3''$ ad $60' 18''$.
Novera, si facimus $y = 0.055027$, $\alpha = 57' 11''$, veram parallasin sub aequa-
tore = α' , distantiam mediam luna a terra = 1, radium vectorem α ,
spectrum z , anomaliam veram computatam a perigeo = A , erit
 $\sin \alpha'$: $\sin \alpha = 2:1$ hinc $\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1-y^2} (1+y \cos A)$.

Nominando dein $\frac{1}{1-y^2} = 1.0030372 = R$, erit

$$\sin \alpha' = R(1+y \cos A) \sin \alpha = R(1+y \cos A) \alpha (1 - \frac{\alpha^2}{6} + \text{etc.})$$

hinc, quia $\alpha' = \sin \alpha' + \frac{\sin^3 \alpha'}{6}$

$$\alpha' = R(1+y \cos A) \alpha (1 - \frac{\alpha^2}{6}) + \frac{R^3}{6} \alpha^3 (1+3y \cos A + 3y^2 \cos^2 A + y^3 \cos^3 A),$$

vel ponendo brevitatis causa

$$1 + \frac{R^2}{6} \alpha^2 + \frac{R^2 \alpha^2 y^2}{4} = R, \quad y(1 - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{R \alpha^2}{2} + \frac{R \alpha^2 y^2}{8}) = R, \quad \frac{R \alpha^2 y^2}{8} = S,$$

$$\text{erit} \quad \alpha' = R \alpha (R + 2 \cos A + R \cos 2A + S \cos 3A).$$

Invenitur

$$R = 1.00303767, \quad R^2 = 0.05519924, \quad R^3 = 0.00000021, \quad \text{hinc}$$

$$(1) \quad \alpha' = 57' 11''.39 + 188''.27 \cos A + \text{etc.}$$

Quum anomaliam veram jam calculata est in tabulis, mirum non
est $A = A'$ aequatione centri, aequatio (1) erit multo simplicior quam
illa applicata in tabulis, ubi pro argumento est assumpta anomaliam
media correcta A' . Novera nos habemus,

$$z = 1 - y \cos A' + \frac{y^2}{2} (1 - \cos 2A') + \frac{3}{8} y^3 (\cos A' - \cos 3A') + \text{etc.}$$

$$\text{hinc} \quad \frac{1}{z} = 1 + y \cos A' + \frac{y^2}{2} (\cos 2A' - 1) + \frac{3}{8} y^3 (\cos 3A' - \cos A') + y^2 \cos^2 A' + y \cos A' (\cos 2A' - 1) + y^2 \cos^2 A'$$

$$\frac{1}{z^3} = 1 + 3y \cos A', \quad \text{quia} \quad \frac{1}{z^3} \text{ est multiplicatum per } \alpha^3.$$

Hoc dat

$$\alpha' = \frac{\alpha}{z} (1 - \frac{\alpha^2}{6}) + \frac{\alpha^3}{6z^3} = \alpha \{ 1 + y(1 - \frac{y^2}{8}) \cos A' + y^2 \cos 2A' + \frac{3}{8} y^3 \cos 3A' + \frac{\alpha^2}{6} y \cos A' \}.$$

Substituendo hinc $\alpha = 57' 11''$, $y = 0.055027$, habemus $\alpha' = 0.000275078$

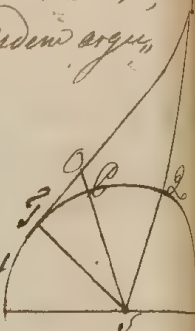
$$\frac{\alpha^2}{6} y = 0.0000050456, \quad \text{hinc}$$

(2) $\alpha' = 57' 1'' + 188'' 193 \cos A + 10'' 359 \cos 2A + 0'' 2 \cos 3A$;
 hac aequae est in tabula XXXIX. celeb. Bürg

$$\alpha' = 57' 1'' + 187'' 3 \cos A + 10'' 359 \cos 2A + 0'' 2 \cos 3A$$

Perturbationes lunae orientatus e vi, qua attrahitur a sole; hinc debent necessario variare ejus distantiam a terra, vel ejus parallaxin, et quidem eo magis quo 1) vis perturbatrix, s. major, vel quo propior est sol, s. lunae, quae dependet ab a , A et E , 2) quo lunae propior est ellipticus, quae dependet ab ejus distantia a nodo. Hinc argumenta correctionum parallaxis erunt composita ex a , A , E , et C . - So vel $C+N$ ita, ut parallaxis dependeat ab iisdem argumentis, uti longitudo, sed alio modo. -

Sit ST orbita lunae circa terram in S et supponamus attractionem solis I removere lunam a T in O , ubi TO est punctio procedentium argumentorum. Nominando Q unum horum argumentorum, videmus, omnes aequationes longitudinis habere formam $\sin Q$, quod dat angulum TPO seu $\angle P$. Sed quum sit $\alpha = \frac{1}{2}$, ubi r est radius, dicitur, velos ST , erit $d\alpha = -\frac{dr}{r}$. Sed $TP \cdot PO = r \cdot \sin Q$, $dr = \sin O : \cos O$, ex quo presumi potest, dr et $d\alpha$ esse functiones continuas eorum; cum argumentorum, quorum dC continet sinus. Ex hoc resultat, $d\alpha$ esse nullum, quum dC est maximum, et reciproce, quia haec duae aequationes sunt duae per duos latera perpendicularia trianguli TPO . Parallaxis hac ratione correcta, sub aequatore est secundum tabulas celeb. Bürg



$$\begin{aligned} \alpha' &= 57' 1'' + (188'' 3 \cos A + 10'' 359 \cos 2A + 0'' 2 \cos 3A) \text{ (XXXIX)} \\ &+ (37'' 3 \cos(2E - A) + 0'' 3 \cos 2(2E - A)) \text{ (Erat. XL)} \\ &- (1'' \cos E - 26'' \cos 2E - 0'' 2 \cos 3E) \text{ (Variat. XLII)} \\ &- 0'' 3 \cos a \text{ (XLII)} \text{ (Aeq. I)} - (0'' 2 \cos(E - A) + 2'' \cos 2(E - A)) \text{ (Aeq. V)} \\ &- 0'' 1 \cos(2E + A) \text{ (Aeq. VII)} + 0'' 2 \cos(A - a) \text{ (IX)} + 0'' 5 \cos(2E + a) \text{ (X)} \\ &+ 0'' 3 \cos(2E - a) \text{ (XI)} + 1'' \cos(2E - A + a) \text{ (XII)} + 0'' 6 \cos(2E - A - a) \text{ (XIII)} \\ &+ 0'' 4 \cos(C + N) \text{ (XVII)} - 0'' 8 \cos(2C + 2N - A) \text{ (XXVII)}. \end{aligned}$$

Parallaxis aequatorialis α' dat parallaxin horizontalem H , pro quolibet loco, cujus distantia r a centro terrae est data, $H = \alpha' r$; parallaxis media aliujus loci dicitur $= 57' 1''$, semper minor quam illa sub aequatore. Dicitur H dabit parallaxin pro quacunque altitudine. Distantia pugna a terra resultat immediate ex ejus parallaxi: haec est in partibus radii terrae, $r = \frac{H}{\sin \alpha'}$. Modus ellipticus et perturbaciones pro quibus per actionem solis, hanc faciunt variare α a $53'$ ad $62'$; ex quo resultat maxima distantia lunae $= \frac{r}{\sin 53'} = 64.5604$ radiis terrae, minima $= \frac{r}{\sin 62'} = 55.4505$ et media distantia = Radius terrae.

Magnitudo Lunæ

Diffinitio seu parallaxis alicujus astri, ejus diametris apparentis, et
realis magnitudines ita inter se sunt connexæ, ut datis duabus harum
quantitatibus, altera immediate innoscatur.

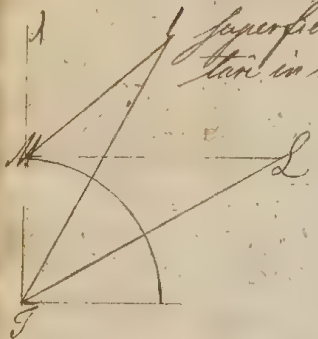
Sint C, L centra, $CP = r$, $CL = R$, semidiametri terre
et lune, $LC = x$ earum distantia, et CL tangens ad
superficiem lune et terre: his positis $LCI = \xi$ est semidiameter lune
visa e centro terre, vel semidiameter centralis, $CLP = H$ ejus paral-
laxis horizontalis quæ convenit altitudini poli loci P , vel ratio
 $CP = r$ et distantie r ; hæc igitur est parallaxis æquatorialis æ
si P est locus in æquatore. Apponendo hinc pro unitate distan-
tiam semidiametri æquatoris, habebimus

$$\alpha = \frac{r}{x}, H = \alpha \xi = \frac{r}{x} \xi \text{ vel } r = \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Sine vel } \xi = \frac{H}{\alpha} = \frac{R}{r}, \text{ hinc } \xi = R\alpha \text{ et } R = \frac{\xi}{\alpha} = \frac{r}{\alpha}$$

h. e. vera diameter lune est ad diametrum æquatoris terre sicut, vel
ad quamcunque diametrum terre, uti diameter apprensus lune est ad pa-
rallaxin horizontalem sub æquatore vel sub alio loco dato. Ad
inveniendam veram diametrum lune, in his aliud faciendum est,
quam sumere e tabulis ejus parallaxis horizontalem, est observare
ejus diametrum apprensus pro eo momento, pro quo calculata
est parallaxis. Ratio inter parallaxin æquatoriam et diametrum
centralem lune hinc est constans, et inventum est per medium ana-
logiæ numerorum observationum, hanc rationem fere esse $\xi = R = \frac{3}{11}$,
vel secundum Bürg 0.24293. Multiplicando hinc usam paral-
laxin horizontalem datam per $\xi = 0.24293$, habebimus semidiamet-
rum centralem pro eodem momento: invenitur in tab. XLIII Bürg,
ubi numeri secundæ columnæ, divisi per illos primæ, dant quotum
constantem 0.24293. — Vera diameter lune hinc est 0.24293 diam. æquat. terre
ejus superficies est $(0.24293)^2 = 0.05944908 = \frac{1}{134.245}$ ejus terre, et ejus
volumen est $(0.24293)^3 = \frac{1}{49.1866}$ ejus terre; igitur facile possumus
exprimere magnitudinem lune in quacunque mensura.

Ad calculandas eclipses et occultationes stellarum per lunam,
necessaria est cognitio diametri lune ita ut apparebit in dato loco
et tempore dato. Diameter centralis lune est $2\xi = \alpha.0.54586$: faciendū
hinc $\alpha = 53'$, $\alpha = 57'1''$, $\alpha = 62'$, habebimus minimam diametrum centralem
lune $= 28'55''.84$, medianū diametrum $= 31'7''.4$ et maximū $= 33'56''.6$. Hæc
est diameter geocentrica, quæ non confundi debet cum diametro visa e superficie terre.



Supponendo etiam, durante una revolutione terre, distantiam lunę a terra non variari sensibilibiter; tamen ejus distantia ab aliquo puncto superficię non potest eadem manere, et ejus apprensus diameter, orbet mutari in ratione inversa distantię. Supponamus, esse centrum, M , aliquod punctum superficię terre, et centrum lunę apparere successive positiones L, l, λ , per rotationem terre: dñm habemus $ML = Ll = \lambda l$ et nominando $25'$ diametrum apparentem lunę in altitudine l , habemus $5:5' = Ml:l$, vel $5' = \frac{Ml}{5}$. Clarum hinc est, diametrum apparentem esse maximam in zenith A et minimam in horizonte L , quia $MA < Ml$ et $Ml < ML$. Diameter lunę visa ex aliquo loco M , quando est in horizonte in L , vel ejus diameter horizontalis est ad diametrum centralem, uti SL ad ML .

Faciendo hinc $SM = i$, SL est fere $= 60$ hinc $ML = \sqrt{60^2 - 1} = 60 - \frac{1}{120}$ et $SL:ML = 1:1 - \frac{1}{7200}$ hinc quum sit 5 fere equalis $15'$, cujus 7200 pars est 0.12 , sequitur, distantiam inter duas diametros, centralem et horizontalem, esse insensibilem.

Quando luna se elevat supra horizontalem, appropinquatur observatori in M et hinc ejus diameter apprensus crescit. Nimirum est $5' = \frac{SL}{ML} \cdot 5 = 5 \frac{\sin \lambda ML}{\sin \lambda SL}$, ubi $\lambda ML = 90^\circ - \theta'$ est distantia apprensus a zenith, et $\lambda SL = 90^\circ - \theta$ distantia vera. Hinc habemus $5' = 5 \frac{\cos \theta'}{\cos \theta}$ et $5' - 5 = 5 \frac{\cos \theta' - \cos \theta}{\cos \theta}$. Correctio semidiametri, seu quod addi debet ad semidiametrum horizontalem seu centralem 5 , ut habeamus semidiametrum apprensū, ten in altitudine θ vel θ' hinc est

$$(1) \sigma = \frac{25}{\cos \theta} \cdot \sin \frac{\theta + \theta'}{2} \sin \frac{\theta - \theta'}{2}$$

Nominando H parallelum horizontalem, h parallelum altitudinis et evaluando usq. ad quadratum quantitatis H , quod hinc sufficit, habemus $h = H \cos \theta'$ et $\theta' = \theta - h$ hinc $\sigma = \frac{25}{\cos \theta} \sin \frac{\theta}{2} \sin(\theta - \frac{h}{2}) = 5h(\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}) = 5h(\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}) = 5H \cos \theta (\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta')$
 $= 5H(\frac{1}{2} \cos \theta (\cos(\theta - h) - \frac{1}{2} \cos \theta)) = 5H(\sin \theta + H \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta)$,
 vel substituendo $0.74293 = 3.66394 \cdot 5 = 18.3197$ pro H ,

$$(2) \sigma = 18.3197 (5 \sin \theta + \frac{1}{4} 5^2 (1 - 3 \cos 2\theta)).$$

Si vellemus exprimere (1) per altitudinem apparentem θ' habemus $\theta = \theta' + h = \theta' + \eta \sec \theta'$, hinc.

$$\sigma = \frac{\eta \sec \theta'}{\cos(\theta' + h)} \sin(\theta' + \frac{h}{2}) = \frac{\eta \sec^2 \theta'}{1 - \eta \sec \theta'} (\sin \theta' + \frac{\eta}{2} \sec \theta') = \eta (\sin \theta' + \eta \sec \theta' + \frac{\eta^2}{2} \sec^2 \theta')$$

$$\text{vel (3) } \sigma = \eta \left(\sec \theta' + \frac{\eta}{2} \sec^2 \theta' (3 - \cos 2\theta') \right)$$

Assumendo valorem $\eta = 17' = 0.00492451$, habemus approximative $\sigma = 37' 37'' 22.005$ $\sin \theta' = 18'' \frac{1}{2}$ $\sin \theta$, ex quo videmus, diametrum apparentem lunae posse crescere ad $37''$ ab Horizonte usque ad Zenith. Proinde propostio, magnitudinem apparentem lunae crescere cum ejus altitudine, videtur contradicere experientis generaliter cognitae, secundum quam nos credimus lunam maximam in Horizonte. Mensurando diametrum lunae cum micrometris, vel appropinquando eam cum tubis, videmus nostrum errorem, et diametrum revera crescere cum altitudine, in ratione, quae modo data est: ex hac sequitur, hanc illusionem opticiam esse, si lunam aspiciamus isolatam et hinc provenire ab objectis quae circumdant lunam et quibus eam comparamus. Nos scimus, quodlibet objectum apparere minus, si est isolatum vel suspensum in aëre: columna aquae aliquam magnam domum apparet esse multo major ad Horizontem, quam si est in libero loco; ita etiam luna apparet esse multo major ad Horizontem ubi est circumdata variis objectis. Interca notare debemus, hoc non explicare phenomenon, quare haec Illusio etiam in mari locum habeat, ubi tamen Horizontis est liber.

Secundam aliam explanationem, datam jam a Stoiloneo (Almag. l. IX c. 2. Diffantia majores ad Horizontem visibus modo appa- rent, et minores in mundi cali locationibus.) haec Illusio venit ab eo, quod nos credimus lunam in Horizonte magis elongatam quam in Zenith: nos scimus in eodem casu, quando nos muscam, quae protervolat, nostros oculos sumimus pro avi, quia illi attri- buimus magnam distantiam. Illusio igitur est, nos credamus lunam ad Horizontem magis elongatam: et ordinaria responsio est, quia luna nobis apparet post magnam numerum objectorum terrestrium et in Zenith inter oculos et lunam nihil se praesentat. Sed quoniam eadem Illusio locum habet mari, ratio magis iusta forsitan est debilitas lucis lunae ad Horizontem, quae secundum principia per- spectivae aëreae, facit, ut objecta appareant magis elongata. Pro- babile quoque est, vapores Horizontis producere irradiationem

que, sicut ut luna, ubi et subleq. appareant majores, nisi tempestive quam
cum telescopio. Ratio majoris momenti est, for. situm experientia no-
ta toti mundo, celum ^{super} appere ubi perfectum hemisphæricum,
sed ubi formæ compressa, cujus radius basis, secundum quasdam
observationes, tribus aut quatuor vicibus major est quam altitudo.
Luna igitur nobis apparet minus elongata in Zenith quam
in Horizonte.

Eandem explicata est hæc illusio per constructionem nostri ocu-
li: et hæc explicatio spect. sine dubio maxime satis faciens,
si observationes, in quibus est fundata, spect. melius stabili-
tate. Dicunt, oculum esse similem lentæ achromatice, hæ-
cunq. differendia, ut ejus apertura sit variabilis, p. conuacem,
de et dilatand, in ratione, qua lux magis vel minus est fortis.
Noster oculus sine videt lunam in Zenith per aperturam par-
vam, inverte ad Horizontem. Preterea experientia nos docet,
imaginem abjecti lucentis, formatam per lentam achromaticam
in eadem distantia, esse eo majorem, quo major apertura. imago
luna, projecta in retinam, erit igitur multo major ad Horizontem
ubi eam aspiciamus per aperturam majorem, quam in Zenith, ubi
pupilla se conuacit.

Rotatio Lunæ

Superficies lunæ constanter est hæc maculis diversis magni-
tudinibus, quas jam videmus oculis liberis. Breui tempore post inuenti-
tionem telescopiorum hæc lunæ sunt delineatæ, et sic per com-
parationem cum posterioribus observationibus, potuerunt pervenire
ad cognitionem exactam variabilitatis macularum. Facile qui libet
se convincere potuit, facta abstractione ab aliquibus exceptionibus
parum considerabilibus, has maculas esse invariabiles, et earum
situationem relative ad oculum non mutari, hinc nos videre semper
per easdem maculas, et lunam nobis representare semper eandem
partem. Si hoc rigorose verum esset, ex hoc sequeretur, lunam, tem-
poris annis, revolutionis circa terram, revolvi una vice circa axem
perpendiculararem ad planum ejus orbis, et celeritates angulares horum
duorum motuum esse exacte æquales, nam alias non est possibile
ut nos videamus constanter eandem partem lunæ. Sed observationes

magis accurate ostenderent, hoc esse subiectum aliquibus excep-
tionibus. Maculae quae videntur admodum propinque margini lu-
nae, egrediuntur e disco visibili; ita. Aliam intrant ex altera parte
disco aliae maculae. Hoc phenomenon locum habet in orientali et
occidentali, modo in boreali et australi parte; et haec inaequalitas
apparentis lunae nominata est ejus Libratio et facile explicari po-
test sequenti modo. Quum omnes rotationes corporum celestium,
quas observare possumus, sint perfecte uni formes, supponere debe-
mus, idem quoque esse quod lunam; et observatio ^{hanc} confirmavit.
Sed quum motus lunae in sua orbita sit admodum inaequalis,
ex hoc sequitur generationem lunae nobis praesentare semper ean-
dem partem si periodicus ejus rotationis est aequalis mensi si-
derali: sed maculae modo in superiori modo in inferiori parte
disparebunt, si motus lunae in sua orbita celerior est vel non
quam motus mensis. — Praeterea, si axis rotationis non est
exactly perpendicularis ad planum orbitae, maculae in parte su-
periori vel inferiori disparebunt, in ratione, in qua luna elonga-
tur a nodo ascendenti vel descendenti sui aequatoris. Accedunt
quoque duae aliae causae, quarum una pure est optica uti proce-
dentes, altera autem physica. — Si etiam luna dirigeret constan-
ter eandem partem versus centrum terrae, ita ut recta lineam
centra lunae et terrae, discurrerem ^{per} semper i eodem puncto
fieret, oculus in superficie terrae, modo in hac modo in altera
parte hujus lunae esset propter motum diurnum terrae, ita
ut luna ei appareret facere in uno die, oscillationes in parte
rotationis terrae; et facile quilibet videt, hunc effectum nihil
aliud esse quam parallaxin. Tendum, si luna non est perfecta
homogenea, ejus partes magis elevatae vel magis densae, fortius
attrahuntur a terra, ex quo resultabunt reales inaequalitates
ejus rotationis. Haec ratione oscillationes lunae sunt quatuor
diversorum generum, quarum ultima est effectus physicus, vel
inaequalitas realis; tres ceterae, quae tantummodo sunt apparentes,
sunt compositae e libratione diversa, libratione in longitudine et latitudine

periodus theorum duarum ultimarum est mensis. —

Elementa rotationis huius per positio sui Aequatoris, nodi, inclinatio invenitur ita, uti hae aperi Salu Romani habet.

Sit longitudo nodi ascendens = ϕ , longitudo nodi descendens aequatoris long = $\phi + \omega$, inclinatio aequatoris ad eclipticam = v , v et ω sunt ita parvi, ut eorum logici possumt aequales poni unitati, et ϕ est cognitum pro quacumq. epocha. Invenitur per observationem longitudo et latitudinem plene centrica alicuius maculae, t et b .

*Vide superius
de Maculis Solis
poni debet in aequatione 1) $\mu = x$, v loco y , $90 - b$ loco d et z loco x , erit

$$\cos x = \cos v \sin b + \sin v \cos b \cos z$$

$90 - x = 90 - P M =$ declinationi plene centricae maculae
et $z = P E M$. Quum E, P sunt poli aequatoris et eclipticae, cuius longitudo semper 90° maior est quam illa sui nodi descendens, longitudo poli P erit
 $= 90 + \phi + \omega$, illa maculae $M = l$, ex quo sequi habet

$$z = l - 90 - \phi - \omega, \text{ hinc}$$

$\cos z = \sin(t - \phi - \omega) = \sin(t - \phi) - \omega \cos(t - \phi)$, quae praecedenti aequationi sequentem formam dat:

$$\cos x = \sin b + v \cos b \sin(t - \phi) - v \omega \cos b \cos(t - \phi)$$

Quum $v = P E$ tantummodo sit 1° vel 2° , differentia inter $P M$, $E M$ erit admodum parva: faciendo hinc $P M = E M - y$, vel $x = 90 - b - y$

habebimus fore $\cos x = \sin(b + y) = \sin b + y \cos b$, quae substitutione in praecedenti aequatione, dabit

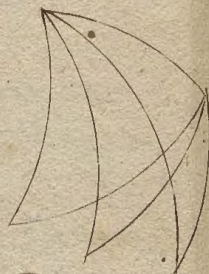
$$y = v \sin(t - \phi) - v \omega \cos(t - \phi) = 90 - b - x,$$

hinc declinatio plene centrica maculae

$$90 - x = b + v \sin(t - \phi) - v \omega \cos(t - \phi)$$

Tres observationes unius maculae, dabunt tres aequationes huius formae, et hinc tres incognitas, quas includunt, x, v, ω . —

Ex omnibus observationibus resultat, sine exceptione claudendum, quae in fli hinc Arvelius, fere ante 200 annos, dant ω minus, quam 4° ; hinc, quum exacta determinatio huius quantitalis non esset possibilis, assumi solet $\omega = 0$ ita, ut generatim supponatur, nodum descensum aequatoris lunaris coincidere cum nodo ascendenti orbis lunae.



lutea

qua,

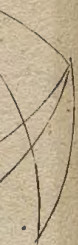
to

li,

lione

letto

loco



qua,

Edm

y

lutione

lupis

canon

nam

capit

desen

ing

